

粗差估值型抗差估计

杨世清 余学祥 吕伟才

(淮南矿业学院资源环境系,安徽省淮南市,232001)

摘要 在测量数据处理中,解差受到观测空间和设计空间的双重影响。本文导出了粗差估值与解差的关系,进而得出了以粗差估值表示的 LS 估计的影响函数。通过对粗差估值加以限制,根据等价权原理,实现 LS 估计对观测空间和设计空间的抗差性。算例表明,粗差估值型抗差估计对观测空间和设计空间均具有良好的抗差效果。

关键词 抗差估计;粗差估值;解差;观测和设计空间;等价权

分类号 P207.1

参数估值不仅受到观测空间的影响,而且也受到设计空间的影响。由于经典最小二乘估计 (LS 估计)对这两种影响均缺乏抵抗作用,致使当观测值中存在单个粗差时,参数估值就会受到严重的影响。自 1953 年 G. E. P. Box 提出抗差估计理论以来,国内外学者分别提出了许多抗差估计方案。如为了克服观测空间对参数估值的影响,文献 [1, 2]中给出了 Huber 权函数法、Tukey 权函数法及丹麦权函数法等抗差方案,其中较为实用且抗差效果较好的是 IGG1 方案,但这些方案均不能克服设计空间对参数估值的影响。为了使参数估值能同时抵制观测空间和设计空间的影响,文献 [1, 2]提出了 IGG1 方案及有界影响抗差估计。但实际进行测量数据处理时,采用 IGG1 方案,预处理工作量较大;而文献 [3]中的方案,条件数的计算较为麻烦。至于有界影响抗差估计,虽然对杠杆观测值具有较好的抗差性,但对非杠杆观测值的抗差效果不理想。本文以粗差估值构造的等价权函数,既能较好地抵制观测和设计空间对参数估值的影响,又具有简明易行的特点。因此,大大加强了抗差估计的实用效果。

1 观测误差对参数估值的影响

设有独立观测值 $L_i (i=1, 2, \dots, n)$, 其对角权矩阵为 P , 参数估值为 $\hat{X}_{m,1} (m < n)$, X_0 为 \hat{X} 的近似值, $W\hat{X}$ 为 X_0 的改正数, 则线性化后的误差方程为:

$$V = \begin{matrix} A \\ n,1 \end{matrix} \begin{matrix} W\hat{X}_{m,1} \\ n,m \end{matrix} - \begin{matrix} f \\ n,1 \end{matrix}, \quad \text{权} \begin{matrix} P \\ n,n \end{matrix} \quad (1)$$

其中,

$$f = L - AX_0 = L - L_0$$

若 L_0 是由待估参数的真值 X 计算而得, 则 f 代表观测值的真误差 Δ 。根据协因数阵传播律可得:

$$V = - (Q_{VV}P)X \quad (2)$$

式中, $Q_{VV} = P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T$ 。 $(Q_{VV}P)$ 矩阵由设计方案确定, 称为平差的几何条件, 它反映了观测误差 Δ 对残差 V 的作用程度。定义 $(Q_{VV}P)$ 的第 i 个对角元素为第 i 个观测值的多余观测分量 r_{ii} , 对于任一观测值, 由式 (2) 有:

$$\begin{aligned} v_i &= - (Q_{VV}P)_{ii}X - \sum_{j \neq i}^n (Q_{VV}P)_{ij}X \\ &= - r_{ii}X - \sum_{j \neq i}^n r_{ij}X \end{aligned} \quad (3)$$

对于独立观测值而言, $0 \leq r_{ii} \leq 1$ 。因此某一观测值 L_i 的误差 Δ 在其残差 v_i 中仅能得到部分反映, 其反映的可靠程度大小, 主要取决于该观测值的多余观测分量 r_{ii} 。当 r_{ii} 较小时, 若 L_i 中含有粗差, 则 L_i 不能通过 v_i 而得到改正, 从而影响到参数估值 \hat{X} 。若 $r_{ii} \sim 0$, 称 L_i 为杠杆观测值, 当其含有粗差时, 则对 \hat{X} 产生破坏性影响。所以, r_{ii} 从一个侧面反映了平差结果的可靠性程度。

观测值 L_i 对参数估值的影响可用解差来表示。在观测值 L 中, 去掉第 i 个观测值 L_i 后, 所得的参数估值记为 $\hat{X}_{(i)}$, 则解差为:

$$\Delta \hat{X}_{(i)} = \hat{X}_{(i)} - \hat{X} \quad (4)$$

经推导得^[1]:

$$\Delta \hat{X}_{(i)} = N^{-1} a^T P_i v_i / r_{ii} \quad (5)$$

式 (5) 中 a 为 A 之第 i 行。将式 (3) 代入式 (5) 得:

$$\Delta \hat{X}_{(i)} = - N^{-1} a_i^T P_i (X + \sum_{r_{ij} \neq i}^n n_j X_j) \quad (6)$$

在式 (3) 中, 由于 $r_{ij} (i \neq j)$ 一般小于 r_{ii} , 且有正有负, 故式 (3) 右端的第二项有相互抵消的现象^[2]。若不计其影响, 则式 (3)、(6) 可分别表示为:

$$\begin{aligned} v_i &\approx - r_{ii} X \\ \Delta \hat{X}_{(i)} &\approx - N^{-1} a_i^T P_i X \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) 即为粗差估值的计算模型。设第 i 个观测值的粗差估值为 $\Delta \hat{l}_i$, 由式 (7) 有:

$$\Delta \hat{l}_i = - v_i / r_{ii} \quad (9)$$

式 (8) 为 LS 估计影响函数的近似表达式。LS 估计的影响函数为:

$$IF(L_i; \hat{X}, F) = N^{-1} a_i^T P_i X \quad (10)$$

以式 (9) 代替式 (10) 中的 X , 则 LS 估计的影响函数又可近似表示为:

$$IF(L_i; \hat{X}, F) \approx - N^{-1} a_i^T P_i \Delta \hat{l}_i \quad (11)$$

由于 LS 估计对观测误差不加约束, 致使其影响函数无界, 所以 LS 估计不具备抗差性。若对式 (11) 中的 $\Delta \hat{l}_i$ 加以限制, 则可使 LS 估计达到抗差的目的。这正是本文的出发点。

由式 (9) 可以看出, 粗差估值 $\Delta \hat{l}_i$ 受两个因素的影响: 其一为该观测值的残差 v_i , 即受观测空间的影响; 其二为该观测值的多余观测分量 r_{ii} , 它取决于设计平差图形的几何结构 (矩阵 A), 即受设计空间的影响。所以, 通过对 $\Delta \hat{l}_i$ 加以限制, 可使 LS 估计对观测空间和设计空间均具有抗差作用。本文把这种抗差估计方案称为粗差估值型抗差估计。

2 粗差估值型抗差估计模型

抗差估计的抗差效果取决于等价权函数。等价权函数不同, 抗差估计就不同, 当然其抗差效果也不同。因此, 不同的等价权函数定义了不同的抗差估计。

2.1 等价权函数

设

$\bar{r} = (n - m) / n, k_A = k_0 \bar{r}, k_B = k_1 \bar{r} \quad (12)$

式中, \bar{r} 为平差图形的平均多余观测分量, 它反映了设计空间整体的完善程度, 即监控观测误差的能力。 k_0, k_1 为两常数, 一般取为 $k_0 = 1.0 \sim 1.5, k_1 = 1.5 \sim 2.5$ ^[2]。定义粗差估值型抗差估计模型的等价权函数为:

$$\bar{p}_{ii} = \begin{cases} p_{ii} & |\Delta \hat{l}_i / \hat{e}_0| \leq k_A \\ p_{ii} \frac{k_A}{|\Delta \hat{l}_i / \hat{e}_0|} & k_A < |\Delta \hat{l}_i / \hat{e}_0| \leq k_B \\ 0 & |\Delta \hat{l}_i / \hat{e}_0| > k_B \end{cases} \quad (13)$$

式中 \hat{e}_0 为单位权中误差。由式 (13) 定义的等价权有如下特点:

1) 对某一设计平差图形来说, 若其平均多余观测分量 \bar{r} 较大, 该平差系统对观测误差有较好的监控能力, 即对粗差较敏感, 则 k_A, k_B 应较小; 若 \bar{r} 较小, 则该平差系统对观测误差的监控能力较差, 对粗差不敏感, 则 k_A, k_B 相应较大。按式 (12) 定义的 k_A, k_B 正具有这一性质, 这也是本方案与其它方案的不同点之一。根据式 (12) 由 k_A, k_B 确定的观测值区间, 对不同平差图形是不同的。

2) 根据式 (13) 确定的等价权, 将观测值分成正常域、可疑域和淘汰域 3 部分, 对这 3 部分观测值相应采取 LS 估计、降权处理及淘汰不用, 因而具有抑制异常值或粗差对参数估值影响的能力, 从而达到抗差目的。

3) 由于粗差估值 $\Delta \hat{l}_i$ 取决于观测空间 (v_i) 及设计空间 (r_{ii}) 的影响, 因此由式 (13) 确定的抗差方案对观测空间和设计空间均有抗差能力。

4) 对于 n_i 较小的观测值 (称为杠杆观测值), 当观测误差 X 较大时 (认为含有粗差), 由于 $\Delta \hat{l}_i$ 与 X 相当 (式 (7)、(9)), 因而该方案对杠杆观测值中的粗差, 也具有较好的抗差效果 (见算例)。

2.2 解算方法

抗差估计需迭代求解, 迭代计算公式为:

$$\hat{X}^{(k)} = \hat{X}^{(k-1)} + W \hat{X}^{(k)} \quad (14)$$

$$V^{(k)} = A W \hat{X}^{(k)} - f^{(k-1)} \quad (15)$$

$$\hat{e}_0^{(k)} = \sqrt{V^{(k)T} P^{(k-1)} V^{(k)} / (n - m - t)} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} W \hat{X}^{(k)} &= (A^T P^{(k-1)} A)^{-1} A^T P^{(k-1)} f^{(k-1)} \\ f^{(k-1)} &= L - A \hat{X}^{(k-1)} \end{aligned}$$

在式 (16) 中, t 为被淘汰的观测值个数, 对于独立观测值而言, 即 $\bar{p}_{ii} = 0$ 的个数。当 $k = 1$ 时, 即进行 LS 估计, 此时 $\hat{X}^{(0)} = X_0, P^{(0)} = P$ (先验权阵)。等价权 $P^{(k-1)}$ 是以前一步计算得的 $\hat{e}_0^{(k)}$ 及 $\Delta \hat{l}_i^{(k)}$ 代入式 (13) 计算而得的。具体迭代步骤可参阅文献 [1]。当前后两次迭代计算得到的参数估值之差 $|\hat{X}^{(k)} - \hat{X}^{(k-1)}|$ 满足迭代收敛精度时, 即可停止计算, 此时即获得了参数估值的抗差解。

3 算 例

图 1 为一水准网, 其多余观测分量最大为 0.790 (h_3), 最小为 0.199 (h_{13}), 平均为 0.50。为了考察本文提出的抗差方案对观测空间和设计空间

的抗差效果,根据多余观测分量的不同,采用对原观测值(经处理认为没有粗差)加粗差的方法,制订了 18个方案.从中摘录具有代表性的 8个(见表 1),原观测值作为零方案.对这 9个方案分别进行 LS估计和抗差估计.

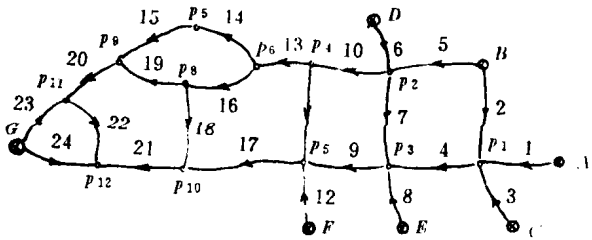


图 1 水准网略图
Fig. 1 Sketch of Level Network

表 1中列出了抗差估计迭代收敛后,等价权为零的观测值位置及相应的残差.从表中可以看出,不论所加粗差的观测值的多余观测分量的大小如何,以及观测值中所含粗差个数的多寡(从 1 个到 4个),抗差估计迭代收敛后,含粗差的观测值的等价权均为零(即被淘汰了),且残差与所加粗差基本相同(最大相差 2.3mm),符号相反.这是因为当等价权为零时,对于独立观测值而言,由式(2)可知其 $r_{ii}=1$,则由式(7)有 $v_i \approx -X$.

当用 IGL 方案或有界影响抗差估计对表 1 中的 8个方案进行计算时,前者仅对 D_{22} 方案有效;而后者对这 8个方案均无效.此外,还采用学生化残差,对这 8个方案进行粗差探测,除对 D_{22} 方案进行了正确的粗差定位外,其它 7个方案都未正确发现粗差.所以,采用粗差估值型抗差估计模型,不仅能对粗差进行正确的定位,获得可靠的粗差,而且还具有比其它抗差估计方案更为有效

的特点.

表 1 方案及粗差定位结果
Tab. 1 Scheme and the Results of Positioning Outliers

方案号	粗差位置	粗差 (mm)	r_{ii}	零等价 权位置	残差 (mm)
D_1	13	+ 5	0.199	13	- 4.6
D_{21}	3	- 4	0.790	3	+ 6.1
	13	+ 5	0.199	13	- 4.6
D_{22}	3	- 4	0.790	3	+ 6.0
	9	+ 6	0.686	9	- 4.9
D_{31}	3	- 5	0.790	3	+ 7.0
	9	- 5	0.686	9	+ 6.1
	13	+ 5	0.199	13	- 4.7
D_{32}	5	+ 7	0.761	5	- 8.4
	9	+ 6	0.686	9	- 4.8
	19	+ 8	0.323	19	- 5.7
D_{41}	6	+ 10	0.706	6	- 8.5
	9	+ 6	0.686	9	- 5.0
	19	+ 8	0.323	19	- 5.8
	24	- 10	0.468	24	+ 9.5
D_{42}	3	- 5	0.790	3	+ 7.1
	9	- 5	0.686	9	+ 6.2
	11	+ 5	0.359	11	- 5.8
	17	+ 9	0.501	17	- 10.8
D_{43}	2	+ 9	0.660	2	- 11.4
	10	+ 6	0.517	10	- 7.4
	17	+ 9	0.501	17	- 10.0
	21	+ 6	0.330	21	- 7.3

对以上各方案分别进行 LS估计和抗差估计,并以零方案的 LS估计结果为标准,其它各方案两种估计方法所得的参数估值与之相比较.对于表 1中的 8个方案,当采用 LS估计时,参数估值及单位权中误差均受到了破坏性的影响.当采用抗差估计时,各方案所得的参数估值与零方案的参数估值之差及单位权中误差列于表 2中.

表 2 参数估值比较 (/mm)
Tab. 2 Compare the Estimators of Parameters(/mm)

方案	ΔH_1	ΔH_2	ΔH_3	ΔH_4	ΔH_5	ΔH_6	ΔH_7	ΔH_8	ΔH_9	ΔH_{10}	ΔH_{11}	ΔH_{12}	$\hat{\sigma}_0$
D_0 LS 抗差	结 果 相 同												1.2
													1.2
D_1	0	0	0	- 0.1	0	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.1	0	0	- 0.1	1.2
D_{21}	+ 0.5	+ 0.1	+ 0.1	- 0.1	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.1	0	0	+ 0.1	1.2
D_{22}	+ 0.4	+ 0.1	0	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	0	+ 0.1	1.2
D_{31}	+ 0.4	0	0	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.4	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	1.3
D_{32}	0	- 0.4	- 0.3	- 0.2	+ 0.1	- 0.2	+ 0.2	- 0.6	+ 0.9	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.1	1.3
D_{41}	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.2	0	+ 0.4	- 0.5	+ 0.9	- 0.1	+ 0.2	- 0.1	1.3
D_{42}	+ 0.5	+ 0.2	0	+ 0.6	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	- 0.5	- 0.1	- 0.2	1.2
D_{43}	- 0.1	+ 0.1	+ 0.1	- 0.4	+ 0.1	- 0.3	- 0.3	- 0.2	- 0.3	0	- 0.3	- 0.5	1.3

从表 2 中可以看出,当观测值中不含粗差时(D_0 方案),LS 估计和抗差估计的结果是一致的。因此,可以认为粗差估值型抗差方案,满足 Fisher 一致信息这一条件^[6]。当观测值中含有粗差时,无论是参数估值还是单位权中误差,与 D_0 方案的结果均极为接近。对于参数估值,最大相差 0.9mm,不超过 D_0 方案的单位权中误差;对于单位权中误差,与 D_0 方案相比,最大相差仅为 0.1mm,可以认为是相同的。可见,粗差估值型抗差估计所获得的结果是可靠的。

4 结 论

- 1)本文提出的粗差估值型抗差估计,同其它抗差方案相比,具有方法简洁、结果可靠、便于实施的特点。在本方案中,根据平差图形结构的完善程度,参数 k_A 、 k_B 的取值是不相同的,因而更符合测量实际情况。
- 2)本方案对观测空间和设计空间均具有良好的抗差性。当观测值中含有单个或多个粗差时,不论含粗差观测值的多余观测分量较大还是较小,

对粗差均能做到正确定位,并可获得近于实际的粗差。这在测量生产实践中,为制订高效的重测方案提供了依据。

3)不论观测值中是否含有粗差,本方案均可获得可靠的参数估值和精度信息。

参 考 文 献

1 杨元喜. 抗差估计理论及其应用. 北京: 八一出版社, 1993.

2 周江文,杨元喜,欧吉坤,王跃进. 抗差估计论文集. 北京: 测绘出版社, 1992.

3 黄幼才. 杠杆点评估及设计空间抗差. 测绘学报, 1993 (4): 287~ 293

4 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 北京: 测绘出版社, 1988.

5 王金岭,陈永奇. 论观测值的可靠性度量. 测绘学报, 1994(4): 252~ 258

6 黄幼才. 抗差估计理论综述. 冶金测绘, 1993(2): 60~ 62

7 黄维彬. 近代平差理论及其应用. 北京: 解放军出版社, 1992.

Robust Estimation with the Estimator of Outliers

Yang Shiqing Yu Xuexiang Lü Weicai
(Huainan Mining Institute, Huainan, Anhui, China, 232001)

Abstract The difference of solutions are influenced by both observation space and design space. This paper, based on the relationship between the difference of solutions and the estimator of outliers, derives the influence function of LS estimation which is expressed by the estimator of blunders; according to the principle of equivalent weight, realizes robustifying LS estimation to observation space and design space with the method to limit the estimator of gross errors. Examples show that robust estimation with the estimator of outliers has sound robustinity to both observation space and design space.

Key words robust estimation; estimator of outliers; the difference of solutions; observation and design space; equivalent weight