DOI:10.13203/j.whugis2004.08.012
第29卷 第8期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 29 No. 8
2004年8月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Aug. 2004

文章编号:1671-8860(2004)08-0708-03 文献标识码:A

基于同伦法的非线性最小二乘平差统一模型

张 勤[1] 陶本藻[2]

(1 长安大学地质工程与测绘工程学院,西安市雁塔路126号,710054)
(2 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路129号,430079)

摘 要:基于非线性同伦思想,提出了非线性同伦最小二乘平差统一模型,该方法既可适用于满秩网非线性最小二乘平差,也可适用于秩亏网非线性最小二乘平差。算例表明,对于精度较差的初始值,算法仍能精确地收敛到原方程的参数估值。

关键词:非线性最小二乘;同伦算法;非线性同伦模型;平差统一模型
中图法分类号:P207.2

1 非线性秩亏最小二乘平差

在非线性最小二乘的求解问题中,常常会遇到由于某些原因而导致方程组系数向量相关,不能直接由最小二乘求得方程的解。在测量平差问题中,往往由于缺少必要的基准条件而使平差问题秩亏。对于秩亏自由网,由最小二乘法无法获得问题的惟一解。对于非线性秩亏平差问题,通常所采用的方法之一是将其按台劳公式展开,成为近似的线性化平差模型,并在平差中引入下列最小范数条件求得惟一解:

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_x \hat{x} = \min \tag{1}$$

或基准条件:

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_x \hat{x} = 0 \tag{2}$$

两种条件下所求得的解相同,均为最小二乘最小范数解。基本求解方法为:设有非线性误差方程组:

$$\boldsymbol{V} = f(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y} \tag{3}$$

将非线性方程在近似值 $\boldsymbol{X}^0$ 处按台劳公式线性化展开得:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}_{X^0} \hat{x} - \boldsymbol{l} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{B}_{X^0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X=X^0}$;$\hat{x} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0$;$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{Y} - f(\boldsymbol{X}^0)$

根据最小二乘和最小范数条件(1)(基准条件(2)),可得相应的法方程式为:

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}_x \boldsymbol{G} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_x) \hat{x} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{l} = 0 \tag{5}$$

则方程的最小二乘最小范数解为:

$$\hat{x} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}_x \boldsymbol{G} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_x)^{-1} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{l} \tag{6}$$

非线性秩亏自由网平差也可采用阻尼最小二乘法求解,其主要思想为:通过给秩亏的法方程系数阵主对角线上的每个元素均加上任意一个大于零的常数,即($\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} + \alpha \boldsymbol{I}$),其中,$\alpha$ 为大于零的常数,称为阻尼因子。显然,引进阻尼因子后,总可使矩阵($\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} + \alpha \boldsymbol{I}$)具有对称正定的性质,从而达到消除秩亏的目的。阻尼最小二乘的迭代公式为:

$$\hat{x}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k + (\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B}_k + \alpha_k \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{l}_k \tag{7}$$

由以上可以看出,对于线性或是非线性秩亏平差问题,均需要采用一定的处理方法。本文提出了一种基于同伦法的非线性最小二乘的平差统一模型,对满秩的非线性问题还是对秩亏的非线性问题均可统一适用,称为基于同伦法的非线性最小二乘平差统一模型。同伦算法的基本思想和具体实施见文献[1,2]。

2 非线性同伦最小二乘平差

在平差中,对 n 个带有随机观测误差(ε)的观测值 $\boldsymbol{Y}$,其与未知参数 $\boldsymbol{X}$ 间存在非线性关系:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{Y}} = f(\boldsymbol{X}) + \varepsilon \tag{8}$$

相应的误差方程式为:

$$\boldsymbol{V} = f(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y} \tag{9}$$

收稿日期:2004-04-13。
项目来源:地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(02-09-01)。

按最小二乘法, 其准则为残差加权平方和最小, 即

$$V^{T}PV=(f(X)-Y)^{T}\cdot P(f(X)-Y)=\min \quad (10)$$

文献[2, 3] 中已将解非线性问题的同伦数值方法引入到式(10)的非线性最小二乘中, 推导出同伦非线性最小二乘平差模型。其基本思想是将式(10)的非线性最小二乘解 X 应满足的一个正交性条件方程

$$\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X}=2\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X}P(f(X)-Y)=0 \quad (11)$$

视为问题的基本非线性方程, 并令

$$F(X)=\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X}^{T}P(f(X)-Y)=0 \quad (12)$$

按照同伦思想, 对 $F(X)$构成同伦函数:

$$H(t,X)=t(X-a)+(1-t)F(X) \quad (13)$$

对 H 求一阶偏导数:

$$\frac{\partial H}{\partial(t,X)}=[X-a-F(X)]\frac{\partial t}{\partial S}+\left[tI+(1-t)\frac{\partial F}{\partial X}\right]\frac{\partial X}{\partial S}=0 \quad (14)$$

式中,

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X}^{T}P\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X}+\left.\frac{\partial^{2}f}{\partial X^{2}}\right|_{X=X}P(f(X)-Y) \quad (15)$$

将式(12)和式(15)代入微分方程(14), 有初值微分方程的一般表示式:

$$\begin{cases}[X_k-a-B_k^{T}Pl_k]t'+[t_kI+(1-t_k)\cdot(B_k^{T}PB_k+G_k^{T}Pl_k)]X'=0 \\ (t,X)=(t_k,X_k),\ k=0,1,\cdots\end{cases} \quad (16)$$

式中, $B_k^{T}=\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X_k}^{T}$为$f(X)$在 $X=X_k$的 Jacobi 矩阵; $G_k^{T}=\left.\frac{\partial^{2}f}{\partial X^{2}}\right|_{X=X_k}^{T}$为 $f(X)$在 $X=X_k$ 的 Hessen 矩阵; $l_k=f(X_k)-Y$ 为方程(9)在 $X=X_k$的近似值; I 为单位矩阵。

根据解微分方程初值的预估-校正法, 对同伦非线性最小二乘模型(16)求解, 从 $t=1$、$X=a$ 的端点开始, 跟踪曲线 $\lambda(s)$, 直至其收敛到 $t=0$、$F(X^{*})=0$曲线的另一端点, 从而获得满足非线性最小二乘的非线性方程解。该非线性最小二乘方法通常具有大范围收敛, 且不用泰勒级数展开, 而是通过用求微分方程初值的方法求解。

3　同伦非线性秩亏自由网平差

同伦非线性最小二乘无论对满秩还是秩亏问题均可以采用统一的数学模型(16)及其处理方法, 这是因为在同伦算法中, 只要 0 是映射 H_a 和 ∂H_a 的正则值, 则 H'_a 的秩为n, 即 H'_a 为行满秩矩阵, 因此, 无论 0 是否为 F 的正则值, 均可用数值方法求 H 的零解。

因此, 非线性最小二乘极值方程(12)为:

$$F(X)=\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=X}^{T}P(f(X)-Y)=B_X^{T}Pl=0$$

它的一阶导数系数阵的秩为 $R(\underset{m\times n}{B_X})=u\leqslant n$。由其构成的同伦非线性最小二乘方程(13)的求解, 是通过对微分方程初值问题的求解实现的, 即对

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial(t,x)}=(x-a-B^{T}Pl)t'+[tI+(1-t)(B^{T}PB+G^{T}Pl)]X'=0 \\ (t,x)=(1,a)\end{cases} \quad (17)$$

求解微分方程, 令

$$\underset{n\times(n+1)}{A}=[x-a-B^{T}Pl,\ tI+(1-t)(B^{T}PB+G^{T}Pl)]$$

为方程的系数阵, 其中 $R(B^{T}PB+G^{T}Pl)=u$; $t\in[0\quad 1]$, 由于同伦算法是通过跟踪(0, 1)的曲线至 $t\to 0^{+}$时, 获得原方程的解。因此, 无论是 $u=n$(满秩)或 $u<n$ (秩亏), $R(tI+(1-t)(B^{T}PB+G^{T}Pl))=n$ 总是满秩矩阵, 即$R(\underset{n\times(n+1)}{A})=n$ 为行满秩阵, 均可以采用统一的算法对微分方程进行求解。

采用式(16)的同伦非线性最小二乘模型对如图 1 所示的秩亏自由网进行平差。

算例　在图 1 所示的测边网中, 同精度观测边长 $l_1\sim l_{11}$, 取两组不同的近似值(表 1), 其中第二组近似值中, P_1 点的近似值 $x_{P_1}^{0}$与正确值相差 2.1m, $y_{P_1}^{0}$与正确值相差 0.8mm, 分别采用同伦非线性最小二乘法和线性化最小二乘最小范数法对该网进行平差, 结果见表 1。

由表 1 可以看出, 当近似值取值较接近真值时, 采用线性化最小二乘秩亏自由网平差和同伦非线性最小二乘法进行平差, 其结果和精度均相同; 而当近似值取值精度较差时, 由非线性同伦最小二乘求出的平差值保持精度不变, 采用线性化最小二乘秩亏自由网平差($M_0=5.36$mm), 其求解精度大大降低。

如图 1 所示, P_5、P_6 为已知点, 对于这个满秩网平差问题, 文献[2] 采用与本文完全相同的同伦非线性最小二乘方程(13)进行平差, 获得了较线性化经典最小二乘精度更好的平差结果, 特别是对近似值取值精度较差的情况。

表1　秩亏自由网平差

Tab. 1　Adjustment of the Rank Defect Freedom Network

点号	坐标	近似值/m	同伦最小二乘/m	线性化最小二乘/m	近似值/m	同伦最小二乘/m	线性化最小二乘/m
P_1	X	9 034.161	9 034.165 8	9 034.165 8	9 036.261	9 034.262 7	9 034.263 9
	Y	907.526	907.524 2	907.524 2	908.364	907.698 8	907.695 3
P_2	X	8 762.941	8 762.945 8	8 762.945 8	8 762.941	8 763.014 6	8 763.014 3
	Y	1 124.473	1 124.471 6	1 124.471 6	1 124.423	1 124.610 9	1 124.612 4
P_3	X	9 221.070	9 221.056 4	9 221.056 4	9 221.070	9 221.140 2	9 221.139 5
	Y	1 008.480	1 008.485 6	1 008.485 5	1 008.400	1 008.684 5	1 008.685 1
P_4	X	9 031.110	9 031.115 5	9 031.115 6	9 031.070	9 031.155 6	9 031.155 6
	Y	1 345.340	1 345.339 9	1 345.339 9	1 345.250	1 345.514 0	1 345.515 4
P_5	X	8 434.880	8 434.880 1	8 434.880 1	8 434.880	8 434.941 0	8 434.940 6
	Y	1 184.710	1 184.709 4	1 184.709 5	1 184.710	1 184.806 5	1 184.806 2
P_6	X	8 724.639 0	8 724.637 4	8 724.637 4	8 724.639	8 724.746 9	8 724.747 0
	Y	809.720	809.718 0	809.718 0	809.720	809.852 3	809.852 6
精度	$V^{T}V$		7.870 7	7.870 9		7.870 8	57.527 2
指标/mm	M_0		1.983 8	1.893 8		1.983 8	5.363 2

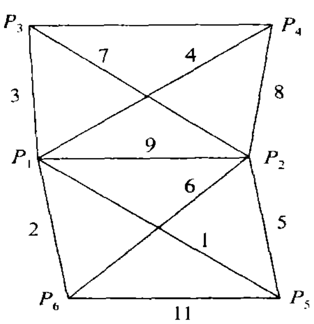

图1　秩亏网

Fig. 1　Rank Defect Network

参　考　文　献

1　王则柯, 高堂安. 同伦方法引论. 重庆: 重庆出版社, 1990

2　陶本藻, 张　勤. GPS 非线性数据处理的同伦最小二乘模型. 武汉大学学报·信息科学版, 2003, 28(特刊): 115～118

3　张　勤. 非线性最小二乘理论及其在 GPS 定位中应用研究: [博士论文]. 武汉: 武汉大学, 2002

4　韦博成. 近代非线性回归分析. 南京: 东南大学出版社, 1989

5　Dermanis A, Sansó F. Nonlinear Estimation Problems for Nonlinear Models. Manuscripa Geodatica, 1995 (20): 110～122

第一作者简介: 张勤, 教授, 博士生导师。现主要从事空间大地测量、变形监测及数据处理方面的研究。

E-mail: zhang-qin-Le@263.net.cn

Uniform Model of Nonlinear Least Squares Adjustment Based on Homotopy Method

ZHANG Qin[1]　　TAO Benzao[2]

(1　Institute of Geology-Engineering and Geomatics, Chang' an University, 126 Yanta Road, Xi' an 710054, China)

(2　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: On the basis of the homotopy arithmetic, this paper puts forward a uniform model of nonlinear least square (LS) adjustment, which can be used not only for the nonlinear LS adjustment of the rank defect problems, but also for that of the rank full problems. For the initial value with later precision, it is shown by the actual nonlinear function examples that we can still get the precise original solutions by homotopy nonlinear LS method.

Key words: nonlinear LS; homotopy arithmetic; nonlinear homotopy model; uniform model of adjustment

About the first author: ZHANG Qin, professor, Ph. D supervisor. His research orientation is data processing.

E-mail: zhang-qin-Le@263.net.cn

(责任编辑:　光阳)