DOI:10.13203/j.whugis1999.01.011
第 24 卷第 1 期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 24 No. 1
1999 年 3 月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping March 1999

Poisson 重力边值问题*

操华胜　朱灼文　于锦海

（武汉测绘科技大学地学测量工程学院，武汉市珞喻路 129 号，430079）

摘　要　提出了 Poisson 重力边值问题，即关于扰动位的 Poisson 方程的 Stokes 问题和 Neumann 问题。作为导引，先研究 Poisson 方程的 Dirichlet 问题，再分别引入一种辅助函数，将 Stokes 问题和 Neumann 问题改化为 Dirichlet 问题，从而立即得到它们的积分解。最终解式表现为两部分叠加：一部分仅与边界观测相关，另一部分为对地形测量的响应，为研究地形测量对外部重力场和大地水准面的精化提供新的途径。

关键词　Possion 重力边值问题；Green 函数；扰动位

分类号　P223；P312.1

大地水准面概念作为研究地球形状的基准一直被人们所接受[1~5]，确定该面的方法以 Stokes 理论最为著名且被广泛使用，但 Stokes 理论要求大地水准面外部没有质量存在的假设不符合地球的实际情况。Molodensky 为避免质量调整提出了似大地水准面的概念及其理论，该理论对确定地球表面及其外部重力场带来了优越性，但对地表内部特别是大地水准面的研究显得较为薄弱。事实上，Molodensky 理论对大地水准面的确定能力并不比 Stokes 理论逊色。

为了寻求一种对地球外部重力场和大地水准面均有良好表示能力的方法，本文拟仿照 Molodensky 理论中不改变地球质量的做法和 Stokes 理论以正常椭球面（规则形状）为边界面的习惯，依照扰动位在全空间满足 Poisson 方程和利用物理大地测量基本边界关系求解 Poisson 重力边值问题，并给出具体计算公式。

遵循物理大地测量学传统，将地球重力场分为正常重力场与扰动重力场之和。那么，扰动位 T 在地球体外正则调和，而在正常椭球体外的地球内部满足方程：

$$\Delta T = -4\pi k\rho$$

式中，k 为万有引力常数；ρ 为地球体密度函数。记 Σ 为椭球体外部区域；τ 为椭球体外的地球内部区域；S_0 为地球表面；S 为椭球面，如图 1 所示。若选取正常椭球的总质量等于实际地球的总质量，椭球中心与地球质心重合，于是物理大地测量的重力边值问题的提法实际上应为：

$$\Delta T(P) = F(P) = \begin{cases} 0, P \in \Sigma\backslash\tau \\ -4\pi k\rho, P \in \tau \end{cases} \quad P \in \Sigma \tag{1}$$

$$LT(P)|_S = f(P) = -\Delta g, P \in S \tag{2}$$

$$\lim_{P\to\infty}(r_P^2 T(P)) = 0, P \to \infty \tag{3}$$

式中，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 是 Laplace 算子；$L = \partial/\partial h - (1/\gamma)(\partial\gamma/\partial h)$ 为 Stokes 边界算子；重力异常 $\Delta g = g_P - r_Q$ 为边界 S 上的已知函数；g_P 是大地水准面上的实际重力；r_Q 是正常椭球面上的正常重力。这就是关于扰动位 T 所满足的 Poisson 方程 Stokes 边界条件的外问题[7,8]，或简称为 Poisson 重力边值问题（简记为 P-S 问题）。需要指出的是，这里的重力值 g_P 不是经过地球质量调整后的重力，而是该点的真实重力，这与传统的 Stokes 理论是有区别的。该值的获取本文不进行深入研究，一个近似而又简便的方法是对地球表面的重力观测值 g_0 进行 Prey 归算[3]：

$$g_0 = g_P + \int_P^{P_0} \frac{\partial g}{\partial h}\mathrm{d}h$$

$$\partial g/\partial h \approx \partial\gamma/\partial h + 4\pi k\rho$$

且记 $g_P = g$，$g_{P_0} = g_0$，P_0 为地面点，得到：

$$\Delta g = g - \gamma = g_0 - (\partial\gamma/\partial h + 4\pi k\rho)h - \gamma = g_0 - (\gamma + (\partial\gamma/\partial h)h) - 4\pi k\rho h$$

式中，h 为正高。

为了求解上述 P-S 边值问题，本文采用球近似的方法。此时边界方程 (2) 可简化为：

$$LT|_S = \partial T/\partial r + (2/r)T|_S = -\Delta g \tag{4}$$

式中，r 为地心的向径。

收稿日期：1998-07-29. 操华胜，男，41 岁，副教授，现从事物理大地测量研究。

* 国家自然科学基金资助项目，编号 49274192。

1　Poisson 方程的 Dirichlet 问题的求解

为了求解 P-S 问题，先求解 Poisson 方程的 Dirichlet 条件的边值问题（简称 P-D 问题）：

$$\Delta T(P) = F(P),\quad P \in \Sigma \tag{1}$$

$$T(P)|_S = T_0(P),\quad P \in S \tag{5}$$

$$\lim_{P\to\infty} T(P) = 0,\quad P \to \infty \tag{6}$$

由数学物理方程理论，将格林函数 G 和扰动位 T 代入外部格林第二公式[5]：

$$\int_\Sigma (T\Delta G) - G\Delta T)\mathrm{d}\Sigma =$$

$$-\int_S \left(T\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial T}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{7}$$

这里，格林函数 G 满足：

$$\Delta G = 4\pi\delta \tag{8}$$

$$G|_S = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{P\to\infty} G = 0 \tag{10}$$

式中，δ 为 Dirac 函数，因此，

$$T(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G\Delta T\mathrm{d}\Sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S T\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{11}$$

在球边界条件下，有：

$$G = R/(r_P l_1) - 1/l \tag{12}$$

式中各符号如图 2 所示，且 $r_P r_{P_1} = R^2$，R 是球 S 的半径；$l = (r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q\cos\psi)^{1/2}$；$l_1 = (r_{P_1}^2 + r_Q^2 - 2r_{P_1} r_Q\cos\psi)^{1/2}$。或 $r_P l_1 = (r_P^2 r_Q^2 + R^4 - 2r_P r_Q R^2\cos\psi)^{1/2}$。将 l、$r_P l_1$ 代入式(12)，不难得：

$$\frac{\partial G}{\partial r_Q} = -\frac{R r_P(r_P r_Q - R^2\cos\psi)}{(r_P l_1)^3} + \frac{r_Q - r_P\cos\psi}{l^3} \tag{13}$$

$$K = (\partial G/\partial r_Q)|_S = (R^2 - r_P^2)/Rl^3 \tag{14}$$

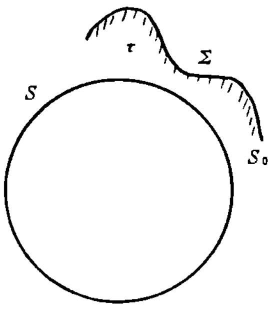

图 1　质体 τ 与曲面 S、S_0 的关系

Fig. 1　Relation Between Mass Body τ and Curve S, S_0

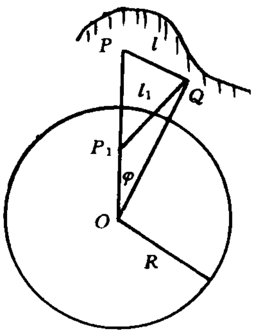

图 2　空间两点间距离

Fig. 2　Distance Between Spatial two Points

因此，边值问题 P-D 的解可以写成：

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left(\frac{R}{r_P l_1} - \frac{1}{l}\right)F\mathrm{d}\Sigma +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{r_P^2 - R^2}{Rl^3}T_0\mathrm{d}S \tag{15}$$

在物理大地测量中广泛应用的是另一种 Poisson 方程的 Dirichlet 问题，即 P-D* 问题：

$$\Delta T(P) = F(P),\quad P \in \Sigma \tag{1}$$

$$T(P)|_S = T_0(P), P \in S \tag{5}$$

$$\lim_{P\to\infty}(r_P^2 T) = 0,\quad P \to \infty \tag{3}$$

这类问题与 P-D 问题的区别是 T 在无穷远处所满足的正则性条件不同级，前者为 $O(1/r_P^3)$，而后者为 $O(1/r_P)$。设 $r_P > r_Q$，根据正则条件的要求，P-D 问题中的格林函数 G 在无穷远处应满足：

$$\lim_{P\to\infty} G = 0 \tag{16}$$

从而，

$$\lim_{P\to\infty}(r_P G) = R/r_Q - 1 \tag{17}$$

$$\lim_{P\to\infty}(r_P^2 G) = - r_Q(1 - R^3/r_Q^3)\cos\psi \tag{18}$$

此时，对应于边值问题 P-D* 格林函数 G^* 的表达式为：

$$G^* = G - \frac{1}{r_P}\lim_{P\to\infty}(r_P G) - \frac{1}{r_P^2}\lim_{P\to\infty}(r_P^2 G) =$$

$$\frac{R}{r_P l_1} - \frac{1}{l} - \frac{1}{r_P}\frac{R}{r_Q - 1} + \frac{r_Q}{r_P^2}\frac{1 - R^3}{r_Q^3}\cos\psi \tag{19}$$

相应地，

$$K^* = \frac{R^2 - r_P^2}{Rl^3} + \frac{1}{Rr_P} + \frac{3}{r_P^2}\cos\psi \tag{20}$$

仿照问题 P-D 的解的推导方法，得到边值问题 P-D* 的解为：

$$T^* = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \Big(\frac{R}{r_P l_1} - \frac{1}{l} - \frac{R}{r_P r_Q} - \frac{R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi +$$

$$1/r_P + (r_Q/r_P)\cos\psi\Big)F\mathrm{d}\Sigma +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{r_P^2 - R^2}{Rl^3} - \frac{1}{r_P} - \frac{3}{r_P^2}\cos\psi\right)T_0\mathrm{d}S \tag{21}$$

而当 $r_Q \geqslant r_P$ 时，

$$G^* = R/r_P l_1 - 1/l - (1/r_Q)(R/r_P - 1) +$$

$$(r_P/r_Q^2)(1 - R^3/r_P^3)\cos\psi \tag{22}$$

综合式（19）、(22)，应有：

$$G^* = \frac{R}{r_P l_1} - \frac{1}{l} - \frac{R}{r_P r_Q} - \frac{R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi +$$

$$\begin{cases} 1/r_P + (r_Q/r_P^2)\cos\psi, & r_P \geqslant r_Q \\ 1/r_Q + (r_P/r_Q^2)\cos\psi, & r_P \leqslant r_Q \end{cases} \tag{23}$$

2　Poisson 重力边值问题的求解

对 P-S 边值问题，引入函数：

$$\Phi = (1/r)[(\partial/\partial r)(r^2 T)] \tag{24}$$

则边值问题 P-S 可转移成[6]：

$$\Delta\Phi = 2\Delta T + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Delta T), P \in \Sigma \quad (25)$$

$$\Phi|_S = -R\Delta g, P \in S \quad (26)$$

$$\lim_{P\to\infty}(r_P^2\Phi) = 0, P \to \infty \quad (27)$$

这是一个关于函数 Φ 的 P-D 问题。由上节，上述问题的解由(21)式给出：

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G^*(2F + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F))\mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\int_S K^*(R\Delta g)\mathrm{d}S \quad (28)$$

先将该式中第一积分式的第二项化简。由于 $\mathrm{d}\Sigma = r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma$，$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球球面面元，运用分步积分：

$$\int_\Sigma G^*\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F)\mathrm{d}\Sigma = \iint_{\sigma R}^{\infty} G^* r\frac{\partial}{\partial r}(r^2F)\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma[r^3G^*F\Big|_{r=R}^{\infty} - \int_r r^2F\frac{\partial}{\partial r}(rG^*)\mathrm{d}r]\mathrm{d}\sigma$$

由于在 $r=R$ 或 $r=\infty$ 时 G^* 为零，而 r^3F 有界，因此第一项等于零，即

$$\int_\Sigma G^*\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2F)}{\partial r}\mathrm{d}\Sigma = -\int_\Sigma F(G^* + r\frac{\partial G^*}{\partial r})\mathrm{d}\Sigma \quad (29)$$

将式 (29) 代入式 (28)，得：

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma(G^* - r\frac{\partial G^*}{\partial r})F\mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial G^*}{\partial r}(R\Delta g)\mathrm{d}S \quad (30)$$

对比式(24)，将上式两边乘 r_P 然后对 r_P 积分且交换积分顺序，并顾及正则性条件式(3)，则有：

$$r_P^2T = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\Big[\int_\infty^{r_P} r_P\Big(G^* - r\frac{\partial G^*}{\partial r}\Big)\mathrm{d}r_P\Big]F\mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\int_S[\int_\infty^{r_P} r_P\frac{\partial G^*}{\partial r}\mathrm{d}r_P](R\Delta g)\mathrm{d}S$$

两边除 r_P^2，得：

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma[\frac{1}{r_P^2}\int_\infty^{r_P} r_P(G^* - r\frac{\partial G^*}{\partial r})\mathrm{d}r_P]F\mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\int_S[\frac{1}{r_P^2}\int_\infty^{r_P} r_P\frac{\partial G^*}{\partial r}\mathrm{d}r_P](R\Delta g)\mathrm{d}S \quad (31)$$

记

$$S_\tau = \frac{1}{r_P^2}\int_\infty^{r_P} r_P(G^* - r\frac{\partial G^*}{\partial r})\mathrm{d}r_P \quad (32)$$

$$S_\Delta = \frac{1}{r_P^2}\int_\infty^{r_P} r_P\frac{\partial G^*}{\partial r}\Big|_{r=R}\mathrm{d}r_P \quad (33)$$

则 P-S 问题的解可写为：

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma S_\tau F\mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\int_S S_\Delta(R\Delta g)\mathrm{d}S \quad (34)$$

这里 $S_\tau = S_\tau(r_P, r_Q, \psi, R)$；$S_\Delta = S_\Delta(r_P, \psi, R)$。另外，将格林公式(7)的右端稍加改变，得：

$$T(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\tilde{G}\,\Delta T\mathrm{d}\Sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S(T\tilde{LG} - \tilde{G}LT)\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\tilde{G}F\mathrm{d}\Sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S\tilde{G}\Delta g\mathrm{d}S \quad (35)$$

格林函数 $\tilde{G}$ 满足 $\tilde{LG}|_S = 0$，将式(35)与式(34)比较，不难得到：

$$\tilde{G} = S_\tau, \quad \tilde{G}|_S = -RS_\Delta \quad (36)$$

我们称 $\tilde{G}$ 为对应于 Poisson 重力边值问题的格林函数。如果将式(1)代入，进一步得到：

$$T = -k\int_\tau S_\tau\rho\mathrm{d}\tau + \frac{R}{4\pi}\int_S S_\Delta\Delta g\mathrm{d}S \quad (37)$$

这就是物理大地测量学中 Poisson 重力边值问题的表达式。由此可见，地球外部的扰动位为两部分的叠加，其中一部分与 S 面上的观测值 Δg 相关，另一部分是对区域 τ(对应于地形)中的质量分布的响应。

3　关于函数 S_τ、S_Δ 的表达式

为了求得 S_τ、S_Δ，先求格林函数 G^* 的导数：

$$\frac{\partial G^*}{\partial r_Q} = \frac{r_Q - r_P\cos\psi}{l^3} - \frac{Rr_P(r_Pr_Q - R^2\cos\psi)}{(r_Pl_1)^3} + \frac{R}{r_Pr_Q^2} + \frac{1}{r_P^2}\cos\psi + \frac{2R^3}{r_P^2r_Q^3}\cos\psi \quad (38)$$

进一步得：

$$r_P\Big(G^* - r_Q\frac{\partial G^*}{\partial r_Q}\Big) = \frac{3}{2}\Big(\frac{r_PR}{r_Pl_1} - \frac{r_P}{l} + 1 - \frac{2R}{r_Q} - \frac{2R^3}{r_Pr_Q^2}\cos\psi + \frac{Rr_P(r_P^2r_Q^2 - R^4)}{2(r_Pl_1)^3} - r_P(r_Q^2 - r_P^2))/(2l^3) \quad (39)$$

对上式作不定积分：

$$\int r_P\Big(G^* - r_Q\frac{\partial G^*}{\partial r_Q}\Big)\mathrm{d}r_P = \frac{3R}{r_Q^2}(r_Pl_1) - \frac{r_P^2R}{(r_Pl_1)} - \frac{r_P^2}{l} + \Big(1 - \frac{2R}{r_Q}\Big)r_P + \frac{3R^3}{r_Q^2}\cos\psi\cdot\ln\frac{r_Pr_Q - R^2\cos\psi + r_Pl_1}{r_Pr_Q} \quad (40)$$

在 $r_P\to\infty$ 时，

$$\lim_{P\to\infty}\ln\frac{r_Pr_Q - R^2\cos\psi + r_Pl_1}{r_Pr_Q} = \ln 2$$

$$\lim_{P\to\infty}\Big[\frac{3R}{r_Q^2}(r_Pl_1) - \frac{r_P^2R}{r_Pl_1} - \frac{2Rr_P}{r_Q}\Big] = -\frac{4R^3}{r_Q^2}\cos\psi$$

$$\lim_{P\to\infty}(r_P - r_P^2/l) = -r_Q\cos\psi$$

将积分上限 r_P 和下限 ∞ 代入式(40)中，经化简与

式(32)比较得：

$$S_r = \frac{3R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi\ln\frac{r_P r_Q - R^2\cos\psi + r_P l_1}{2r_P r_Q} +$$

$$\frac{3R}{r_P^2 r_Q^2}(r_P l_1) - \frac{R}{r_P l_1} - \frac{2R}{r_P r_Q} + \frac{4R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi -$$

$$1/l + 1/r_P - (r_Q/r_P^2)\cos\psi \qquad (41)$$

这就是 $r_P \geqslant r_Q$ 时 S_r 的表达式。一般地，

$$S_r = \frac{3R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi\ln\frac{r_P r_Q - R^2\cos\psi + r_P l_1}{2r_P r_Q} +$$

$$\frac{3R}{r_P^2 r_Q^2}(r_P l_1) - \frac{R}{r_P l_1} - \frac{2R}{r_P r_Q} + \frac{4R^3}{r_P^2 r_Q^2}\cos\psi -$$

$$\frac{1}{l} + \begin{cases} 1/r_P + (r_Q/r_P^2)\cos\psi, & r_P \geqslant r_Q \\ 1/r_Q + (r_P/r_Q^2)\cos\psi, & r_P \leqslant r_Q \end{cases} \qquad (42)$$

此外，关于函数 S_Δ，由(38)式

$$\frac{\partial G^*}{\partial r_Q}\Big|_{r_Q=R} = \frac{R^2 - r_P^2}{rl^3} + \frac{1}{Rr_P} + \frac{3}{r_P^2}\cos\psi$$

作不定积分：

$$\int r_P \frac{\partial G^*}{\partial r_Q}\Big|_{r_Q=R} \mathrm{d}r_P = \frac{2r_P^2}{Rl} - \frac{3l}{R} -$$

$$3\cos\psi\ln((r_P - R\cos\varphi + l)/r_P) + r_P/R \qquad (43)$$

上式当 $r_P \to \infty$ 时等于 $5\cos\psi - 3\cos\psi\ln 2$，将式(43)代入积分上、下限，顾及式(33)得：

$$S_\Delta = (1/R^2)\{(2R/l) - (3Rl/r_P^2) - (3R^2/r_P^2)\cdot$$

$$\cos\psi\ln[(r_P - R\cos\psi + l)/(2r_P)] +$$

$$R/r_P - 5R^2/r_P^2\cos\psi\} \qquad (44)$$

显然，

$$S_\Delta = S(r_P,\psi)/R^2 \qquad (45)$$

这里 $S(r_P,\psi)$ 是物理大地测量学中的广义 Stokes 函数。通过式(36)与式(45)，有关系式：

$$S_r|_{r_Q=R} = -S(r_P,\psi)/R \qquad (46)$$

将式(42)、(44)或式(45)代入式(37)，Poisson 重力边值问题的解最终表达为：

$$T = \frac{R}{4\pi}\int_S S(r_P,\psi)\Delta g\mathrm{d}\sigma - k\int_\tau S_r\rho\mathrm{d}\tau \qquad (47)$$

4 Poisson 方程 Neumann 问题的解

随着卫星技术的飞速发展，Poisson 方程 Neumann 边界条件下的重力扰动边值问题的应用越来越广泛。为应用方便，一并给出它的解。P-N 问题

$$\Delta T(P) = F(P), \quad P \in \Sigma \qquad (1)$$

$$(\partial T/\partial n)|_S = -\delta g, P \in S \qquad (48)$$

$$\lim_{P\to\infty} T(P) = 0, \quad P \to \infty \qquad (6)$$

在球近似下 $\partial/\partial n = \partial/\partial r$，重力扰动 $\delta g = g_P - \gamma_P$；引入辅助函数 $\Phi = r(\partial T/\partial r)$。

类似 P-S 问题的处理可得到：

$$\begin{cases} \Delta\Phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2\Delta T)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2 F)}{\partial r} \\ \Phi|_S = -R\delta g, \lim\limits_{P\to\infty}\Phi = 0 \end{cases}$$

这仍然是一个关于 Φ 的 Poisson-Dirichlet 问题。由式(11)得：

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F)\mathrm{d}\Sigma + \frac{R}{4\pi}\int_S \delta g\frac{\partial G}{\partial r}\mathrm{d}S \qquad (49)$$

顾及式(29)，有：

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma F(G + r_Q\frac{\partial G}{\partial r_Q})\mathrm{d}\Sigma + \frac{R}{4\pi}\int_S \delta g\frac{\partial G}{\partial r_Q}\mathrm{d}S$$

由函数 Φ 的定义式得：

$$T = T(r_P) - T(\infty) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\Big[\int_\infty^{r_P}\frac{1}{r_P}\Big(G +$$

$$r_Q\frac{\partial G}{\partial r_Q}\Big)\mathrm{d}r_P\Big]F\mathrm{d}\Sigma + \frac{R}{4\pi}\int_S\Big[\int_\infty^{r_P}\frac{1}{r_P}\frac{\partial G}{\partial r_Q}\mathrm{d}r_P\Big]\delta g\mathrm{d}S$$

记

$$S_\delta = -\int_\infty^{r_P}\frac{1}{r_P}(G + r_Q\frac{\partial G}{\partial r_Q})\mathrm{d}r_P \qquad (50)$$

$$S_H = \int_\infty^{r_P}\frac{1}{r_P}\frac{\partial G}{\partial r_Q}\Big|_{r_Q=R}\mathrm{d}r_P \qquad (51)$$

得到 Poisson-Neumann 问题的解：

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma S_\delta F\mathrm{d}\Sigma + \frac{R}{4\pi}\int_S S_H\delta g\mathrm{d}S \qquad (52)$$

顾及格林函数 G 的定义式(12)得：

$$G + r_Q(\partial G/\partial r_Q) = (1/2)[R/(r_P l_1) - 1/l] -$$

$$(1/2)[R(r_P^2 r_Q^2 - R^4)/(r_P l_1)^3) - (r_Q^2 - r_P^2)/l^3)]$$

作积分，并顾及在无穷远处的性态，得：

$$S_\delta = -\{R/(r_P l_1) + 1/l - (1/R)\ln[(r_P l_1 -$$

$$r_P r_Q\cos\psi + R^2)/(r_P r_Q(1 - \cos\psi))]\} \qquad (53)$$

同样，由式(14)积分：

$$S_H = -[\frac{2}{l} - \frac{1}{R}\ln\frac{l - r\cos\psi + R}{r(1 - \cos\psi)}] \qquad (54)$$

并且可以得到：

$$S_\delta|_{r_Q=R} = S_H = H(r_P,\psi) \qquad (55)$$

这里 $H(r_P,\psi)$ 是物理大地测量中常见的 Hotine 函数。类似地，可以求得在正则条件(3)下的 Poisson-Neumann 问题的解：

$$T^* = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma S_\delta^* F\mathrm{d}\Sigma + \frac{R}{4\pi}\int_S S_H^*\delta g\mathrm{d}S \qquad (56)$$

其中，

$$S_\delta^* = S_\delta + \frac{1}{r_P} + \frac{r_Q}{r_P^2}\cos\psi + \frac{R^3}{2r_P^2 r_Q^2}\cos\psi \qquad (57)$$

$$S_H^* = S_H + 1/r_P + 3R/(2r_P^2)\cos\psi \qquad (58)$$

记空间重力异常为 Δg_F，地面空间重力异常为 Δg_M。按物理大地测量：

$$\Delta g_F = g_0 - \gamma - (\partial g/\partial h)h \qquad (59)$$

$$\Delta g_M = g_0 - \gamma - (\partial\gamma/\partial h)H^* \qquad (60)$$

$$\Delta g = g_0 - \gamma - (\partial\gamma/\partial h)h - 4\pi k\rho h \quad (61)$$

上式中，g_0 是地面实测重力值；γ 是正常椭球面上的正常重力；h 为正高；H^* 为正常高。若近似地，

$$\partial g/\partial h \approx \partial\gamma/\partial h$$

则

$$\Delta g_F = \Delta g + 4\pi k\rho h \quad (62)$$

或

$$h \approx H^*$$

则

$$\Delta g_M = \Delta g + 4\pi k\rho h \quad (63)$$

将式(62)代入式(47)则得 $T=T_0+\delta T$，其中

$$T_0 = \frac{R}{4\pi}\int_S S(r_P,\psi)\Delta g_F \mathrm{d}\sigma$$

而

$$\delta T = -k\int_\tau S_\tau \rho \mathrm{d}\tau - k\int_S S(r_P,\psi)Rh\rho \mathrm{d}\sigma = -k\int_\tau S_\tau \rho \mathrm{d}\tau - k\int_S S_\Delta \frac{h}{R}\rho \mathrm{d}\sigma$$

可见如果采用式(62)，则 T_0 是传统意义下用空间重力异常求解扰动位的 Stokes 公式，而 δT 表示调整质量产生的重力场变形部分。类似地，当条件式(63)成立时，T_0 为 Molodensky 方法中的 T_0 项，δT 为高次项，它表示由于地形质量产生的重力场影响。

参 考 文 献

1 方　俊. 重力测量与地球形状学(下册). 北京：科学出版社，1975

2 管泽霖，宁津生. 地球形状及外部重力场(下册). 北京：测绘出版社，1983

3 Heiskannen W A，Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco：Freeman W H，1967

4 Hormander L. The Boundary Value Problem of Physical Geodesy. Arch Rot Mech Annual，1976 (62)：1～52

5 郭俊义. 物理大地测量学基础. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1994

6 党诵诗. 物理大地测量的数学基础. 北京：测绘出版社，1988

7 于锦海，朱灼文，操华胜. 部分边界固定的自由边值. 科学通报，1995 (7)：1 301～1 303

8 于锦海，朱灼文，操华胜. Poisson 方程 Robin 外问题的积分解. 科学通报，1996 (3)：528～531

Poisson Gravimetric Boundary Value Problems

Cao Huasheng　Zhu Zhuowen　Yu Jinhai

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　The so-called Poisson gravimetry boundary value problems, i. e. Stokes problem and Neumann problem for Poisson equation with respect to the disturbing potential, are formaulated in this paper. For solving these two kinds of problems, firstly, Dirichlet problem for Poisson equation is investigated and its integral solution is written out with respect to second Green identity; secondly, by introducing two auxilary functions, respectively, Stokes and Neumann problems for Poisson equation are deduced to Dirichlet problem of sorts, so that their integral solutions are shown in an easy way. The final solutions become a anaddition of two parts, where one is responsive to boundary data, and another to topographies. The present procedure given in this paper opens a new way to study of fining the geoid by using topographies.

Key words　Poisson gravimetric boundary value problem; Green function; disturbing potential