DOI:10.13203/j.whugis2003.s1.016
第28卷特刊 武汉大学学报·信息科学版 Vol.28 Special Issue
2003年5月 Geomatics and Information Science of Wuhan University May 2003

文章编号:1671-8860(2003)Z3-0062-03 文献标识码:A

测量平差函数模型的若干讨论

孙海燕[1]

(1 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路129号,430079)

摘 要:讨论了测量平差函数模型的几种形式——参数模型、非参数模型及半参数模型,分别论述了各种模型的优缺点及其适用范围。半参数模型对于客观实际具有极强的解释能力,应给予充分的重视和深入的研究。

关键词:数据处理;测量平差;参数模型;非参数模型;半参数模型
中图法分类号:P207.2

1 经典平差函数模型及其局限性

测量数据处理的函数模型通常归结为线性模型。假定平差问题的必要观测数为 t,观测向量为 $\boldsymbol{L}=[L_1, L_2, \cdots, L_n]^{\mathrm{T}}$,其真值为 $\tilde{\boldsymbol{L}}=[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n]^{\mathrm{T}}$,真误差向量为 $\Delta=[\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n]^{\mathrm{T}}$,未知参数向量为 $\boldsymbol{X}=[X_1, X_2, \cdots, X_u]^{\mathrm{T}}$,根据是否设未知参数及未知参数间是否存在函数关系,经典测量平差的函数模型通常有以下几种[1]。

1) 不设未知参数,即 $u=0$,此时观测值之间应满足 $n-t=r$ 个函数关系式,即有:

$$f(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n)=0$$

线性化后为:

$$\boldsymbol{A}\Delta-\boldsymbol{W}=0 \tag{1}$$

式(1)被称为条件平差函数模型。

2) 设有 u 个独立的未知参数,且 $u<t$,此时观测值及未知参数之间应存在 $r+u$ 个独立的函数关系式,即

$$f(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_u)=0$$

线性化后为:

$$\boldsymbol{A}\Delta+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}=0 \tag{2}$$

式(2)被称为附有未知参数的条件平差函数模型。

3) 设有 t 个独立的未知参数,此时观测值及未知参数之间应存在 $r+t=n$ 个函数关系,因而每个观测值均可表示为未知参数的函数,即

$$\tilde{L}=f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_t)$$

线性化后为:

$$\Delta=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{l} \tag{3}$$

式(3)被称为间接平差函数模型,也被称为观测方程。

4) 设有 u 个未知参数($u>t$),设 $s=u>t$,此时最多有 t 个独立的未知参数,此时观测值及未知参数之间应存在 $c=n+s$ 个函数关系,因而除了观测方程之外,还应列出 s 个约束条件方程,即

$$\tilde{L}=f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_t),\ \Phi(\tilde{X})=0$$

线性化后为:

$$\begin{aligned}\Delta&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{l}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}_X&=0\end{aligned} \tag{4}$$

式(4)被称为附有约束条件的间接平差函数模型。

5) 一般来说,通过给常数阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 取特定的值,上述4个函数模型均可表示为以下方程的特例:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\Delta+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}&=0\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}_X&=0\end{aligned} \tag{5}$$

这就是所谓的测量平差概括函数模型。

尽管上述方程在形式上有种种不同,但都是对同一个平差问题的数学描述,它们是等价的。用任何一个模型作为约束条件进行平差,都将得到相同的结果。

建立上述线性模型是基于以下假设:①未知参数是非随机变量;②观测误差中不包含系统误差和粗差,即 $E(\Delta)=0$;③平差问题是有限维空间问题,也就是说,可以用有限个参数完全决定待平差的系统;④在线性化过程中,忽略不计的量是微小量。

当平差问题满足上述条件时,应用最小二乘原理就可以得到观测量及未知参数的线性最优无偏估计。

收稿日期:2003-03-25。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40274005)。

若平差问题的部分(或全部)未知参数是随机变量时,而且这些参数的先验期望、方差及其与观测误差之间的协方差是已知的,可以将未知参数的先验期望作为虚拟观测值,应用广义最小二乘原理求解,函数模型和解算方法与经典平差类似。这就是广义测量平差中的滤波与配置[2]。

如果观测误差中含有粗差,为了克服最小二乘法抗差性差的缺点,应采用稳健估计的方法。通常的做法有两种:①改变平差时极小化目标函数,即选择对粗差不敏感的函数作为目标函数,如最小估计等;②改变平差时观测值的权,赋予含有粗差的观测值一个较小的权。但其函数模型仍与经典平差相同。

如果观测误差中含系统误差,而系统误差可以用少量参数表达,把这些参数设为未知参数,建立具有附加参数的函数模型,其形式亦与经典平差相同。

综上所述,经典平差的函数模型有非常广泛的应用。由于几种函数模型具有等价性,而间接平差函数模型(也就是高斯-马尔柯夫模型)便于分析和编程计算,这个模型成为测量平差最常用的函数模型。

高斯-马尔柯夫模型把观测值表示为有限个参数的线性函数,也就是把观测值参数化。其先决条件是平差问题是有限维问题。如果观测值无法用有限个参数的函数表示,则无论参数怎样选取,高斯-马尔柯夫模型与客观实际总是不一致的。也就是说,在平差中存在模型误差,较大的模型误差会导致不合理、甚至错误的结果。

2 非参数估计模型

认为观测值是未知参数的线性函数,是一个较强的假设。这种假设使得在数据处理过程中人为地提供了大量额外的信息。因此,当假设模型成立时,未知参数的估计可以有较高的精度。如果假设与实际不符,数据处理的结果可能很差,由此得到的一些统计分析的结论的可靠性也应该受到质疑。由于参数估计存在上述局限性,统计学界提出了非参数估计的思想[3]。下面以一个简单的示例来说明。假设对满足函数关系 $y=f(x)$的量 y、x 进行 n 次测量(函数形式未知),得到观测值 $\boldsymbol{Y}=[Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X}=[X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$,对 y 进行测量的真误差为 $\Delta=[\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n]^{\mathrm{T}}$。假设 $y=f(x)$是某个函数空间的点,比如假设 $y=f(x)$是任意的一个连续函数,若在建模时忽略 x 的观测误差,则有:

$$Y_i = f(X_i) + \Delta_i \tag{6}$$

由于对 $y=f(x)$的具体形式未作任何假设,这个模型比参数模型具有更大的适应性。

但在实际应用中,影响取值的因素可分为两类:①因素与 y 的关系可以认为是已知的,经验或试验资料可以提供这样的知识,所以这部分可以用一些参数来表达;②因素的影响函数形式是未知的,这一部分可以假设为一个未知的待定函数。非参数模型无法利用经验或试验资料提供的这些信息,明显地降低了模型的解释能力,这是非参数模型的局限性。

3 半参数估计模型及其应用

针对参数模型和非参数模型的特点,半参数模型的产生是自然的。半参数模型可表示为:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{BX} + \boldsymbol{S} + \Delta \tag{7}$$

与间接平差的函数模型相比,观测方程中增加了一项 $\boldsymbol{S}=[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \cdots, \tilde{s}_n]^{\mathrm{T}}$。可以这样理解,参数 $\boldsymbol{X}$ 表达了与被观测量 $\boldsymbol{L}$ 中函数关系已知的部分,而被观测量 $\boldsymbol{L}$ 中影响因素未知或影响因素与 $\boldsymbol{L}$ 之间函数关系不明的部分则由向量 $\boldsymbol{S}$ 表示。$\boldsymbol{S}$ 的分量为某个未知函数在 $\boldsymbol{L}_i$ 中的取值。如果把 $\boldsymbol{S}$ 归入 Δ,式(7)与间接平差的函数模型相同。如果 $\boldsymbol{B}=0$,则式(7)为非参数模型。可见参数模型和非参数模型都是半参数模型的特例。

半参数模型的优点是,它可以在数据处理时尽可能地利用经验、试验结果及理论分析的结论,又不排除参数模型可能存在的系统性偏差,具有极强的解释能力。

从测绘技术及测量数据处理的发展过程来看,从参数模型发展至半参数模型,有其必然的理由。对于常规的地面测量,利用的仪器设备主要是经纬仪、水准仪、测距仪等。这些仪器设备在观测前可以进行比较精确的标定,而且观测时受外界环境变化的影响不大,观测值中的系统误差在平差前就能够得到较好的补偿。常规测量观测值的数量不大,在观测过程中又有比较完善的观测程序和检核条件,粗差也比较容易发现和剔除。平差时,假定观测误差只含有偶然误差是符合实际情况的。由于参数模型与客观实际基本相符,经典平差理论完全适合实际要求,因而得到了极大的发展和广泛的应用。随着测量仪器的发展,较短时间内就可以获得大量的观测值,粗差的定位与剔除成了测量数据处理的主要矛盾。尽管平

差的函数模型没有变化,但具有稳健性的各种平差方法应运而生,且得到了深入的研究和应用。

现代测绘技术的发展特别是空间技术在对地观测中发挥着愈来愈大的作用,对测量数据处理的理论与方法提出了新的挑战。首先,观测值受外部环境的影响较大,使得常规的参数模型与客观实际之间存在较大的偏差。以GPS信号的观测值为例,由于GPS信号从卫星发出后经过电离层、大气层到达接收机,电离层、大气层对无线电信号的折射将对测量结果产生系统性的影响。因而在数据处理中要根据电离层、大气层的折射模型对观测值进行改正,或者用观测值的线性组合参加平差,以抵消电离层、大气层折射的影响。在实际应用中,一方面电离层、大气层的折射模型的准确性和代表性很难验证;另一方面当两台接收机距离较远时,由于电离层、大气层折射的相关性减弱,观测值的线性组合亦不能很好地消除这种影响。参数模型与实际问题之间的差异在所难免。在测量数据处理中,系统误差被看作为有害成分应加以消除,实际上系统性成分亦包含有价值的信息。比如,GPS信号在电离层的时延就是研究电离层的一种观测量。所以提取参数模型与实际问题之间的模型误差,不仅可以提高数据处理的质量,而且能扩大测量资料的应用范围,其重要性是显而易见的。半参数模型恰恰可以达到这一目的。

由式(7)可以看出,通过半参数模型的参数化部分可以充分利用已知的信息,而通过非参数分量$\boldsymbol{S}$可以模拟系统误差的数值,并实现系统性分量与偶然误差的分离。解算出$\boldsymbol{S}$的估值$\hat{\boldsymbol{S}}$以后,还可以对$\boldsymbol{S}$作进一步的分析,将其主要成分参数化,从而加深对客观问题的认识,达到精化函数模型的目的。所以半参数函数模型由于其自身对客观实际的极强的解释性,一定会在测量数据处理中发挥重要的作用。

比较式(3)与式(7)可以看出,半参数平差函数模型比间接平差函数模型多了n个待定参数,使用最小二乘原理无法得到式(7)的惟一解。半参数模型的解算有多种方法,与经典平差相近的是补偿最小二乘原理,即求解如下条件极值问题:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}+\alpha\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}&=\min \\ \boldsymbol{V}&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}-\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{R}$是一个适当给定的正定(或半正定)矩阵,称为正规化矩阵;二次型$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}$反映了对向量$\boldsymbol{S}$的某种度量;$\alpha$是一个给定的纯量因子,在极小化过程中对$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{S}$起平衡作用,称为平滑因子。初步的研究和模拟计算表明,半参数模型确实能够分离系统误差和偶然误差,识别平差函数模型的系统性偏差。因此,对于半参数模型应给予足够的重视和充分的研究。

参 考 文 献

1 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础. 武汉: 武汉大学出版社, 2003

2 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差(新版). 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 2001

3 柴根象, 洪圣岩. 半参数回归模型. 合肥: 安徽教育出版社, 1995

作者简介: 孙海燕, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 测量数据处理理论与方法。

Some Discussions about the Functional Model of Surveying Adjustment

SUN Haiyan[1]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: This paper discusses some functional models of surveying adjustment, the parametric model, non-parametric model and semi-parametric model. The advantage and disadvantage of each model also described.

Key words: data processing; surveying adjustment; parametric model; non-parametric model; semi-parametric model

About the author: SUN Haiyan, professor, Ph. D supervisor. His chief research is the theory and method of data processing.