DOI :10.13203/j.whugis2004.01.017
第 29 卷 第 1 期　　武汉大学学报 · 信息科学版　　Vol. 29 No. 1
2004 年 1 月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Jan. 2004

文章编号: 1671-8860(2004)01-0077-03　　文献标识码: A

重力学边值问题边界数据随机模型

邓　波[1]　朱灼文[1]　陆　中[2]

(1　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)
(2　香港大学土木工程系, 香港薄扶林道)

摘　要: 针对重力学边值问题, 从理论上给出了处理连续数据边界条件的随机模型与数学方法。在广义函数的框架下, 采用 Wiener 测度和 Wiener 积分的有关理论, 建立了连续观测方程, 同时给出了误差估计方法, 并得出估计误差只与区域方差的总和有关的结论。

关键词: 重力学边值问题; 广义函数; 连续观测; Wiener 积分
中图法分类号: P223

迄今为止, 物理大地测量学边值理论研究对线性问题的讨论已经很多[1~7], 非线性边值问题近年来虽然取得了较大的进展[8, 9], 但是还没有建立一套完善、方便的非线性边值理论, 而线性边值理论又是非线性边值理论的基础。基于此种考虑, 笔者在某一特定的线性函数空间上考虑重力学边值问题。

1　连续观测方程的建立

在广义函数意义下, 考察有界区域 Ω 上的观测方程:

$$v_0 = u(t) + v \tag{1}$$

式中, v_0 是观测值; v 是观测误差; 信号 $u(t)$ 去掉了连续性的要求。

由于拥有大量分布稠密的观测值, 利用 Wiener 测度和 Wiener 积分的有关知识[10 11], 假设每个点 t 都包含在一个无限小的集中, 并记为:

$$\mu_0(\mathrm{d}t) = u(t)\mathrm{d}t + \mu_v(\mathrm{d}t),\ t \in \Omega; \int \mathrm{d}t = \Omega \tag{2}$$

式中, $u(t)$ 是要确定的函数; $\mu_0(\mathrm{d}t)$ 是观测值; $\mu_v(\mathrm{d}t)$ 是用 Wiener 测度表示的连续噪声; $u(t)\mathrm{d}t$ 也是一个相应于 Lebesgue 元素 $\mathrm{d}t = m(\mathrm{d}t)$ 测度:

$$E\{\mu_v(\mathrm{d}t)\} = 0,\ E\{\mu_v{}^2(\mathrm{d}t)\} = \sigma_0^2\gamma(t)m(\mathrm{d}t) \tag{3}$$

式中, $\gamma(t)$ 是权函数。式(2)两端同乘以光滑的检验函数 $\varphi(t)$, 并在集 Ω 上积分得如下定理。

定理　下列等式成立:

$$\int_\Omega \varphi(t)\mu_0(\mathrm{d}t) = \int_\Omega \varphi(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_\Omega \varphi(t)\mu_v(\mathrm{d}t) \tag{4}$$

其中扰动部分 $\eta = \int_\Omega \varphi(t)\mu_v(\mathrm{d}t)$ 是 Wiener 积分, 有有限方差, 即

$$E(\eta^2) = \sigma_0^2\int \varphi^2(t)\gamma(t)\mathrm{d}t < +\infty \tag{5}$$

因此, $\varphi \in L_\gamma^2(\Omega)$, 其中 $L_\gamma^2(\Omega)$ 是带权函数 $\gamma(t)$ 的 Hilbert 平方可积函数空间, 是 $L^2(\Omega)$ 的子空间[10, 11]。

事实上, 将 Ω 分割为:

$$\Omega = \bigcup_i \Delta_i;\quad \Delta_i \cap \Delta_j = \hat{o}$$

在不发生混淆的情况下, 仍然用 Δ_i 表示子集 Δ_i 的模, 如面积、体积等。

在式(4)中, 取 $\varphi = \frac{1}{\Delta_i}\chi(\Delta_i, t)$, 其中 $\chi(\Delta_i, t)$ 表示区域 Δ_i 的示性函数, 则得到各个区域上的表达式为:

$$\frac{1}{\Delta_i}\int_{\Delta_i}\mu_0(\mathrm{d}t) = U_{0i} = \frac{1}{\Delta_i}\int_{\Delta_i}u(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\Delta_i}\mu_v(\Delta_i) = \bar{u}_i + v_i^0,\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{6}$$

收稿日期: 2003-11-09。
项目来源: 高等学校博士点专项基金资助项目(2000049802); 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(905276031-11); 测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目((00)0203); 国家自然科学基金资助项目(40074005); 国家测绘局测绘科技发展基金资助项目(20010103)。

显然,当直径 $d(\Delta_i)\to 0$,式(6)回到式(4)。

为了简捷,不妨取权函数 $\gamma\equiv 1$,并从任意集 $\Delta_i=\Delta_i^0$ 开始,分为相等的两部分:

$$\Delta_i^0=\Delta_{i0}^1\cup\Delta_{i1}^1,\ m(\Delta_{ik}^1)=\frac{1}{2}m(\Delta_i^0)\quad(7)$$

相应地,定义 $v_{ik}^1=\dfrac{\mu_v(\Delta_{ik}^1)}{\Delta_{ik}^1}(k=0,1)$,注意到 $\gamma\equiv 1$,则有:

$$\sigma^2(v_i^0)=\frac{\sigma_0^2}{\Delta_i},\ \sigma^2(v_{ik}^1)=\frac{\sigma_0^2}{\Delta_{ik}^1}=2\frac{\sigma_0^2}{\Delta_i}=2\sigma^2(v_i^0)$$

重复以上过程,可以得到 Δ_i 的 2^N 个子集以及相应的噪声,使得:

$$\begin{cases}\Delta_i=\bigcup_{k=0}^{2^N-1}\Delta_{ik}^N,\ m(\Delta_{ik}^N)=\dfrac{1}{2^N}m(\Delta_i^0)\\ \sigma^2(v_{ik}^N)=2^N\sigma^2(v_i^0)\end{cases}\quad(8)$$

如果在每个 Δ_{ik}^N 中选取 t_{ik}^N,记

$$U_{ik}^N=\frac{1}{\Delta_{ik}^N}\int_{\Delta_{ik}^N}u(t)\mathrm{d}t+v_{ik}^N\quad(9)$$

将式(9)两边同乘以 Δ_{ik}^N 和 $\varphi(t_{ik}^N)$,这里 φ 是任意光滑函数,对所有 i 和 k,有:

$$\sum_{ik}\varphi(t_{ik}^N)U_{ik}^N\Delta_{ik}^N=\sum_{ik}\varphi(t_{ik}^N)\int_{\Delta_{ik}^N}u(t)\mathrm{d}t+\sum_{ik}\varphi(t_{ik}^N)\mu_v(\Delta_{ik}^N)\quad(10)$$

显然,式(8)中,当 $N\to\infty$,$d(\Delta_i)\to 0$ 时,

$$\sum_{ik}\varphi(t_{ik}^N)\int_{\Delta_{ik}^N}u(t)\mathrm{d}t\to\int_\Omega\varphi(t)u(t)\mathrm{d}t$$

再由Wiener积分定义得:

$$\sum_{ik}\varphi(t_{ik}^N)\mu_v(\Delta_{ik}^N)\to\int_\Omega\varphi(t)\mu_v(\mathrm{d}t)$$

当 $N\to\infty$,$d(\Delta_i)\to 0$,式(10)的右边收敛于式(4)中相应的项,左边亦然。这一结论至少对光滑函数这个极限是成立的,从而对任意检验函数 $\varphi\in L^2(\Omega)$,可以视式(4)为类型如式(8)的离散观测方程的极限。这一过程可以通过增加观测值的数量,即令 $N\to\infty$,$d(\Delta_i)\to 0$ 来完成。

2 误差讨论

用广义函数的思路来理解,以上讨论是考虑式(6)向式(4)逼近。将式(6)改写,用 $\varphi_i\Delta_i$ 乘第 i 个等式,相加得:

$$\sum U_{0i}\varphi_i\Delta_i=\int_\Omega[\varphi_i\chi(\Delta_i,t)]u(t)\mathrm{d}t+\sum\varphi_i\mu_v(\Delta_i)\quad(11)$$

这相当于在式(4)中用检验函数

$$\varphi(t)=\sum_i\varphi_i\chi(\Delta_i,t)\quad(12)$$

代替原来的检验函数得到的结果。由式(4)知,如果忽略误差,将 $\int_\Omega\varphi(t)\mu_0(\mathrm{d}t)$ 理解为 u 在任何一个检验函数 φ 上的投影,并且由此可以估计 u。若要投影"足够大",则只要当 u 中和 φ 正交的分量的范数远远小于总范数即可实现。同时由式(11),若用观测 U_{0i} 取代 μ_0,便可获得 u 在 φ 方向上投影的所有相关信息。

具体地说,顾及Wiener积分 $Ju=\int_\Omega u(t)\mathrm{d}t$,设 $P=\sum\dfrac{1}{\Delta_i}\chi(\Delta_i,t)(\chi(\Delta_i,*),*)_2$ 是在$\{\varphi\}$上的投影算子,于是有[10,11]:

$$\|(J-P)u\|\ll\|u\|\quad(13)$$

而

$$\|(J-P)u\|^2=\sum_i\int_{\Delta_i}[u(t)-\bar{u}_i]^2\mathrm{d}t\quad(14)$$

若记:

$$\sigma_{\Delta_i}^2[u]=\frac{1}{\Delta_i}\int[u(t)-\bar{u}_i]^2\mathrm{d}t\approx\nabla u(\theta_i)^+C_i\nabla u(\theta_i)$$

$$C_i=\frac{1}{\Delta_i}\int(t-\theta_i)(t-\theta_i)^+\mathrm{d}t$$

$$\theta_i=\frac{1}{\Delta_i}\int_{\Delta_i}t\mathrm{d}t\quad(15)$$

也就是 t 在 Δ_i 上服从均匀分布时 $u(t)$ 的方差,则式(14)可化为:

$$\|(J-P)u\|^2\approx\sum_i\sigma_{\Delta_i}^2[u]\Delta_i\approx\int\sigma_{\Delta_i}^2[u]\mathrm{d}t\quad(16)$$

这就是误差的最终估计式。可见,误差的估值仅与区域方差的积分有关。

3 结 语

本文提出的方法能有效地处理重力学边值问题,特别是超定边值问题[12,13]或固定重力边值问题[8]。如把边界 Ω(地球表面)进行正方形分割,其相应的形状因子是 $H=\Delta/12$,再根据式(13)即可得到相应的估计式为:

$$H\cdot\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}t\ll\int_\Omega u^2\mathrm{d}t\quad(17)$$

参 考 文 献

1 莫里兹H. 高等物理大地测量. 宁津生,管泽霖译. 北京:测绘出版社,1984

2 朱灼文,许厚泽. 顾及局部地形效应的离散型外部边

值问题. 中国科学(B 辑), 1985(2): 185～192
3 朱灼文. 椭球情况的换置. 中国科学(B 辑), 1986(3): 328～336
4 朱灼文. 统一引力场表示理论. 中国科学(B 辑), 1987(12): 1 348～1 356
5 朱灼文, 操华胜. 重力学内部边值问题及其应用. 中国科学(B 辑), 1990(1): 208～217
6 于锦海, 朱灼文. 扰动位混合边值问题的适定性和估计理论. 科学通报, 1995(2): 154～157
7 Sanso F, Rummel R. Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid. New York: Springer, 1997
8 于锦海, 朱灼文. 非线性固定重力边值问题. 中国科学(B 辑), 1994(3): 294～302
9 于锦海, 朱灼文, 操华胜. 部分边界固定的自由边值问题. 科学通报, 1995(14): 1 301～1 303
10 吉田耕作. 泛函分析. 吴元恺译. 北京: 人民教育出版社, 1980
11 李大华. 应用泛函简明教程. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999
12 Sanso F. The Wiener Integral and the Overdetermined Boundary Value Problems of the Physical Geodesy. Manuscripta Geodaetica, 1988, 13: 75～98
13 朱灼文, 于锦海. 超定大地边值问题的准解. 中国科学(B 辑), 1992(1): 103～112

第一作者简介: 邓波, 讲师, 博士生。研究方向: 随机大地边值问题理论。

A Continuous Data Stochastic Model of Gravimetry Boundary Value Problems

DENG Bo[1]　*ZHU Zhuowen*[1]　*LU Zhong*[2]

(1　Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulan Road, Hong Kong)

Abstract: This paper tries to develop the theory of advanced GBVPs. It gives a stochastic model for processing the GBVP with continuous observation data, and establishes the continuous observation equation. And it can be found out that the error is dependent upon its range variance only.

Key words: gravimetry boundary value problem; general function; continuous observation; Wiener integer

About the first author: DENG Bo, lecturer, Ph. D candidate, engaged in the research on the theory of stochastic geodetic boundary value.

(责任编辑:　平子)