

GPS 高程拟合系统的研究*

徐绍铨 李振洪 吴云孙

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘要 阐述了 GPS 高程异常拟合系统(GANHIS)的总体结构设计和数学模型,论述了实现 GPS 高程异常拟合的关键技术,得出了一些有益的结论。

关键词 GPS 水准;正常高;高程异常;高程拟合

分类号 P228.4;P224

地面上一点 A 的大地高 H_{Ag} 与正常高 H_r 之间的关系为:

$$H_r = H_{Ag} - \xi \quad (1)$$

式中, ξ 为高程异常, 表示参考椭球面与似大地水准面之间的高程差。

经过 GPS 网的三维平差, 可获得各点的大地高 H_{Ag} , 如果在其中一些点上同时进行水准测量(即已知该点的正常高 H_r), 则该点的高程异常可按下式求出:

$$\xi = H_{Ag} - H_r \quad (2)$$

在一局部 GPS 网中, 由若干个点的 ξ 作为已知值, 用数值拟合方法内插出其他 GPS 测点的高程异常, 按式(1)可求得各点的正常高。

但是, 目前国内外应用 GPS 定位技术建立各类控制网时, 绝大多数仅仅局限于解决平面坐标, 高程仍沿用常规的几何水准测量方法来测定。如何充分利用 GPS 观测中提供的高程信息, 直接为测绘生产服务, 是一项很有意义的工作。

1 GANHIS 的总体设计

系统的数据流程图如图 1 所示。

2 GPS 高程拟合数学模型

数值拟合数学模型很多, 考虑到模型的通用性、实用性以及计算实现的方便性, GANHIS (GPS abnormal height interpolation system) 系统采用了较为常用的 6 种模型:多项式曲线拟合、三次样条曲线拟合、Akima 曲线拟合、多项式曲面拟合、多面函数法曲面拟合和移动法曲面拟合。前

3 种属曲线拟合, 仅当 GPS 点布设成测线时采用; 后 3 种属于曲面拟合, 当 GPS 测点布设成网状时采用。

2.1 多项式曲线拟合

设测点的 ξ_i 和 x_i (y_i 或拟合坐标) 存在如下函数关系:

$$\xi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (3)$$

在使节点处的残差 $R_i = \xi_i(x_i) - \xi_i$ 平方和为最小的条件下解出式(3)中的各系数, 即可按式(3)求出测线方向(或方向线左右)任一点的高程异常 ξ 值。

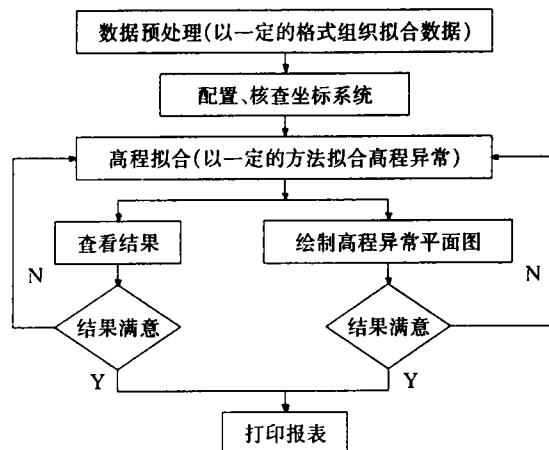


图 1 系统数据流程图
Fig. 1 The Data Flow Diagram of the System

2.2 三次样条曲线拟合

当测线过长, 已知点较多时, 如果进行整体拟合, 精度较低, 若分段拟合计算, 则分段点上将不连续, 也影响拟合精度, 这时宜用三次样条曲线拟合。

设测线过 n 个测点, ξ_i 和 x_i (y_i 或拟合坐标) 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 存在如下

收稿日期: 1999-02-03. 徐绍铨, 男, 58 岁, 教授, 现从事 GPS 定位技术研究。

* 国家自然科学基金资助项目, 编号 49274193。

三次样条函数关系:

$$\xi(x) = \xi(x_i) + (x - x_i)\xi(x_i, x_{i+1}) + (x - x_i)(x - x_{i+1})\xi(x, x_i, x_{i+1}) \quad (4)$$

式中, x 为待求点坐标; x_i, x_{i+1} 为待求点两端已知点的坐标; $\xi(x_i, x_{i+1})$ 为一阶差熵; $\xi(x, x_i, x_{i+1})$ 为二阶差熵, 利用一定的数学技巧即可求得^[8]。然后, 按式(4)可求出各插值点的高程异常 ξ 值。

2.3 Akima 法曲线拟合

用 Akima 法进行曲线拟合, 在两个已知点间内插时, 还需用两个已知点外两点, 其目的是使曲线光滑, 函数连续。

设给定 n 个不等距 GPS 测点为 $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ (或 $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$), 相应的高程异常值为 $\xi_i (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 。

若在子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-2$) 上两个端点处满足以下 4 个条件:

$$\begin{cases} \xi_k = f(x_k) \\ \xi_{k+1} = f(x_{k+1}) \\ \xi'_k = g_k \\ \xi'_{k+1} = g_{k+1} \end{cases} \quad (5)$$

式中, g_k, g_{k+1} 可由 Akima 条件惟一确定。则在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-2$) 上可以惟一地确定一个三次多项式:

$$s(x) = s_0 + s_1(x - x_k) + s_2(x - x_k)^2 + s_3(x - x_k)^3 \quad (6)$$

由式(6)即可计算该子区间插值点 t 处的高程异常 ξ 值。

2.4 多项式曲面拟合

当 GPS 测点布成网状时, 应用曲面拟合。设测点的 ξ_i 和 x_i, y_i 存在如下函数关系:

$$\xi_i = f(x_i, y_i) + \epsilon_i \quad (7)$$

式中, $f(x, y)$ 为趋势值; ϵ_i 为误差。

可选用以下空间曲面表达式:

$$f(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3 + \dots \quad (8)$$

对于每一个已知点, 都可列出以上方程, 在 $\sum \epsilon^2 = \min$ 条件下, 解出 b_i , 再按式(8)求出待求点的高程异常 ξ 值。

2.5 多面函数曲面拟合

多面函数法的基本思想是: 任何数学表面和任何不规则的圆滑表面, 总可用一系列有规则的数学表面的总和以任意精度逼近。

设 GPS 测点 ξ 和 x, y 存在如下函数关系:

$$\xi = f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i Q(x, y, x_i, y_i) \quad (9)$$

式中, a_i 为待定系数; x, y 为待求点的坐标; x_i, y_i 为已知点的坐标; $Q(x, y, x_i, y_i)$ 是 x, y 的二次核函数。

一般选用 $Q(x, y, x_i, y_i) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta]^{-1/2}$ 作为核函数, 其中, 光滑系数 δ 常取 1。

先由已知点求得 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 再推算测点 p 的高程异常 ξ_p :

$$\xi_p = Q_p a = Q_p Q^{-1} \xi \quad (10)$$

2.6 移动法曲面拟合

移动法曲面拟合属于点逼近曲面拟合。移动法最大的特点是: 引进了权函数, 根据内插点到数据点的距离给出了不同的影响程度, 两点越近, 影响越大。

移动法在计算时, 通常采用切比雪夫多项式为移动多项式。设 GPS 测点 ξ 和 x, y 存在如下函数关系:

$$\xi(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} T_i(x) T_j(y) \quad (11)$$

式中, a_{ij} 为拟合系数; $T_i(x), T_j(y)$ 为变量, 分别为 x 和 y 的 M 和 N 次切比雪夫多项式^[8]。

权函数可选取 $P(d) = \exp(-d^2/a^2)$, 其中, a 为常数, 一般宜取数据点平均间距的两倍; d 为内插点到数据点间的距离。

当观测值个数 $k > M \times N$ 时, 可组成误差方程, 解之可得拟合系数 a_{ij} , 再利用内插点平面坐标 x, y 回代, 即可获得内插点的高程异常 ξ 值。

3 系统实现的关键技术

3.1 坐标旋转

曲线拟合应用有一个限制, 即仅当 GPS 点布设成测线时, 才可应用。如果按 GPS 网平差后提供的点位坐标(B, L, H, X, Y, Z 或 x, y, H), 直接在 B 或 L (x 或 y)方向上进行拟合, 拟合精度就很难保证。因为在实际情况中, 曲线往往与 B 或 L (x 或 y)方向不一致, 有一定的夹角。因此, 为提高拟合精度, 应在拟合前进行坐标旋转。如图 2 所示, 旋转 α 角, 将所有点的平面坐标 xy 坐标转换成 $x'y'$ 坐标, 使得 x' 方向与曲线走向吻合最优, 然后利用 x' 和 H 进行曲线拟合。

3.2 地形改正

在地势平坦地区, 利用 GPS 高程拟合方法可达到 IV 等, 部分地区甚至可达到 III 等的精度要求, 但在地势起伏较大的地区, 精度却难以保证。目前可采用地形图或数字化的地貌模型来获取格网

化的高程数据,但工作量较大。GANHIS 利用非格网 GPS 水准点的数据实现地形改正,方便易行,降低了工作量。

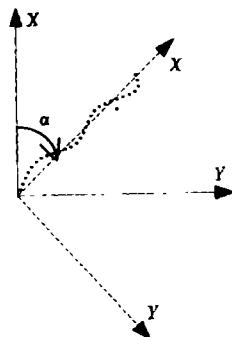


图 2 坐标旋转

Fig. 2 The Rotation of Coordinate

国内外许多资料表明,高程异常中的短波项主要由局部地形起伏引起,地势平缓地区,高程异常变化比较平稳,而在地形起伏较大的地区,高程异常变化剧烈,表现出明显的短波性质。因此,不妨假设某点高程异常由两部分组成:

$$\xi = \xi_0 + \xi_r \quad (12)$$

式中, ξ_0 为高程异常的中长波项(平滑项); ξ_r 为高程异常的短波项,即局部地形起伏对高程异常的影响。在平原地区, ξ_r 很小,可以忽略不计,在山区, ξ_r 却不可忽略。

结合式(12),由莫落金斯基公式可导出:

$$T = T_0 + T_r$$

式中, T 为地面点的扰动位; T_0 为长波项,是主项; T_r 为短波项,是由局部地形引起扰动位的影响。根据位理论知:

$$T_r = GM/r$$

式中, r 为积分元到地面点的距离; G 为万有引力常数; M 为积分主体质量。可导出近似计算公式^[6]:

$$T_r = G\rho \iint_D [(h - h_r)/r_0] d\sigma - \frac{G\rho}{6} \iint_D [(h - h_r)^3/r_0^3] d\sigma \quad (13)$$

式中, r_0 为积分主体到地面点的距离; ρ 为质量密度; h_r 为参考面(平均高程面)高程。

地形改正的具体计算方法是:①扩展 GPS 网测区,并进行 $1\text{km} \times 1\text{km}$ 格网化,求出各格网点的坐标;②利用内插法求出非 GPS 点的各格网点的近似大地高;③根据测区情况,适当选定积分范围,求出各格网点地形起伏对某地面点扰动位的影响值,然后叠加,即可求出某区域地形起伏对该

点扰动位的影响值,再按莫落金斯基公式可求出地形改正值。

利用非格网 GPS 测点考虑地形改正,为了减少内插误差,建议 GPS 水准点布设相对均匀,且满足一定的数量,网形最好近似为正方形。

3.3 GPS 水准点的可靠性检验

由于生产实际情况复杂,GPS 水准点往往等级不同,施测年代、平差精度、沉降情况不同,有的还受到某种程度的破坏,加之联测的粗差,因此必须对测区内联测几何水准点的可靠性进行检验。

可靠性检验有多种方法可供选择,其中狄克松(Dixon)判别法^[9]最为直观,对探测单个粗差也很有效。

如果样本中存在多个粗差,尤其是在均值的同侧出现很接近的两个或两个以上的异常值时,狄克松判别法就不易检出,容易出现粗差“遮蔽”现象。这时,可采用“狄克松统计量检测多个粗差”方法^[9]。

3.4 精度评定

为了能客观地评定 GPS 水准计算的精度,在布设几何水准联测点时,应适当多联测几个点,其点位也应均匀地布设全网,以作外部检核用。

1) 内符合精度。根据参与拟合计算已知点的高程异常 ξ_i 与拟合高程异常 ξ'_i ,求出拟合残差 $V_i = \xi'_i - \xi_i$,然后按下式可计算出 GPS 水准拟合计算的内符合精度 μ (设参与拟合的已知点共有 n 个):

$$\mu = \pm \sqrt{[VV]/(n-1)} \quad (14)$$

2) 外符合精度。根据检核点的高程异常 ξ_i 与拟合高程异常 ξ'_i ,求出拟合残差 $V_i = \xi'_i - \xi_i$,然后按式(14)可计算出 GPS 水准拟合计算的外符合精度 μ (设检核点共有 n 个)。

3) 精度评定。把检核点的拟合残差与相应等级的水准测量限差相比较,分析 GPS 水准所能达到的精度。

3.5 高程异常等值线的绘制

由于测区中 GPS 测点往往分布不均,没有特定的规则可言,这就对高程异常等值线的绘制提出了特殊的要求。其具体实现步骤如下:① 在获得最佳三角形的条件下,自动将 GPS 测点联结成三角形网,最佳条件是在使用周围邻近的 GPS 测点组成三角网时,尽可能确保每个三角形都是锐角三角形,或三角形三边的边长近似相等,避免出现过大或过小的锐角;② 在三角形边上内插等值点;③ 按一定的规则搜索、追踪等值线;④ 注记等值线;⑤ 缩放等值线。

4 实际算例

乌鲁木齐市 GPS 控制网共 126 个点, 测区地势为西南高, 东北低, 西南最高点海拔有 1 391m, 东部最低点海拔只有 578m。进行 GPS 高程拟合时, 采用多项式曲面拟合和移动法曲面拟合两种方案, 结果列于表 1。

从表 1 可知, 无论是多项式曲面拟合, 还是移

动法曲面拟合, 完全满足 IV 等几何水准的精度要求, 其中, 多项式曲面拟合的结果已投入生产实际应用。

5 结 论

1) 在局部 GPS 网中, 如果布设合理, 利用一些 GPS 水准点求得高程异常, 进而拟合出其他点的正常高, 可达到 IV 等几何水准的精度要求。

表 1 多项式拟合结果与移动法拟合结果

Tab. 1 The Results of Polynomial Interpolation and Mobile Interpolation

点名	ξ/m	多项式曲面拟合		移动法曲面拟合	
		ξ_p/m	$\Delta\xi/mm$	ξ_m/m	$\Delta\xi/mm$
已知点	2	-61.549 0	-61.550 4	-61.550 3	-1.3
	9	-61.682 0	-61.683 1	-61.683 2	-1.2
	16	-60.166 0	-60.167 1	-60.166 9	-0.9
	21	-60.122 0	-60.122 4	-60.122 8	-0.8
	24	-60.688 0	-60.689 1	-60.689 1	-1.1
	33	-59.872 0	-59.873 1	-59.873 0	-1.0
	34	-60.216 0	-60.216 3	-60.216 1	-0.1
	56	-60.123 0	-60.123 5	-60.123 7	-0.7
	60	-59.786 0	-59.786 8	-59.786 7	-0.7
	63	-59.514 0	-59.513 5	-59.513 5	+0.5
内符合精度			0.95		0.94
	75	-58.793 0	-58.795 2	-58.791 2	+1.8
	77	-58.544 0	-58.547 6	-58.541 7	+2.3
	94	-58.523 0	-58.525 3	-58.521 2	+1.8
	99	-58.680 0	-58.681 0	-58.680 4	-0.4
	104	-58.078 0	-58.080 5	-58.076 1	+1.9
	111	-57.553 0	-57.556 7	-57.550 0	+3.0
	113	-57.372 0	-57.378 3	-57.363 6	+8.4
			±3.74		±3.98

注: 最小平均距离为 12.42km; IV 等水准限差为 ±70.50mm。

2) GANHIS 系统提供了多种拟合模型, 各模型的拟合结果可相互校核。从算例可看出, 多项式曲面拟合模型与移动法曲面拟合模型的拟合精度相当。

参 考 文 献

- 徐绍铨.GPS水准的试验和研究.工程勘察,1994(3)
- 徐绍铨,李征航.拟合法求定 GPS 点的正常高.武汉测绘科技,1992(1)
- 徐绍铨.GPS 水准精度探讨.见:大气折射研究专集.武汉:武汉测绘科技大学出版社,1992
- 陶本藻.GPS 水准近似大地水准面拟合和正常高计算.测绘通报,1992(4)
- 李征航.GPS 测高精度的研究.测绘通报,1992(3)
- 兰虎彪.GPS 网正常高求解方法的研究:[学位论文].武汉:武汉测绘科技大学,1992
- 王来生,鞠时光,郭铁雄,等.大比例尺地形图机助绘图算法及程序.北京:测绘出版社,1992
- 徐士良.C 常用算法程序集.北京:清华大学出版社,1997
- 张方仁,张金通.测量误差的统计分布和检验.北京:中国计量出版社,1991

Research of GPS Abnormal Height Interpolation System

Xu Shaoquan Li Zhenhong Wu Yunsun

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract As we know, global positioning system (GPS) can be used to get precise relative position in a three-dimensional system. The results of many field-tests and applied projects have already shown that, GPS survey method can take the place of classical horizontal terrain survey method. But how to interpolate the abnormal height of GPS leveling, so as to take the place of classical leveling survey method, has attracted many geodesists in the past ten years. Up to now, a lot of methods have been discussed and applied.

According to the development of GPS height abnormal height interpolation system (GANHIS), this paper discusses some mathematical models and the key techniques of GPS leveling. Firstly, the general design of GANHIS is illustrated with DFD (data flow diagram). Secondly, the mathematical models of GANHIS, including the polynomial curve interpolation method, the three-spline curve interpolation method, the curve interpolation of Akima method, the polynomial curved surface interpolation method, the multidimensional function curved surface interpolation method, the motion curved surface interpolation method, etc. are presented in brief. The characteristics of each method are offered as the mathematical expression.

In succession, the key techniques of implementation GANHIS are stated briefly:

- 1) To adopt the rotation of coordinates to ensure the precision of curve interpolation methods;
- 2) To adopt the correction of terrain to ensure the precision of curved surface interpolation methods in mountainous areas, and its calculation, method is provided;
- 3) To adopt the reliability testing of GPS bench marks to exclude blunders;
- 4) The method of assessing precision is provided;
- 5) The method of protracting the isoline of GPS normal height is introduced.

GANHIS has come into use since 1998. In this paper, an application example is given, and it is proved that the result is good: both the internal precision and the outside precision are superior to the limit error of IV-order leveling. Finally, some significant conclusions are drawn: ① For local GPS net, if the design of GPS net is reasonable, we can achieve IV-order leveling precision with GPS leveling method. ② GANHIS provides lots of interpolation models, so we can verify the interpolation result with different methods. The example in the paper proves that the precision of the polynomial curved surface interpolation method is approximate to that of the motion curved surface interpolation method. ③ GANHIS has not only prominent economic benefit, but also important application and popularization value.

Key words GPS leveling; normal height; abnormal height; height interpolation