DOI :10.13203/j.whugis2003.s1.014
第 28 卷 特 刊　　武 汉 大 学 学 报 · 信 息 科 学 版　　Vol.28 Special Issue
2003 年 5 月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　May 2003

文章编号:1671-8860(2003)Z3-0055-03　　文献标识码:A

利用 Poisson 积分推导 Hotine 函数及 Hotine 公式应用问题

李建成[1]　晁定波[1]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘　要:给出一种直接利用改进的 Poisson 积分确定Hotine函数的推导,其中不包括函数的零阶和一阶项。讨论了 Hotine 公式在陆地和海洋局部重力场逼近中的应用问题。

关键词:改进的 Poisson 积分;Hotine 积分;核函数
中图法分类号:P223.0

由于地面扰动重力已可精确求得,Hotine 积分的应用受到重视。有关问题可见文献[1,2]。

Hotine积分核函数的推导,包括Hotine本人在内大都利用了球函数展开的方法,且通常给出的Hotine函数包含了球谐展开的零阶项和一阶项。下面给出一种直接利用改进的Poisson积分确定Hotine函数的推导,其中不包括谐函数的零阶和一阶项。

1　Hotine 函数的推导

扰动重力 δg 乘地心距离 r 的球谐展开式为:

$$r\delta g = -r\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n(\theta,\lambda) \tag{1}$$

式中,$T_n(\theta,\lambda)$为扰动位的 n 阶 Laplace 面谐函数。显然,$r\delta g$(或 $r\frac{\partial T}{\partial r}$)是地球外空间的一个谐函数,现将 $r\frac{\partial T}{\partial r}$应用于改进的 Poisson 积分[3]:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R}{4\pi r}\iint_\sigma\left\{\frac{r^2}{l^3} - \frac{R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2}\cos\psi\right\}\cdot\left(R\frac{\partial T}{\partial r}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

式中,l 为计算点到球面流动点之间的距离:

$$l = (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi)^{1/2} \tag{3}$$

ψ为两点之间的球面角距;R 为球半径(或地球平均半径);σ 为单位球。$\partial T/\partial r$ 是一个空间点位(r,θ,λ)的函数:

$$T(r,\theta,\lambda) = \int_\infty^r \frac{\partial T}{\partial r}\mathrm{d}r \tag{4}$$

将式(2)代入式(4),并交换积分次序得:

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma\left[\int_\infty^r\left(\frac{r}{l^3} - \frac{R^2}{rl^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{3R}{r^3}\cos\psi\right)\mathrm{d}r\right]\frac{\partial T}{\partial r}\mathrm{d}\sigma \tag{5}$$

利用标准积分表逐项求式(5)方括号中对变量 r 的不定积分(略去积分常数),

$$\int\frac{r}{l^3}\mathrm{d}r = \int\frac{r}{(R^2+r^2-2rR\cos\psi)^{3/2}}\mathrm{d}r = \frac{(r\cos\psi - R)(R^2+r^2-2rR\cos\psi)\csc^2\psi}{R(R^2+r^2-2rR\cos\psi)^{3/2}} = \frac{r\cos\psi - R}{R\sin^2\psi\cdot l} \tag{6}$$

$$-\int\frac{R^2}{rl^3}\mathrm{d}r = -R^2\Big\{(R^2+r^2-2rR\cos\psi)(r\cos\psi - R\cos 2\psi)\csc^2\psi - (R^2+r^2-2rR\cos\psi)^{3/2}\cdot\ln\left[2R^2\left(R - r\cos\psi + \sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\psi}\right)/r\right]\Big\}\backslash(R^3(R^2+r^2-2rR\cos\psi)^{3/2} = -\frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{r\cos\psi - R\cos 2\psi}{\sin^2\psi\cdot l} - \ln\left[\frac{2R^2(R - r\cos\psi + l)}{r}\right]\right\} \tag{7}$$

$$-\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{r} \tag{8}$$

收稿日期:2003-03-25。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40174004)。

$$-\int \frac{3R\cos\psi}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{3}{2}R\cos\psi\frac{1}{r^2} \qquad (9)$$

将式(6)~式(9)合并，并整理得：

$$\int_{\infty}^{r}\left(\frac{r}{l^3}-\frac{R}{rl^3}-\frac{1}{r^2}-\frac{3R}{r^3}\cos\psi\right)\mathrm{d}r = -\frac{2}{R}+\frac{1}{r}+\frac{3}{2}R\cos\psi\frac{1}{r^2}+\frac{1}{R}\ln\left[\frac{2R^2(R-r\cos\psi+l)}{r}\right]\Bigg|_{\infty}^{r} \qquad (10)$$

由于

$$\lim_{r\to\infty}\left(-\frac{2}{l}\right) = -\lim_{r\to\infty}\frac{2}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\psi}} = 0 \qquad (11)$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r} = 0 \qquad (12)$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{3}{2}R\cos\psi\frac{1}{r^2} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{1}{R}\lim_{r\to\infty}\ln\left[\frac{2R^3-2R^2r\cos\psi+2R^2l}{r}\right] = \frac{1}{R}\ln\left[\lim_{r\to\infty}\frac{3R^2}{r}-\lim_{r\to\infty}2R^2\cos\psi+\lim_{r\to\infty}2R^2\frac{l}{r}\right] = \frac{1}{R}\ln 2R^2(1-\cos\psi) \qquad (14)$$

由于$\lim\limits_{r\to\infty}\frac{l}{r}=1$，取式(10)最后一项的定积分，

$$\frac{1}{R}\ln\left[\frac{2R^2(R-r\cos\psi+l)}{r}\right]\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{R}\ln\left[\frac{2R^2(R-r\cos\psi+l)}{r}\right]-\frac{1}{R}\ln 2R^2 。$$

$$(1-\cos\psi) = \frac{1}{R}\ln\left[\frac{R-r\cos\psi+l}{r(1-\cos\psi)}\right] \qquad (15)$$

由以上各式得：

$$\int_{\infty}^{r}\left(\frac{r}{l^3}-\frac{R^2}{rl^3}-\frac{1}{r^2}-\frac{3R}{r^3}\cos\psi\right)\mathrm{d}r = -\frac{2}{l}+\frac{1}{r}+\frac{3}{2}R\cos\psi\frac{1}{r^2}+\frac{1}{R}\ln\left[\frac{R-r\cos\psi+l}{r(1-\cos\psi)}\right] \qquad (16)$$

由于$\partial T/\partial r=-\delta g$，则有：

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma H(r,\psi)\delta g\mathrm{d}\sigma \qquad (17)$$

式中，$H(r,\psi)$为 Hotine 函数，

$$H(r,\psi) = \frac{2}{l}-\frac{1}{r}-\frac{3}{2}\frac{R\cos\psi}{r^2}-\frac{1}{R}\ln\left[\frac{R-r\cos\psi+l}{r(1-\cos\psi)}\right] \qquad (18)$$

由于改进的 Poisson 积分不包括零阶和一阶谐函数项，因此，$H(r,\psi)$以及由此得到的 $T(r,\theta,\lambda)$ 也不包括这两项。

令 $r=R$，经简单代数和三角运算可得：

$$H(R,\psi) = H(\psi) = \left\{\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}-\ln\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}\right)-\left(1+\frac{3}{2}\cos\psi\right)\right\} \qquad (19)$$

式(19)右边{ }中的前两项就是通常的未去除零阶和一阶谐函数项的 Hotine 公式，而其中减去的第三项正好是 $H(\psi)$函数球谐展开的零阶和一阶项之和。已知[1]

$$H(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}P_n(\cos\psi) \qquad (20)$$

式(19)可写成：

$$H(\psi) = \sum_{n=0}^{1}\frac{2n+1}{n+1}P_n(\cos\psi)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1} 。P_n(\cos\psi) = \left(1+\frac{3}{2}\cos\psi\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}P_n(\cos\psi) \qquad (21)$$

若将 $r\,\partial T/\partial r$ 应用于标准的 Poisson 积分，可导出通常的Hotine 函数，其中将不包括式(19)中右边的第三项。

2 Hotine 公式的应用问题

应该指出，目前在陆地似大地水准面的计算中采用Hotine 积分还不现实，因为不可能对原有测定的所有重力点再用GPS 测定其大地高，通常加密重力点大都难以恢复其点位，即使可以(如欧洲一些国家)，也会因为 GPS 观测工程量浩大而没有实际意义。文献[6] 曾提到用一个位模型大地水准面高程值加对应重力点的正高(或位模型高程异常值加对应点正常高)恢复测点大地高，从而将重力异常转换为扰动重力。笔者认为，转换重力异常要求较高精度的大地高，从而要求先验大地水准面也要有较高的精度，如 dm 级，而目前最好的位模型 EGM96 大地水准面高的均方根误差(RMS)为±0.42m(到 360 阶)[4]，由此转换得到的扰动重力，用 Hotine 积分求得的大地水准面，其精度一般不太可能高于原来用重力异常按Stokes 积分所得大地水准面的精度。但已有的研究表明，在同样的条件下，即两种边值精度相同，则Hotine 积分的精度优于 Stokes 积分的精度。前者计算大地水准面的中误差与后者计算大地水准面的中误差之比，其理论推算值约 0.83 ~ 0.88，有的算例给出的比值甚至达到 0.5。Vaníček 等人根据这两种方法计算大地水准面的谱表达式进行误差方差和阶方差分析[6]，结果表明，Hotine 积分和 Stokes 积分各自逼近(真值)性态的优劣很大程度上取决于地面重力观测值的质量(精度)，质量越低，前者优于后者的程度越显著，这似乎表明 Hotine 核函数比 Stokes 核函数更“稳健”，前者的抗差性优于后者。

Hotine 积分的优点目前可在海洋大地水准面的计算中得到发挥，特别是有了丰富的卫星测高数据（相当于在陆地上有重力点的 GPS 定位数据）后，可直接由海洋重力测量数据得到平均海面上的扰动重力数据，并且可以很精确地当作大地水准面上的扰动重力数据使用。研究表明，海面地形的影响为 4.35×10^{-5}mGal[5]，实际上可认为两者相同；但由卫星测高资料计算海洋重力异常忽略海面地形的影响为－0.92mGal。另外，由测高数据也可间接计算海洋扰动重力，即先计算沿轨垂线偏差，再由垂线偏差数据计算扰动重力。由于目前大都倾向于采用由测高垂线偏差直接计算大地水准面的方法，Hotine 公式多用于仅有船测重力数据的情况。我们可以比较，由测高垂线偏差用 Hotine 公式间接计算大地水准面，和用 Molodensky 公式直接计算大地水准面，在精度和工作量两方面的得失作出评价，这是一个待研究的问题。

参 考 文 献

1 Hotine M. Mathematical Geodesy. Enviromental Science Services Administration, 1969. 310～311

2 Moritz H. Molodensky's Theory and GPS. Mittelungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz Folge 88 Graz, 2000

3 Heiskanen W A, Moritz H. 物理大地测量学（中译本）. 北京：测绘出版社，1967. 118～119

4 Lemoine F G. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. NASA/TP-1998-206861, 1998

5 Zhang C. Estimation of Dynamic Ocean Topography in the Gulf Stream Area Using the Hotine Formula and Altimetry Data. Journal of Geodesy, 1998, 72: 499～510

6 Vaníček P. A Comparison of Stoke's and Hotine's Approaches to Geoid Computation. Manuscr. Geod., 1992, 17: 29～35

第一作者简介：李建成，教授，博士生导师。现从事物理大地测量学和空间大地测量学的研究。

E-mail: jcli@wtusm.edu.cn

Derivation of Hotine Function Using Poisson Integral and Application of Hotine Formula

LI Jiancheng[1] *CHAO Dingbo*[1]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: This paper presents an approach to directly use the modified Poisson integral to derive Hotine function in which those harmonic terms are excluded. Finally, the application of Hotine formula to a local gravity field approximation over land or ocean areas is discussed.

Key words: modified Poisson integral; Hotine integral; kernel function

About the first author: LI Jiancheng, professor, Ph. D supervisor. His main research interests are the physical geodesy and space geodesy.

E-mail: jcli@wtusm.edu.cn