DOI:10.13203/j.whugis1999.01.010

重力场的内蕴特性*

王东明　朱灼文

（北京大学地球物理系，北京市海淀区，100871）

摘　要　根据从微分几何引入的重力场的 5 参量以及重力场的度量和联络系数，研究了力线、等位面、经线、纬线、子午线、平行圈的特性，并以 5 个定理的形式给出。

关键词　重力场学；内蕴；5 参量；第一基本形式；联络系数

分类号　P312.1；P223

传统的地球重力学经历了 Stokes[1]，Molodensky[2]，Bjerhammar[3]三个发展阶段，但都遵循着同样一种模式，即大地测量边值问题模式。这种模式的解仅仅是在分布意义下对重力场进行赋值。赋值模式的重力场在一定的精度和分辨率的范围内描述了重力场的数值精细特性，对大地测量学本身及其诸如空间科学技术等方面的工程应用十分重要，以致一直成为大地测量学追求的目标。但是传统的理论存在许多不足，并且作为一门研究地球重力场的科学，似乎并没有揭示重力场的本质特性，这是由于赋值模式只给出重力场的数值—— 重力。重力是一种最直观、粗放的量，即使给出一种完全精确、无限稠密、全面分布的重力场模型，也不能认为对重力场的内在细致结构和性质就有了彻底的认识。再则，近年来大地测量技术飞速发展，卫星激光测距、现代绝对重力测量及指日可待的卫星重力梯度测量、机载重力梯度测量等[4,5]新型数据从不同层次蕴含着场源物质的信息。怎样利用这些已出现或即将出现的资料来研究重力场，揭示重力场的精细结构，也是迫切需要解决的问题。要使地球重力学真正成为研究地球重力场的科学，重力学只有演变成重力场学[6]。重力场学是研究重力场内在性质的科学。只有充分知道场的内蕴结构、内蕴特性，才望重力学在探索场源物质结构上发挥实质作用，对传统的场赋值模式、场的精化研究进行加强和完善，并为重力学的发展找到新的生长点。

依据上述观点，本文利用微分几何和内蕴的理论，研究了重力场的一些内在特性，得出了一些非常有意义的结果。

1　基本向量场与 5 参量

本文约定张量指标用 r、s、t、q 表示，标架指标用 a、b、c、d 表示，取值范围都是 1～3，并采用 Einstein 求和约定。

首先定义重力场中相互正交的单位标架场[7] $\underset{a}{X}$：$\underset{3}{X}$ 平行于地球自转轴，朝北为正；$\underset{1}{X}$ 平行于由 $\underset{3}{X}$ 和格林尼治天顶方向所决定的平面，朝地球外为正；$\underset{2}{X}$ 与 $\underset{1}{X}$、$\underset{3}{X}$ 构成右手系。$\underset{a}{X}$ 是一个平行标架场。定义重力场中另一右手单位正交标架场 $\underset{a}{\lambda}$ 为局部天文标架：$\underset{3}{\lambda}$ 指向天顶方向并与等位面垂直，朝地球外为正；$\underset{2}{\lambda}$ 落在等位面上并与 $\underset{3}{\lambda}$ 和 $\underset{3}{X}$ 构成的平面平行，朝北为正，称之为子午方向；$\underset{1}{\lambda}$ 也落在等位面内，和 $\underset{2}{\lambda}$、$\underset{3}{\lambda}$ 构成右手系，朝东为正，称之为平行圈方向。$\underset{a}{\lambda}$ 不是一个平行向量场。$\underset{3}{\lambda}$ 与 $\underset{1}{X}$、$\underset{2}{X}$ 所构成平面的夹角称之为纬度 Φ，朝北为正；$\underset{3}{\lambda}$ 与 $\underset{1}{X}$、$\underset{3}{X}$ 所构成平面的夹角称为经度 Λ，朝东为正。等位面上一条曲线如果在每一点的切向都在子午方向，就称之为子午线；如果切向都在平行圈方向，就称之为平行圈。从定义看出，子午线、平行圈并不一定是具有相同的经度、纬度的点的轨迹。等位面上具有相同经度、纬度点的轨迹称为经线、纬线。

设 W 是地球重力位。选取自然坐标系 $y^r=(\Lambda,\Phi,W)$。空间中任一点的位置可表示成 y^r 的函数 $R=R(\Lambda,\Phi,W)$，在此坐标系下自然协变基[7] V_r 为 $\partial R/\partial y^r$，逆变基[7] V^r 为 $\mathrm{grad}\,y^r$，它们满足 $V^rV_s=\delta^r_s$，其中 δ^r_s 为 Kronecker 记号。局部天文

收稿日期：1998-08-20. 王东明，男，30 岁，博士后，现从事地球重力学研究。

* 国家自然科学基金与测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目，编号 49484002 及 WKL(94)0202。

标架$\underset{a}{\lambda}$ 的逆变分量$\underset{a}{\lambda}^r$ 和协变分量$\underset{a}{\lambda}_r$ 满足：

$$\underset{a}{\lambda} = \underset{a}{\lambda}^r V_r = \underset{a}{\lambda}_r V^r,\quad \underset{a}{\lambda}^r \underset{b}{\lambda}_r = \delta_{ab} \tag{1}$$

其中 δ_{ab}也为 Kronecker 记号。从$\underset{a}{X}$、$\underset{a}{\lambda}$ 的定义有：

$$\underset{a}{\lambda} = \underset{a}{\overset{b}{A}}\,\underset{b}{X} \tag{2}$$

其中，

$$(\underset{a}{\overset{b}{A}}) = \begin{bmatrix} -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ -\sin\Phi\cos\Lambda & -\sin\Phi\sin\Lambda & \cos\Phi \\ \cos\Phi\cos\Lambda & \cos\Phi\sin\Lambda & \sin\Phi \end{bmatrix}$$

$$\underset{a}{\overset{b}{A}}\,\underset{b}{\overset{c}{A}} = \delta^c_a \tag{3}$$

在逆变基下通过分解 $\underset{a}{\lambda}_r = \underset{a}{\overset{b}{A}}\,\underset{b}{X}_r$，求其协变导数[7]，注意到$\underset{b}{X}$ 平行向量场，即有$\underset{b}{X}_{rs}=0$，得：

$$\underset{a}{\lambda}_{rs} = \underset{a}{\overset{b}{A}}_s\,\underset{b}{\overset{c}{A}}\,\underset{c}{\lambda}_r = \begin{bmatrix} (\underset{2}{\lambda}_r\sin\Phi - \underset{3}{\lambda}_r\cos\Phi)\Lambda_s \\ -\sin\Phi\Lambda_s\underset{1}{\lambda}_r + \Phi_s\underset{3}{\lambda}_r \\ \cos\Phi\Lambda_s\underset{1}{\lambda}_r + \Phi_s\underset{2}{\lambda}_r \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中，Λ_s、Φ_s 是 Λ、Φ 的协变导数(即梯度)。

地球重力位 W 的一阶和二阶协变导数为：

$$W_r = -g\,\underset{3}{\lambda}_r \tag{5}$$

$$W_{rs} = -g\{\underset{3}{\lambda}_{rs} + (\ln g)_s\,\underset{3}{\lambda}_r\} \tag{6}$$

其中，g 为重力值。设$\underset{a}{\lambda}$ 三个方向的弧长元素分别为 dp、dm、dn，现考虑等位面上沿子午方向$\underset{2}{\lambda}$ 的一条测地线，则子午方向的测地挠率 τ 和法曲率 χ_2[7]就是这条测地线的挠率和主曲率。同理，等位面上沿平行圈$\underset{1}{\lambda}$ 方向的测地线的测地挠率 τ' 和法曲率 χ_1 就是这条测地线的挠率和主曲率。可证明平行圈的测地挠率与子午线的测地挠率数值相同，但差一个负号，这说明它们的挠曲程度是一样的，只是挠曲的方向相反。由此可得出如下公式：

$$\begin{cases} \chi_1 = \cos\Phi(\partial\Lambda/\partial p) = -g^{-1}W_{rs}\underset{1}{\lambda}^r\underset{1}{\lambda}^s = \\ \quad -g^{-1}W_{11} \\ \chi_2 = \partial\Phi/\partial m = -g^{-1}W_{rs}\underset{2}{\lambda}^r\underset{2}{\lambda}^s = -g^{-1}W_{22} \\ \tau = \partial\Phi/\partial p = \cos\Phi(\partial\Lambda/\partial m) = \\ \quad -g^{-1}W_{rs}\underset{1}{\lambda}^r\underset{2}{\lambda}^s = -g^{-1}W_{12} \\ \gamma_1 \triangleq \partial\ln g/\partial p = \cos\Phi(\partial\Lambda/\partial n) = \\ \quad -g^{-1}W_{rs}\underset{1}{\lambda}^r\underset{3}{\lambda}^s = -g^{-1}W_{13} \\ \gamma_2 \triangleq \partial\ln g/\partial m = \partial\Phi/\partial n = \\ \quad -g^{-1}W_{rs}\underset{2}{\lambda}^r\underset{3}{\lambda}^s = -g^{-1}W_{23} \end{cases} \tag{7}$$

其中的 $\boldsymbol{W}_{11}$、$\boldsymbol{W}_{22}$、$\boldsymbol{W}_{12}$、$\boldsymbol{W}_{13}$、$\boldsymbol{W}_{23}$以及后面将出现的 $\boldsymbol{W}_{33}$是重力位 W 的二阶张量（式(6)）在局部天文标架表示下的分量，$\triangleq$是"定义为"的意思。在 § 3 将看到 γ_1、γ_2 是力线在平行圈、子午方向的曲率。

从式(7)看出，左边是重力场等位面和力线的几何量，右边是重力场的物理量，它们之间建立了对应关系，称等式左边的 5 个量为重力场的 5 参量[8]，它们描述了局部重力场的性质，同时也暗示了重力场的几何与其物理的密切关系。如果把式(7)加上如下的 Bruns 公式：

$$\boldsymbol{W}_{33} = g(\chi_1 + \chi_2) + 2\omega^2 - 4\pi f\rho \tag{8}$$

其中，ω 为地球自转角速度；f 为万有引力常数；ρ 是研究点的物质密度，那么(7)、(8)两式的意义转变为 5 参量与重力梯度张量的基本关系式。因此只要重力梯度张量能直接测量求得，5 参量就可直接求得；反之亦然。

关于局部天文标架$\underset{a}{\lambda}$ 的二阶协变导数、散度、旋度、Λ、Φ、g 的二阶协变导数、Laplacian 及它们的可积条件等的计算请参阅文献[8～10]。

随着地面重力梯度测量、机载重力梯度测量以及卫星重力梯度测量的出现和投入使用，重力梯度张量就变成直接测量的量。下面论述如何利用这些数据揭示重力场。

2　重力场的度量、联络系数和内蕴量

内蕴通常指内蕴量、内蕴性质、内蕴结构，是指仅由流形度量本身所决定的量、性质、结构，是流形的本质特性。重力场可看成三维的被二维等位面所分层的 Riemann 流形，引入内蕴到重力场是很自然的。要研究重力场的内蕴，必须对重力场不附加任何假定，这就需要内蕴坐标[6,9]。可以证明自然坐标系(Λ,Φ,W)就是内蕴坐标系。在此坐标系下的度量张量 g_{rs}和联络系数 Γ^r_{st}为：

$$\begin{cases} g_{rs} = \underset{a}{\lambda}_r\underset{a}{\lambda}_s \\ \Gamma^r_{st} = g^{rq}/2(\partial g_{qs}/\partial y^t + \partial g_{qt}/\partial y^s - \partial g_{st}/\partial y^q) \end{cases} \tag{9}$$

式中，g^{rq}是 g_{rs}的逆；g_{rs}、Γ^r_{st}的具体表达式见文献[8～10]。重力场的第一基本形式[7]即度量 ds^2为：

$$ds^2 = g_{rs}dy^r dy^s \tag{10}$$

重力场的第一基本形式刻画了重力场的内在属性，也就是说即使把重力场嵌入到任何更高维的空间，也无需离开重力场就可以研究它的内蕴特性。就拿重力场中的某一等位面来说，一旦它的第一基本形式给定，无需借助它相邻的等位面就可以把此等位面的特性求出来。重力场的联络系数以及刻画重力场空间弯曲特性的 Riemann-

Christofel 张量[7]是内蕴量。下面求出另一些基本的内蕴量。

把由式(10)求得的重力场的度量限制到某一等位面上，有：

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j, \quad i,j = 1,2 \tag{11}$$

经线、纬线的弧长 S_L、S_A 为：

$$S_L = \int \sqrt{g_{11}} d\Lambda \tag{12}$$

$$S_A = \int \sqrt{g_{22}} d\Phi \tag{13}$$

等位面上任一曲线 $y^i = y^i(t)$ 的弧长 S 为：

$$S = \int \left(g_{ij} \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt} \right)^{1/2} dt \tag{14}$$

式中，t 是曲线的参数。同理，对任一空间曲线 $y^r = y^r(t)$ 的弧长 S 为：

$$S = \int \left(g_{rs} \frac{dy^r}{dt} \frac{dy^s}{dt} \right)^{1/2} dt \tag{15}$$

等天顶线的弧长 S_Z 为：

$$S_Z = \int \sqrt{g_{33}} dW \tag{16}$$

等位面的面积 A 为：

$$A = \iint \det(g_{ij}) d\Phi d\Lambda = \iint \frac{\cos\Phi}{K^2} d\Phi d\Lambda \tag{17}$$

式中，K 为等位面的高斯曲率。设经线与纬线的夹角为 θ_{LA}，经线与等天顶线的夹角为 θ_{LZ}，纬线与等天顶线的夹角为 θ_{AZ}，则：

$$\cos\theta_{LA} = -(\chi_1 + \chi_2)\tau / [(\chi_1^2 + \tau^2)(\chi_2^2 + \tau^2)]^{1/2} \tag{18}$$

$$\cos\theta_{LZ} = [\chi_2(\chi_2\gamma_1 - \tau\gamma_2) - \tau(\chi_1\gamma_2 - \tau\gamma_1)] / \{(\chi_2^2 + \tau^2)[K^2 + (\chi_2\gamma_1 - \tau\gamma_2)^2 + (\chi_1\gamma_2 - \tau\gamma_1)^2]\}^{1/2} \tag{19}$$

$$\cos\theta_{AZ} = [\chi_1(\chi_1\gamma_2 - \tau\gamma_1) - \tau(\chi_2\gamma_1 - \tau\gamma_2)] / \{(\tau^2 + \chi_1^2)[K^2 + (\chi_2\gamma_1 - \tau\gamma_2)^2 + (\chi_1\gamma_2 - \tau\gamma_1)^2]\}^{1/2} \tag{20}$$

从式(18)～(20)看出，夹角 θ_{LA}、θ_{LZ}、θ_{AZ} 与重力值 g 无关，仅由重力场的 5 参量所决定。$\tau=0$ 时经线、纬线正交，但它们和等天顶线不一定正交。一个等位面所包容的体积 V 可表示为：

$$V = \iiint \det(g_{rs}) d\Lambda d\Phi dW = \iiint \frac{\cos\Phi}{gK^2} d\Phi d\Lambda dW \tag{21}$$

两等位面间的体积 V 为：

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{W_1}^{W_2} \frac{\cos\Phi}{gK^2} d\Phi d\Lambda dW \tag{22}$$

式中，W_1、W_2 为两等位面的位势值。两等位面间力线的长度 S_F 为：

$$S_F = \int_{W_1}^{W_2} \frac{dW}{g} \tag{23}$$

沿力线方向经度、纬度的变化量 $\Delta\Lambda$、$\Delta\Phi$ 为：

$$\Delta\Lambda = \int_{W_1}^{W_2} \frac{\gamma_1}{g\cos\Phi} dW, \quad \Delta\Phi = \int_{W_1}^{W_2} \frac{\gamma_1}{g} dW \tag{24}$$

其它内蕴量及其性质将另文讨论。

3 重力场的性质

利用 Frenet 公式，力线的曲率向量方程为：

$$\underset{3}{\lambda_{rs}} \underset{3}{\lambda^s} = \chi_0 N = \cos\Phi(\partial\Lambda/\partial n) \underset{1}{\lambda_r} + \partial\Phi \underset{2}{\lambda_r}/\partial n = \gamma_1 \underset{1}{\lambda_r} + \gamma_2 \underset{2}{\lambda_r} \tag{25}$$

式中，χ_0 是力线的主曲率；N 是力线的主法向。由此看出，γ_1、γ_2 是力线在平行圈、子午方向的曲率，于是，

$$\chi_0 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2} \tag{26}$$

主法向 N 是等位面上方位角为 $\arctan(\gamma_1/r_2)$ 的向量，它刚好是 $\ln g$ 的曲面梯度方向，而副法向则是沿 $\ln g$ 为常数的曲面方向。

令 $\alpha = \arctan(\gamma_1/\gamma_2)$，则主法向量为 $\underset{1}{\lambda}\sin\alpha + \underset{2}{\lambda}\cos\alpha$，副法向量为 $-\underset{1}{\lambda}\cos\alpha + \underset{2}{\lambda}\sin\alpha$。令 τ_0 是力线的挠率，由 Frenet 第三公式得：

$$(-\underset{1}{\lambda_r}\cos\alpha + \underset{2}{\lambda_r}\sin\alpha)_s \underset{3}{\lambda^s} = -\tau_0(\underset{1}{\lambda_r}\sin\alpha + \underset{2}{\lambda_r}\cos\alpha) \tag{27}$$

利用式(4)解得 τ_0 为：

$$\tau_0 = \sin\Phi(\partial\Lambda/\partial n - \partial\alpha/\partial n) = \gamma_1\tan\Phi - \partial\chi/\partial n \tag{28}$$

从式(26)、(28)看出，一般情况下力线既不是直线，也不是平面曲线。当力线是直线时，$\chi_0=0$ 推出 $\gamma_1=\gamma_2=0$，由式(7)推知沿力线方向 Λ、Φ 皆为常数，即等天顶方向；当力线是平面曲线时，$\tau_0=0$，此时方位角 α 为常数，于是 $\partial\alpha/\partial n=0$，推得 $\gamma_1=0$，说明 $\ln g$ 在平行圈方向无变化，沿力线方向 Λ 为常数，力线落在等经度面内。

定理 1 重力场的力线一般既不是平面曲线，也不是直线。当力线是平面曲线时，它落在等经度面内；当力线是直线时，它是等天顶线。

对等位面上方位角为 α 的方向的曲线，可求得它的法曲率、测地挠率、测地曲率如下：

$$\underset{3}{\lambda_{rs}}(\underset{1}{\lambda^r}\sin\alpha + \underset{2}{\lambda^r}\cos\alpha)(\underset{1}{\lambda^s}\sin\alpha + \underset{2}{\lambda^s}\cos\alpha) = \chi_1\sin^2\alpha + 2\tau\sin\alpha\cos\alpha + \chi_2\cos^2\alpha \tag{29}$$

$$\underset{3}{\lambda_{rs}}(\underset{1}{\lambda^r}\cos\alpha - \underset{2}{\lambda^r}\sin\alpha)(\underset{1}{\lambda^s}\sin\alpha + \underset{2}{\lambda^s}\cos\alpha) =$$

$$(\chi_1-\chi_2)\sin\alpha\cos\alpha+\tau(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \quad (30)$$

当方位角满足

$$\tan 2\alpha=2\tau/(\chi_2-\chi_1) \quad (31)$$

时，它是一平面曲线。

$$-(\underset{1}{\lambda_r}\sin\alpha+\underset{2}{\lambda_r}\cos\alpha)_s(\underset{1}{\lambda^r}\cos\alpha-\underset{2}{\lambda^r}\sin\alpha)\cdot$$

$$(\underset{1}{\lambda^s}\sin\alpha+\underset{2}{\lambda^s}\cos\alpha)=(\chi_1\sin\alpha+\tau\cos\alpha)\tan\Phi-$$

$$\partial\alpha/\partial s=\sin\Phi(\partial\Lambda/\partial s-\partial\alpha/\partial s) \quad (32)$$

其中 ds 为方位角 α 方向上的弧长元素。如果此方向为测地线方向，则：

$$\partial\alpha/\partial s=\sin\Phi(\partial\Lambda/\partial s) \quad (33)$$

当 $\alpha=90°$ 时是平行圈方向，它的测地曲率 σ_1 为：

$$\sigma_1=\chi_1\tan\Phi \quad (34)$$

当 $\alpha=0°$ 时是子午线方向，它的测地曲率 σ_2 为：

$$\sigma_2=\tau\tan\Phi \quad (35)$$

于是子午线、平行圈的曲率 χ_m、χ_p 分别为：

$$\chi_m=(\chi_2^2+\tau^2\tan^2\Phi)^{1/2} \quad (36)$$

$$\chi_p=(\chi_1^2+\chi_1^2\tan^2\Phi)^{1/2}=\chi_1\sec\Phi \quad (37)$$

分两种情形考虑。第一种为当 $\tau\neq0$ 时，从式(30)看出 $\alpha=0°$、$90°$ 时，式(27)非零，这说明子午线、平行圈是非平面曲线；由式(34)、(35)得出，除 $\Phi=0$(即赤道)外，子午线、平行圈非测地线方向；第二种为当 $\tau=0$ 时，从式(30)看出子午线、平行圈是平面曲线，由式(35)得出子午线是测地线，而平行圈除赤道外一定不是测地线，因 $\sigma_1=0$ 推得 $\chi_1=0$，由式(37)得出 $\chi_p=0$，说明平行圈是一条直线，这不可能。我们给出如下定理。

定理 2 当 $\tau\neq0$ 时，子午线既不是平面曲线也非测地线，但在赤道上是测地线方向；当 $\tau=0$ 时子午线既是平面曲线又是测地线。

定理 3 除赤道外，平行圈不是测地线。当 $\tau\neq0$ 时平行圈不是平面曲线，当 $\tau=0$ 时它是平面曲线。

设 $\underset{1}{\lambda}\sin\alpha+\underset{2}{\lambda}\cos\alpha$ 是曲面单位向量，在这方向上 Λ 为常数，和 Λ_r 缩并后得：

$$0=\chi_1\sin\alpha+\tau\cos\alpha \quad (38)$$

即在方位角 $\alpha=\arctan(-\tau/\chi_1)$ 方向上 Λ 是常数，同理和 Φ_r 缩并后得：

$$0=\tau\sin\alpha+\chi_2\cos\alpha \quad (39)$$

即在方位角 $\alpha=\arctan(-\chi_2/\tau)$ 方向上 Φ 是常数。

定理 4 $\tau\neq0$ 时，经线和子午线、纬线和平行圈不重合，它们的夹角分别为 $\arctan(-\tau/\chi_1)$、$\arctan(-\tau/\chi_2)$；$\tau=0$ 时，经线和子午线、纬线和平行圈重合。

等天顶方向和垂线之间有一夹角 天顶距 υ。与等天顶方向重合的单位向量可表示为 $\underset{1}{\lambda}\sin\alpha\sin\upsilon+\underset{2}{\lambda}\cos\alpha\sin\upsilon+\underset{3}{\lambda}\cos\upsilon$，$\alpha$ 为此向量的方位角，则有：

$$\begin{aligned}\chi_1\sin\alpha\sin\upsilon+\tau\cos\alpha\sin\upsilon+\gamma_1\cos\upsilon=0\\ \chi_2\cos\alpha\sin\upsilon+\tau\sin\alpha\sin\upsilon+\gamma_2\cos\upsilon=0\end{aligned} \quad (40)$$

求解得：

$$\begin{cases}\tan\alpha=(\gamma_2\tau-\gamma_1\chi_2)/(\gamma_1\tau-\gamma_2\chi_1)\\ \tan\upsilon=\dfrac{-(\gamma_1\sin\alpha+\gamma_2\cos\alpha)}{(\chi_1^2\sin^2\alpha+2\tau\sin\alpha\cos\alpha+\chi_2\cos^2\alpha)}\end{cases} \quad (41)$$

当 $\upsilon=0°$ 时，推得 $\gamma_1=\gamma_2=0$，进一步说明了定理1。

等位面上的经纬、纬线、子午线、平行圈不一定是等位面的主曲率方向。设 k_1、k_2 分别为它的主曲率，相应的方位角为 α、$\alpha+\pi/2$，由式(29)得：

$$\begin{aligned}k_1=\chi_1\sin^2\alpha+2\tau\sin\alpha\cos\alpha+\chi_2\cos^2\alpha\\ k_2=\chi_1\cos^2\alpha-2\tau\sin\alpha\cos\alpha+\chi_2\sin^2\alpha\end{aligned} \quad (42)$$

由于在主方向上满足式(31)，则解得：

$$\begin{aligned}&k_1+k_2=\chi_1+\chi_2\\ &k_1-k_2=(\chi_2-\chi_1)\sec\alpha=2\tau\csc2\alpha\\ &k_1\cdot k_2=K=\chi_1\chi_2-\tau^2\end{aligned} \quad (43)$$

反之有：

$$\begin{aligned}&\chi_1=k_1\cos^2\alpha+k_2\sin^2\alpha\\ &\chi_2=k_2\cos^2\alpha+k_1\sin^2\alpha\\ &\tau=(k_1-k_2)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \quad (44)$$

于是 χ_1、χ_2、τ 与 k_1、k_2、α 之间可互解。由式(31)得出，$\tau=0$ 时，经线、纬线是曲率线，此时子午线、平行圈与经线、纬线重合，所以得出定理5。

定理 5 $\tau\neq0$ 时，经线、纬线、子午线、平行圈都不是曲率线；$\tau=0$ 时它们是曲率线。

关于经线、纬线的测地曲率、测地挠率、法曲率、曲率等的计算参阅文献[10]。

4 结 语

传统重力学在求解地球形状与外部重力场时利用重力作为观测量，求解的是扰动位和大地水准面差距。本文求解的地球重力场，直接观测量是重力和重力梯度，求解的是重力位 W，求解的方法也不一样。

本文中的几个定理在大地测量学中已找到应用，如大地奇异性问题。τ 刻画了重力场的许多性质，因此 τ 必定有许多地球物理含义，这是需要进一步解决的问题。

从内蕴的观点来研究重力场、揭示重力场的性质是非常有前景的[6]。

参考文献

1 Stokes G G. On the Variation of Gravity on the Surface of the Earth. Irans. Cambridge Phil. Soc., 1849 (8)
2 Molodensky M S, Eremeev V F, Yurkina M I. Methods for Study of the External Gravitation Field and Figure of the Earth. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1962
3 Bjerhammar A. A New Theory of Geodetic Gravity. Stockholm: Trans. Rog. Inst. Technology , 1964
4 Jekeli C. A Review of Gravity Gradiometer Survey System Data Analyses. Geophysics, 1993, 58(4):508～514
5 Bernard A, Touboul P. A Spaceborne Gravity Gradiometer for the Nineties. In: Gravity, Gradiometry and Gravimetry. International Association of Geodesy Symposia, 1989(103)
6 朱灼文,王东明.关于重力学发展的思考——重力场学.见:祝贺方俊院士九十寿辰论文集.北京:测绘出版社,1994
7 陈省身,陈维恒.微分几何讲义.北京:北京大学出版社,1983
8 Hotine M. Differential Geodesy. Berlin: Springer, 1991
9 Marussi A. Intrinsic Geodesy. Berlin: Springer, 1985
10 王东明.重力场的结构理论:[学位论文].武汉:中国科学院测量与地球物理研究所,1996

The Intrinsic Nature of Gravity Fields

Wang Dongming Zhu Zhuowen

(Department of Geophysics, Beijing University, Beijing, China, 100871)

Abstract Using the five parameters of the gravity field, the metric and connection of the gravity field, the characteristics of force line, equipotential surface, longituade curve, latitude curve, meridian, parallel are studied, and then expressed in the form of five theorems. Five parameters characterize the nature of local gravity field and can be directly measured. Therefore, the local nature of gravity field can be revealed by local measurements.

Key words gravics; intrinsic; five parameters; first fundamental form; connection coefficients