

利用小波理论计算物理大地测量中的奇异积分^{*}

于锦海 朱灼文 郭建峰

(郑州测绘学院基础课部, 郑州市陇海中路66号, 450052)

摘 要 利用小波理论讨论了奇异积分的计算问题, 用实例说明了一维情况下计算的快速性和准确性。与 Fourier 变换法相比, 列举了小波理论的优点, 肯定了局部重力场研究中小波理论用于实际的重要性。

关键词 小波理论; 奇异积分; 物理大地测量; Harr 尺度函数

分类号 P223

物理大地测量学中的几个关键公式, 诸如 Stokes 公式、Vening-Meinesz 公式、 G_1 项的计算等^[1~4], 都是某种形式的奇异积分, 因而研究这些奇异积分的算法也就成为物理大地测量学的重要内容之一。众所周知, Fourier 变换曾给物理大地测量学计算带来了很大便利^[2,3], 并且仍将发挥作用。作为克服 Fourier 变换缺点的一类新的变换——小波变换, 目前在数学及其它许多领域正受到极大关注。本文应用小波理论来研究物理大地测量学中的奇异积分。

给定物理大地测量学中的某个积分公式(如 Stokes 公式), 若需要作局部计算, 则在远区可以用现有的某个重力场代替计算, 而需要精化处理的局部, 在展平处理后, 原积分公式一般可以写成如下形式^[5]:

$$I(x) = \iint_D K(x, y) f(y) dy \quad (1)$$

这里区域 D 如图 1 所示; x_1, x_2 为局部平面直角坐标系的坐标轴; $x = (x_1, x_2)$ 为计算点, 通常取值在 D 内; $y = (y_1, y_2)$ 为积分变点; $f(y)$ 是测量结果。在式(1)中, 积分核 $K(x, y)$ 满足:

$$|K(x, y)| \leq C/|x - y|^{3-\alpha} \quad (2)$$

其中, C, α 均为正常数; $|x - y| = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$ 。若 $K(x, y)$ 仅为 $|x - y|$ 的函数, 即 $K(x, y) = K(|x - y|)$, 则根据卷积的 Fourier 变换性质, 此时利用 Fourier 变换来计算式(1)很方便, 但 Fourier 变换的计算结果只在 D 的中央部分精度较好; 若 $K(x, y)$ 不能写成 $K(x - y)$ 的形式, 则 Fourier 变换就不能使用, 因此 Fourier 变换在应用中许多缺点。本文讨论的小波理论可以克服上述 Fourier 变换的缺点, 同时使计算

速度更快。

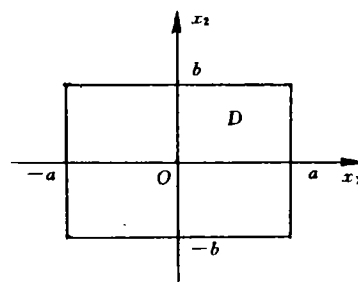


图 1

Fig. 1

1 正交多尺度分析简介

1.1 一维多尺度分析^[6,7]

用 \mathbf{R}^1 表示实数集; $L^2(\mathbf{R}^1)$ 表示 \mathbf{R}^1 上所有平方可积的函数所形成的 Hilbert 空间; \mathbf{Z} 表示整数集; 称满足下列条件的 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 中的一列闭子空间 $\{V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$ 及函数 $\varphi(t)$ 为正交多尺度分析(MRA):

- (1) $V_m \subset V_{m+1}, \forall m \in \mathbf{Z}$;
- (2) $f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m-1}$;
- (3) $\bigcap_{m \in \mathbf{Z}} V_m = \{0\}$;
- (4) $\overline{\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} V_m} = L^2(\mathbf{R}^1)$;

(5) $\varphi \in V_0$, 且 $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基, 这里 A 表示 A 的闭包。以后称 $\varphi(t)$ 为该 MRA 的尺度函数。

假设 $\varphi(t)$ 为 MRA $\{V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$ 的尺度函数, 则对 V_m 而言, 函数系 $\{\varphi_{m,j}(t)\}_{j \in \mathbf{Z}} = \{2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 构成 V_m 的标准正交基, 特别地, $\{\varphi_{-1,j}(t)\}_{j \in \mathbf{Z}} = \{2^{1/2} \varphi(2t - j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是 V_{-1} 的标准正交基。由于 $V_0 \subset V_{-1}$, 因而 $\varphi(t) \in V_0$ 可由 $\{2^{1/2} \varphi(2t -$

$j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 线性表示,即

$$\varphi(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} h_j \varphi(2t - j) \quad (3)$$

其中,
$$h_j = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(2t - j) dt \quad (4)$$

且 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} h_j^2$ 收敛。

由于 $V_m \subset V_{m-1}$, 故有正交分解:

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \quad (5)$$

这里 W_m 是 V_m 在 V_{m-1} 中的正交补。特别当 $m=0$ 时有空间 W_0 , 且 V_0 与 W_0 的直和是 V_{-1} 。若存在函数 $\psi(t) \in W_0$ 使得 $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 构成 W_0 的标准正交基, 则称 $\psi(t)$ 为 MRA 的小波函数。由于 $W_0 \subset V_{-1}$, 而 $\{\sqrt{2} \varphi(2t-j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是 V_{-1} 的标准正交基, 因此存在数列 $\{h_j^*\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 使得

$$\psi(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} h_j^* \varphi(2t - j) \quad (6)$$

可以证明以下的 $\psi(t)$ 必定是一个小波函数:

$$\psi(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (-1)^j h_{1-j} \varphi(2t - j) \quad (7)$$

此处 h_{1-j} 由式(4)给出。

若尺度函数 $\varphi(t)$ 在 \mathbf{R}^1 中具有紧支集, 即集 $\{t; \varphi(t) \neq 0\}$ 是 \mathbf{R}^1 中的有界集, 则称此时的 MRA 是紧的。可以证明, 尺度函数 $\varphi(t)$ 具有紧支集的充要条件是式(3)中的系数 h_j 仅有有限个不为零。从而由式(7)可知, 此时 $\psi(t)$ 也具有紧支集。紧的 MRA 在计算式(1)给出的积分时非常有用, 这是由于此时 $f(y)$ 要以通过有限项的和来表示, 从而保证了在 D 的边界附近式(1)计算的准确性。

1.2 多维多尺度分析^[6,7]

用 \mathbf{R}^n 表示 n 维 Euclid 空间, $L^2(\mathbf{R}^n)$ 表示 \mathbf{R}^n 上平方可积函数形成的 Hilbert 空间。设 $\{V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 的多尺度分析, $\varphi(t)$ 是尺度函数, 记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 \mathbf{R}^n 中的点, 则 $\{V_m \otimes V_m \otimes \dots \otimes V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$ 构成了 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的多尺度分析, 尺度函数为 $\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)$, 即 $\varphi_{m,j_1}(x_1) \varphi_{m,j_2}(x_2) \dots \varphi_{m,j_n}(x_n)$ ($j_k \in \mathbf{Z}, h=1, 2, \dots, n$) 构成 $V_m \otimes V_m \otimes \dots \otimes V_m$ 的标准正交基。 $V_m \otimes \dots \otimes V_m$ 在 $V_{m-1} \otimes \dots \otimes V_{m-1}$ 中的正交补为:

$$\begin{aligned} & V_m \otimes \dots \otimes V_m \otimes W_n \oplus V_m \otimes \dots \otimes \\ & V_m \otimes W_m \otimes V_m \oplus \dots \oplus W_m \otimes V_m \otimes \\ & \dots \otimes V_m \oplus V_m \otimes \dots \otimes V_m \otimes W_n \otimes W_n \oplus \\ & \dots \oplus W_n \otimes \dots \otimes W_n \end{aligned} \quad (8)$$

特别在 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 中, $V_m \otimes V_m$ 在 $V_{m-1} \otimes V_{m-1}$ 中的正交补的标准正交基为:

$$\begin{aligned} & \varphi_{m,j_1}(x_1) \psi_{m,j_2}(x_2), \varphi_{m,j_1}(x_2) \cdot \\ & \psi_{m,j_2}(x_1), \psi_{m,j_1}(x_1) \psi_{m,j_2}(x_2) \end{aligned} \quad (9)$$

此处 $j_1, j_2 \in \mathbf{Z}, \psi_{m,j}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^m t - j)$ 。事实上, 多维多尺度分析是由一维多尺度分析的张量积形成

的。

2 一维奇异积分的小波算法

本节研究一维奇异积分的小波算法, 此时式(1)可写成:

$$I(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \quad (10)$$

其中 x, y 都是一维变量。设有一个 MRA 为 $\{V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$, 其尺度函数为 $\varphi(x)$ 。 $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} V_m = L^2(\mathbf{R}^1)$ 以及 $V_m \subset V_{m-1}$, 故对足够大的正整数 m_0 和 n_0 , V_{-m_0} 和 V_{-n_0} 可近似地看成 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 。设 $f(y) \in V_{-n_0}$, 而 $I(x) \in V_{-m_0}$, 此时计算结果足以满足精度要求。由于 $f(y) \in V_{-n_0}$, 展开便有:

$$f(y) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \varphi_{n_0,j}(y) = 2^{n_0/2} \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \varphi(2^{n_0} y - j) \quad (11)$$

其中,
$$a_j = \int_0^1 f(y) \varphi_{-n_0,j}(y) dy =$$

$$2^{\frac{n_0}{2}} \int_0^1 f(y) \varphi(2^{n_0} y - j) dy \quad (12)$$

将 $K(x, y)$ 在 $V_{-m_0} \otimes V_{-n_0}$ 中展开, 便有:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} k_{ij} \varphi_{-m_0,i}(x) \varphi_{-n_0,j}(y) = \\ & 2^{(m_0+n_0)/2} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} k_{ij} \varphi(2^{m_0} x - i) \cdot \\ & \varphi(2^{n_0} y - j) \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \varphi_{-m_0,i}(x) \varphi_{-n_0,j}(y) dy = \\ & 2^{\frac{m_0+n_0}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \cdot \\ & \varphi(2^{m_0} x - i) \varphi(2^{n_0} y - j) dy \end{aligned} \quad (14)$$

将式(11)和式(13)代入式(10), 利用正交性得:

$$I(x) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} k_{ij} a_j \right) \varphi_{-m_0,i}(x) \quad (15)$$

以上便是积分 $I(x)$ 的算法, 其关键是式(12)和式(14)的计算。由于在物理大地测量中计算形如式(10)的积分时, 只需在 x 属于区间 $(\delta, 1-\delta)$ 中进行计算, 这里 δ 为某个小正数, 因此将尺度函数取成紧支集函数或速降函数时, 计算量将减少, 而且将提高求解精度。例如, 若 $\varphi(x)$ 为紧支集函数, 则式(11)和式(13)都是有限和, 且式(14)中积分限均是有限值。下面将 $\varphi(x)$ 取成 Harr 尺度函数^[6,7], 详细给出式(10)的算式。

设 $\varphi(x)$ 是 Harr 尺度函数, 即

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \notin (0, 1] \end{cases} \quad (16)$$

令
$$\varphi_{n,j}(x) = 2^{-n/2} \varphi(2^{-n} x - j) \quad (17)$$

那么 V_n 便是 $\{\varphi_{n,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 张成的闭子空间。设区间 $(0,1]$ 被均匀地分割成 2^{n_0} 个小区间, 分割点为:

$$y_l = l/2^{n_0}, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n_0} - 1, 2^{n_0}$$

设已通过测量得到值 $f(y_l), l = 0, 1, \dots, 2^n$, 现要求式(10)的积分值。取 m_0 充分大(通常取 $m_0 = n_0$, 这是因为 $f(x)$ 的观测值的分辨率为 2^{-n_0}), 考虑 V_{-m_0} 。在 Harr 基下, 式(11)可写成:

$$f(y) = 2^{n_0/2} \sum_{j=0}^{2^{n_0}-1} a_j \varphi(2^{n_0}y - j) \quad (18)$$

其中,

$$a_j = 2^{n_0/2} \int_{j/2^{n_0}}^{(j+1)/2^{n_0}} f(y) dy = 2^{-n_0/2} [f(y_j) + f(y_{j+1})] \quad (19)$$

这里对 $f(y)$ 作了线性假设。由于式(10)中的 x 取值在 $(\delta, 1-\delta)$ 中, 故将 (x, y) 限定在 $(\delta, 1-\delta) \otimes (0, 1]$ 中, 式(13)可写成:

$$K(x, y) = 2^{(m_0+n_0)/2} \sum_{i=0}^{2^{m_0}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_0}-1} k_{ij} \varphi(2^{m_0}x - i) \cdot \varphi(2^{n_0}y - j) \quad (20)$$

式中,

$$k_{ij} = 2^{(m_0+n_0)/2} \int_{\delta}^{1-\delta} \varphi(2^{m_0}x - i) dx \cdot \int_0^1 K(x, y) \varphi(2^{n_0}y - j) dy \quad (21)$$

因式(21)是已知函数的积分, 故可将 k_{ij} 计算得足够精确; 特别若 $K(x, y) = K(x-y)$, 此时利用卷积及 Parseval 等式, 便可得:

$$k_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(\xi) \hat{\varphi}_{-m_0, i}(\xi) \hat{\varphi}_{-n_0, j}(\xi) d\xi \quad (22)$$

在计算出 k_{ij} 及 a_j 后, 便可得 $I(x)$ 的值。例如, $x \in (i_0/2^{m_0}, (i_0+1)/2^{m_0}]$, 则:

$$I(x) = \left(\sum_{j=0}^{2^{n_0}-1} k_{ij} a_j \right) \varphi_{-m_0, i_0}(x) = 2^{m_0/2} \left(\sum_{j=0}^{2^{n_0}-1} k_{ij} a_j \right) \quad (23)$$

以上便是利用 Harr 尺度函数来计算积分式(10)的算式。类似地, 可以给出其它类型紧尺度函数的计算方法。为检验计算的可靠性, 计算下列积分:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{y}{|x-y|^{1/2}} dy \quad (24)$$

式中, $f(y) = y, K(x, y) = 1/|x-y|^{1/2}$, 计算结果见表 1。表中, n, m 为尺度指标。从计算结果看, 相对误差基本上可控制在 10^{-3} 以下, 在边界处计算值也较准确。由此可以充分看出小波理论计算奇异积分的优越性。

表 1 相对误差计算结果/ 10^{-3}

Tab. 1 Result of Relative Error/ 10^{-3}

x 值	尺度指标			
	n=8	m=8	n=8	m=9
0.10	0.714 9		1.015 1	
0.20	1.924 7		0.379 3	
0.30	1.658 5		0.325 0	
0.40	0.469 5		0.661 3	
0.50	1.950 6		1.014 6	
0.60	0.312 6		0.430 9	
0.70	0.663 4		0.143 2	
0.80	0.309 0		0.083 6	
0.90	0.151 9		0.241 0	

3 二维奇异积分的算法

考虑式(1)的计算, 并注意此时 $x = (x_1, x_2)$ 及 $y = (y_1, y_2)$ 都是二维变量, D 为矩形区域。选择尺度函数 $\varphi(t)$, 根据多维多尺度分析的构造, 设 $f(y) \in V_{-n_0} \otimes V_{-n_0}, I(x) \in V_{-m_0} \otimes V_{-m_0}$, 则:

$$f(y) = \sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} a_{ij} \varphi_{-n_0, j_1}(y_1) \varphi_{-n_0, j_2}(y_2) \quad (25)$$

其中,

$$a_{j_1 j_2} = \iint_D f(y) \varphi_{-n_0, j_1}(y_1) \varphi_{-n_0, j_2}(y_2) dy_1 dy_2 \quad (26)$$

求 $I(x)$ 时若将 x 的取值限定在 D 的某个紧支集 D' 上, 则 $K(x, y)$ 亦可在 $V_{-m_0} \otimes V_{-m_0} \otimes V_{-n_0} \otimes V_{-n_0}$ 中作展开:

$$K(x, y) = \sum_{i_1, i_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} k_{i_1, i_2, j_1, j_2} \varphi_{-m_0, i_1}(x_1) \cdot \varphi_{-m_0, i_2}(x_2) \varphi_{-n_0, j_1}(y_1) \varphi_{-n_0, j_2}(y_2) \quad (27)$$

其中,

$$k_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \int_{D'} dx \int_D \hat{K}(x, y) \varphi_{-m_0, i_1}(x_1) \varphi_{-m_0, i_2}(x_2) \cdot \varphi_{-n_0, j_1}(y_1) \varphi_{-n_0, j_2}(y_2) dy \quad (28)$$

若 $K(x, y) = K(|x-y|)$, 则利用卷积的性质, 有:

$$k_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{K}(\xi_1, \xi_2) \hat{\varphi}_{-m_0, i_1}(\xi_1) \hat{\varphi}_{-m_0, i_2}(\xi_2) \cdot \hat{\varphi}_{-n_0, j_1}(\xi_1) \hat{\varphi}_{-n_0, j_2}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (29)$$

式中, $\xi = (\xi_1, \xi_2); \hat{K}(\xi)$ 是 $K(x)$ 的二维 Fourier 变换, 而 $\hat{\varphi}_{-n_0, j}(\xi_1)$ 等均是一维 Fourier 变换。注意, 式(26)是观测值 $f(y)$ 的小波频谱, 而式(28)或式(29)则是核函数 K 的小波频谱。将式(25)和式(27)代入式(1), 便得 $I(x)$ 的算式如下:

$$I(x) = \sum_{i_1, i_2 \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} k_{i_1, i_2, j_1, j_2} a_{j_1 j_2} \right) \cdot \varphi_{-m_0, i_1}(x_1) \varphi_{-m_0, i_2}(x_2) \quad (30)$$

从式(30)可知,计算奇异积分式(1)关键在于式(26)和式(28)的频谱计算。与 Fourier 变换相比,小波算法可以用于计算非卷积型奇异积分,同时对卷积型积分,算式可以简化,此时的计算量较 Fourier 变换法少。更重要的是,在边界处小波算法具有很好的收敛性。因此,小波理论在局部重力场研究中将会是一种有力的计算工具。

在物理大地测量学中,除 Stokes 公式外,其它诸如 G_1 项的计算及地形影响的计算等,可以表示成下列积分^[1,2]:

$$J(P) = \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^\alpha}{l_0^3} f d\sigma \quad (31)$$

式中, α 取 1 或 2; σ 为单位球面。严格来讲,上述类型积分的核函数 $(h - h_p)^\alpha / l_0^3$ 与测量的值相关,因而式(31)是非卷积型的。从数学角度来看,只有将 $(h - h_p)^\alpha / l_0^3$ 看成是一个整体时,式(31)才有意义。若将 $(h - h_p)^\alpha$ 展开,考虑积分

$$\iint_{\sigma} \frac{h^2 - f}{l_0^3} d\sigma \quad (32)$$

的计算时,因不满足收敛性条件式(2),故会遇到不收敛的情况。也就是说,式(32)没有意义。

本文只用到了尺度函数 φ 而没有用到小波函数 ψ , 是因为事先假定 V_{-m_0} 已经满足精度要求。若 V_{-m_0} 不能满足精度要求,则必须在 V_{-m_0-1} 中继续计算,需要补算的项为 W_{-m_0} , 然后再根据 Mallat 算法可得在 V_{-m_0-1} 精度下的解。

参 考 文 献

- 1 Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco; Freeman W H, 1967
- 2 Forsberg R. A Study of Terrain Reductions and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling. The OSU Report, 1984(355)
- 3 于锦海,党诵诗. 非线性 Molodensky 问题的一种新解法. 测绘学报, 1992(4): 249~258
- 4 于锦海,朱灼文. 非线性固定重力边值问题. 中国科学(B辑), 1994(3): 294~302
- 5 边少峰. 大地测量边值问题数值解法与地球重力场逼近: [学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1992
- 6 崔锦泰. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1997
- 7 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京: 世界图书出版公司, 1995

Computing the Singular Integrals in Physical Geodesy by Using Wavelet Theory

Yu Jinhai Zhu Zhuorwen Guo Jianfeng

(Dept. of Basic Courses, Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou, China, 450052)

Abstract The computations of singular integrals are an important chain for practical applications of physical geodesy. It is our purpose in this paper to investigate the problem of computing singular integrals by means of wavelet theory. The fast operation and high precision have been illustrated by a practical example for one-dimension case. As a comparison with Fourier transform, kinds of advantages of wavelet theory have been shown up. Definetly to say, wavelet theory is a great important tool for practical applications to study local gravity field.

Key words wavelet theory; singular integral; physical geodesy; Harr scaling function