

地图数学定义的研究

钟业勋 李占元

(广西壮族自治区测绘局,南宁市建政路5号,530023)

摘要 在地图内容和形式数学表示的基础上研究了地图的数学定义。由于引入隐式地图和变换条件,故所有储存地图信息的载体均可属于地图的范围,从而使地图定义获得了广义的解释和精确的表达。

关键词 地图符号;图的定义;隐式地图;变换;地图的数学定义

分类号 P 28

中外地图学者曾对地图作出过多种定义,大多数是文字描述的,具有模糊性。为使地图定义表述准确化并获得更广义的解释,本文对地图的数学定义进行了探讨。

1 地图定义的引述和分析

关于地图的定义,目前还没有统一的意见,现引述若干有代表性的定义供分析。

(1) 地图是周围环境的图形表达^[1]。

(2) 地图是空间信息的图形表达^[1]。

(3) 地图是反映自然和社会现象的形象符号模型^[1]。

(4) 地图是信息传输的通道^[1]。

(5) 地图是地球或天体表面上,经选择的资料或抽象的特征和它们的关系,有规则按比例地在平面介质上的描写^[1]。

(6) 测绘辞典上给出了如下定义:地图是按一定法则,有选择地在平面上表示地球(或其它星球)上若干现象的图。具有严格的数学基础、符号系统、文字注记,并采用制图综合原则科学地反映出自然和社会现象的分布特征及相互关系。

(7) 地图是客观实体的形象——符号化的空间模型。地图详细记录了制图对象的空间分布、组合、联系和随时间的变化,从而作为信息传递的工具。地图反映出的各要素相互作用和发展变化的科学规律,可以创造出新的信息,可成为人们认识世界和改造世界的有力工具^[2]。

(8) 地图是按照一定的数学法则,将地面上的自然和社会经济现象,通过制图综合,用符号缩绘在平面上的图形,以表达它们的数量和质量特征在空间的分布以及时间上的变化^[3]。

(9) 地图是用符号表示的地面上的概括化了的图形,它必须经过数学变换建立在平面上。地图作为人们认识和研究客观存在的结果,可以反映各种自然、社会现象的空间分布,也当作人们认识和研究客观存在的工具,去获得新知识^[4,5]。

地图的定义还有其他的表述 以上定义有以下特点:

(1) 在表示内容上,强调“是地球或天体表面上”的事物,“自然和社会现象的空间分布”、“空间信息”等;

(2) 在形式上,强调是“图形表达”、“形像符号”、“概括化的图形”等等;

(3) 均为文字描述型定义,具有模糊性;

(4) 目前出现于地图学领域的概念如数字地图等,未能用上述定义合理解释。

2 地图的内容

2.1 地图表示的对象

地图是客观世界的同态模型。客观世界同类事物的集合,构成现实世界各种物体或现象的分类:居民地、水系、地貌、道路、植被、境界等等。事物分类的详略,取决于对事物或现象定义“同类”的层次或水平。定义“同类”概念的内涵越深,其外延就越窄,分类就越详细。反之亦然^[6]。客观世界是个不断变化发展着的开放系统。地物变化的速度,随不同地物、不同地区、不同的社会环境而千差万别。地物的状态,表现为时间t的函数:

$$x_i(t) = f_i(t) \quad (1)$$

(1) 式表明,不同的地物有不同的状态函数。

2.2 地图表示的个体地物 x_{ijM}

地图是符号的集合,点线符号(实点集)和

面状符号(虚点集)在地图上相对比而存在,两者在反映客体特征方面起着相辅相成的作用^[8]。图形与背景的对立统一,使任何一点不属点线符号,即属面状符号,二者必居其一。除了规划图、预测图等非现实表象类地图外,一般地图总是对客体某一状态进行表征。当 $t = t_1$ 时,客体在 t_1 时刻的状态便是被制图并固化的状态。至于在 t 时刻,某点该表示客体的何种性质,用什么符号,则与专题 j 和地图比例尺 M 有关。专题不同,同一点上地物被抽象的性质也不一样:地形图上取高程,气温图上取温度,人口图上取人口等等。比例尺不同,符号也有所差异:大比例尺图上可用依比例符号,而小比例尺图则演化为非比例符号,当该地物数量够不上选取资格时,会被完全舍弃而变成背景符号。所以,制图物体 X_{ijM} 在地图上的映象(符号)表现为专题 j 地图比例尺 M 的函数:

$$f_{jM}: X_{ijM} \rightarrow U_{ijM} \quad (2)$$

2.3 制图区域 j 专题 M 比例尺的制图物体 X_{ijM} 及其地图符号 U_{ijM}

设 i 的指标集为 I , X_{ijM} 表现为 X_{ijM} 的并集:

$$X_{ijM} = \bigcup_{k \in I} X_{ijkM} \quad (3)$$

U_{ijM} 表现为 U_{ijkM} 的并集:

$$U_{ijM} = \bigcup_{k \in I} U_{ijkM} \quad (4)$$

2.4 制图区域多专题 M 比例尺的制图物体 X_{IJM} 及其符号 U_{IJM}

设 j 的指标集为 J ,则 X_{IJM} 表现为 X_{ijM} 的并集:

$$X_{IJM} = \bigcup_{k \in J} X_{ijkM} \quad (5)$$

U_{IJM} 表现为 U_{ijkM} 的并集:

$$U_{IJM} = \bigcup_{k \in J} U_{ijkM} \quad (6)$$

2.5 制图区域多专题系列比例尺的制图物体 X_{IJM} 及地图符号 U_{IJM}

设 M 的指标集为 \bar{M} ,则 X_{IJM} 表现为 X_{IJM} 的并集:

$$X_{IJM} = \bigcup_{M \in \bar{M}} X_{IJM} \quad (7)$$

U_{IJM} 表现为 U_{IJM} 的并集:

$$U_{IJM} = \bigcup_{M \in \bar{M}} U_{IJM} \quad (8)$$

2.6 非制图物体 X_{IJM}^C 及其观念反映 U_{IJM}^C

在制图区域内,除制图物体 X_{IJM} 外,还有一类毋需地图表示的物体,这类物体称为非制图物体,用 X_{IJM}^C 表示,它为 X_{IJM} 的补集:

$$X_{IJM}^C = 1 - X_{IJM} \quad (9)$$

非制图物体也可被认识,被反映。关于非制图物体 X_{IJM}^C 的知识集合 U_{IJM}^C 便是人们对 X_{IJM}^C 的观念反映。 U_{IJM}^C 为 U_{IJM} 的补集:

$$U_{IJM}^C = 1 - U_{IJM} \quad (10)$$

2.7 地图内容

符号是人的认识思想的一种贮存和表达的形式^[9]。地图是地图作者认识和理解的客观世界并经过科学抽象和概括处理的符号表达,是对客观世界的观念反映。根据某一符号集对前面定义的地图符号 U_{IJM} 与非地图符号 U_{IJM}^C 两大体系的从属关系,便可定义地图内容:

定义 1 地图内容 存在着 $A \in U_{IJM}$, 则称 A 为地图内容。

定义 2 非地图内容 存在着 $A \notin U_{IJM}$, 则称 A 为非地图内容。

3 地图的形式

地图反映制图区域的自然与社会要素的构成及彼此关系,传输制图区域与制图目的相关的空间信息,采用的是图像的形式。地图属图的子集,逻辑上应符合图的定义。

3.1 图的定义

定义 3 图的定义 有序三重集合

$$G = \{V(G), E(G), j_G\} \quad (11)$$

称为一个图,其中 $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 j_G 分别为顶点集合、边集合、关联函数。 $\forall e \in E(G), \exists$ 唯一的顶对 $u, v \in V(G)$,使得 $j_G(e) = uv$;当 u 与 v 无序时, G 叫做无向图;当 u, v 有序时, G 叫做有向图;记 $|V(G)| = v, |E(G)| = X$,当 $X < +\infty$ 时, G 叫做有限图,否则为无限图^[10]。

3.2 图的集合

定义 4 图的集合 设图的集合为 GN

$$GN = \{G \mid G \in GN\} \quad (12)$$

G 由 (11) 式给出。

3.3 显式信息和隐式信息

视觉是人们接收信息的主要通道,用视觉接收的信息约占所接收信息的 83%^[11]。根据信息能否被视觉直接接收,我们分别定义显式信息和隐式信息。

3.3.1 显式信息

定义 5 显式信息 凡能被视觉直接接收的信息,称为显式信息,用 Q 表示。若存在 $A \in Q$, 则称 A 为显式信息或可视化信息。

3.3.2 隐式信息

定义 6 隐式信息 凡不能被视觉直接接收的信息,称为隐式信息,用 Q^C 表示。若 $B \in Q^C$, 则称 B 为隐式信息。

隐式信息与显式信息互为补集:

$$\mathcal{Q} = 1 - Q \quad (13)$$

隐式信息与显式信息的并集构成客观世界庞大的包罗万象的信息体系。

观察者的背景知识也即是他的认知结构。具有不同认知结构的观察者,对显式信息的接收也存在差异。背景知识不同,对感觉图像的组织形式不同,对同一对象,观察者所看到的东西也就可能不同,即便看到的东西是相同的,由于对观察结果的解释不同,也可能得出不同的结论^[11]。由于信息的视觉接收与思维加工的不可分割的联系,我们把这一思维加工过程,看作是显式信息的接收过程。

显式信息与隐式信息的界线,受观察者的视力、认知结构、环境等多重因素的影响。对特定的人和特定的环境,必定存在着与之相应的显式信息与隐式信息。若以工具为中介,可进一步扩大显式信息的范围和认识显式信息的深度。例如,用天文望远镜可看到遥远的天体,用显微镜可细察细胞的结构等。

3.3.3 变换

映射、变换,或者对应,都是函数的同义语^[12]。

定义 7 变换 设 $A \subset Q, B \subset Q$, 若 B 、 A 间存在关系 $f, f: B \rightarrow A$, 使得 $f(B) = A \subset Q$, 则称 f 为从 B 到 A 的变换, 简称信息显化; $f^{-1}(a) = B \subset Q^C$, 称为从 A 到 B 的逆变换, 简称信息隐化。

变换的集合用 F 表示, 则

$$F = \{f \mid f \in F\} \quad (14)$$

变换是隐式信息显化的条件, 是联系隐式信息和显式信息的中介。底片显影、数图转换、多媒体图文显示、思维内容的文字或符号表达等, 均属信息显化变换。

逆变换的集合用 F^{-1} 表示:

$$F^{-1} = \{f^{-1} \mid f^{-1} \in F\} \quad (15)$$

逆变换是信息隐化的条件。复照中在感光底版上形成的隐像、地图数字化贮存、信息的多媒体贮存、大脑记忆等, 均属信息隐化变换。

4 地图的数学定义

地图是地图内容和形式的同一体。

4.1 显式地图

定义 8 显式地图 存在着信息集 $A \in Q$, 当

$$A = \{x \mid x \in GN \wedge x \in U_{LM}\} \quad (16)$$

时, 称 A 为显式地图。

当 $A = U_{LM}$ 时, 称 A 为 j 专题的 M 比例尺地图。

4.2 隐式地图

随着计算机技术、遥感技术等高科技进入地图学领域, 引起了地图概念的深刻变化, 出现了诸如“数字地图”、“电子地图”等新概念。然而, 不考虑内容与形式的同一, 将贮存地图信息的非图形式的载体无条件地纳入地图概念范畴, 未免有悖于逻辑。高俊教授对此也认为“那算不算是地图还值得研究”^[4]。为使地图数字化贮存的隐式信息能合乎逻辑地纳入地图范畴, 有必要引入隐式地图概念。

定义 9 隐式地图 存在着信息集 $B \in Q$, 和变换 f , 使得 $f(B) \in Q$ 且满足

$$f(B) = \{x \mid x \in GN \wedge x \in U_{LM}\} \quad (17)$$

则称 B 为隐式地图, $f(B)$ 称为 B 的显化, f 称为隐显变换。

地图数字化贮存的磁盘、光盘等, 均属于隐式地图。

比较 (16) 式与 (17) 式可知, 显式地图与隐式地图有相同的内容实质, 但外在形式不同, 后者可以通过变换来实现内容与形式的同一。

4.3 地图制图资料

定义 10 地图制图资料 存在着地图 U_{LM} , 若 $P \in U_{LM}$, 且

$$P = \{x \mid x \in GN \vee x \notin GN, x \in U_{LM}\} \quad (18)$$

则称 P 为地图 U_{LM} 的制图资料。当 $x \in GN$ 时, 为地图资料; 当 $x \notin GN$ 时, 为非地图形式制图资料, 如文字及数字资料等。

4.4 非地图

定义 11 非地图 存在着信息集 $S \in Q$, 若 $S = \{x \mid x \in GN \wedge x \in U_{LM}\}$, 则称 S 为非地图。心电图、电路图、人体解剖图等属此类。

地图与非地图的并集, 构成图类的庞大体系。非地图也同地图一样, 存在隐式图与显式图, 也可通过变换来实现相互转化。

5 结论

本文在地图内容和形式的数学表述的基础上, 给出了地图的数学定义, 从而使地图定义获得了精确的数学形式, 既克服了文字描述型定义的模糊性, 又使其在理论上更趋完善。

地图是信息的重要载体和传输通道, 信息的视觉接收又占人们接收信息中的极大比例。本文

把信息概括划分为隐式信息和显式信息两大类，并以变换为条件实现相互转化。这一理论形式符合事物对立统一和相互转化的原理，并可解释许多经验事实。据此引入的隐式地图概念，为贮存地图信息的非图形形式载体，如地图数字化磁盘、光盘等能合乎逻辑地纳入地图范畴，从而使地图定义获得了广义的解释。

地图数学定义的基础是地图内容和地图形式的公式表述。在地图内容中，“制图区域”是个未加定义的概念，它的外延可随人们认识领域的扩大而扩大，适用于包括其他星球在内的一切区域。制图物体性质 i 的指标集 I ，专题 j 的指标集 J ，比例尺 M 的指标集 M ，是从属于“制图区域”的概念，制图区域的可扩缩性使它们具有广泛的适用性，因此，任何性质的事物，任何专题内容和任何比例尺地图，均可包含其中。这一特点，可使地图定义在今后科学技术发展的进程中，具有相对的稳定性和可解释性。

参 考 文 献

1 田德森.现代地图学理论.北京:测绘出版社, 1991.

- 2 祝国瑞, 尹贡白.普通地图编制(上册).北京: 测绘出版社, 1982. 9~ 10
- 3 陆漱芬, 陈由基, 王近仁等.地图学基础.北京: 高等教育出版社, 1987.
- 4 高俊.地图·地图制图学, 理论特征与科学结构.地图, 1981 (1)
- 5 陆权, 喻哈.地图制图参考手册.北京: 测绘出版社, 1988.
- 6 钟业勋.地图异构变换的数学模型及其在地图发展演进中的意义.测绘工程, 1996 (3)
- 7 钟业勋.地图制图数学模型的探讨.地图 1996 (增刊).
- 8 钟业勋, 胡毓钜.地图的集合模型(表达式)及比较应用初探.武汉测绘科技大学学报, 1990 (1)
- 9 李述一.理论世界的创造.北京: 人民出版社, 1988. 164
- 10 王树禾.图论及其算法.合肥: 中国科学技术出版社, 1990.
- 11 齐振海.认识论新论.上海: 上海人民出版社, 1988.
- 12 李孝传, 陈玉清.一般拓扑学导引.北京: 教育出版社, 1982.

A Research on the Mathematical Definition of Maps

Zhong Yexun Li Zhanyuan

(Guangxi Regional Bureau of Surveying and Mapping, 5 Jianzheng Road, Nanning, China, 530023)

Abstract On the basis of the mathematical expressions of the cartographic contents and mode, the mathematical definitions of maps are studied. By conducting the implicit map and transformation condition in the map definition all sorts of the cartographic information belong to map category, and thus the map definition gets a more general and precise expression.

Key words cartographic symbol; graphic definition; implicit map; transformation; mathematical definition of maps