

多余观测分量与可靠性度量指标研究*

黄声享 王金岭

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 39 号,430070)

摘要 讨论了相关观测值与非相关观测值的多余观测分量值域问题;论证了相关观测值的多余观测分量与内可靠性指标的不一致性;进一步研究了可靠性指标的应用问题,认为当观测值的复相关系数不同时,应同时考虑内、外可靠性指标;最后,以 GPS 准动态测量为例作了分析。

关键词 相关观测;多余观测分量;可靠性指标;GPS 准动态测量

分类号 P 207

在测量系统的粗差探测与可靠性理论研究中,为了更好地评价测量系统的质量,从诸多的文献^[1~7]可见,均用到多余观测分量的概念,并将观测值的多余观测分量定义为可靠性度量指标,认为多余观测分量的值域为区间 [0, 1]。但是,最近的一项研究^[8]表明,上述结论仅适合于独立观测值的情形,对于相关观测值并不一定成立。本文从理论上进一步论证这个结论,并就文献[8]所提出的具有普遍意义的观测值可靠性度量指标进行深入研究。研究表明,可靠性指标与观测值的复相关系数有关,当复相关系数不同时,内、外可靠性指标应分别考虑。将本文研究成果应用于 GPS 定位等测量系统的质量评价与设计更具有现实意义。

1 多余观测分量

1.1 定义及其性质

按照测量平差系统的 Gauss-Markov 模型:

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \hat{A}^{-1} \hat{P} l, \quad \text{rk}(A) = t \quad (1)$$

$$D_l = e_0^2 Q = e_0^2 P^{-1}, \quad |D_l| > 0 \quad (2)$$

残差与观测值之间的关系为:

$$V = Ax - l = -Q'Pl \quad (3)$$

其中, $Q = P^{-1} - A(A^T PA)^{-1} A^T = Q - Q'$

当第 i 个观测值含有粗差 $5 l_i$, 则它对残差 V 的影响值为:

$$V_i^* = -(Q'P)_{ii} 5 l_i \quad (4)$$

相应的影响系数矩阵(在文献[6]中定义为可靠性准则矩阵)为:

$$R = Q'P = I - A(A^T PA)^{-1} A^T P = \{r_{ij}\} \quad (5)$$

其元素 r_{ij} 为第 j 个观测值的粗差 $5 l_j$ 对第 i 个观测值残差 V_i 的影响系数, 对角线元素 r_{ii} 为粗差 $5 l_i$ 对自身残差 V_i 的影响。

利用矩阵迹运算规则, 对矩阵 R 求迹, 有:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R) &= \text{tr}(I - A(A^T PA)^{-1} A^T P) \\ &= \text{tr}(I) - \text{tr}(A(A^T PA)^{-1} A^T P) \\ &= n - \text{tr}((A^T PA)^{-1} A^T PA) = n - t = r \end{aligned}$$

因此, $\sum_{i=1}^n r_{ii} = r$ (6)

其中, r 为平差系统的多余观测数。式(6)表明, 平差系统的多余观测数 r 被分解为 n 个分量, 每个分量反映了各观测值自身所含的多余观测成份。因此, 将影响系数 r_{ii} 称为第 i 个观测值的多余观测分量, 并简记为 $r_i = r_{ii}$ 。从式(6)的证明过程可见, 当观测值相关, 即权阵 P 为非对角阵时, 结论同样成立。因此, 式(6)具有普遍性, 这是多余观测分量 r 的一个基本性质。

同时, 国内外许多文献在假定观测值互独立, 即权阵 P 为对角阵的前提下, 十分简明地证明了多余观测分量 r 的另一个基本性质:

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad (7)$$

并认为当权阵 P 为非对角阵时, 式(7)仍然成立。但是, 作者在查阅大量有关文献时发现, 这一结论并没有给予正确的理论证明。

1.2 多余观测分量 r 的值域问题

为不失一般性, 可把观测值分为两组, 第一组为第 i 个观测值, 第二组为其余的全部观测值, 相应的协因数阵为:

收稿日期: 1996-08-12 黄声享,男,32岁,副教授,博士生,现从事 GPS 应用研究

* 国家自然科学基金资助项目, 编号 49401014

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{ii} & Q_{i2} \\ Q_{2i} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

应用分块求逆公式,并定义第 i 个观测值与其余观测值的复相关系数 d_i 为^[8]:

$$d_i = (Q_{i2} Q_{22}^{-1} Q_{2i} / q_{ii})^{1/2} \quad (9)$$

容易求得相应的权阵:

$$P_{ii} = q_{ii}^{-1} / (1 - d_i^2)$$

$$P_{22} = Q_{22}^{-1} + Q_{22}^{-1} Q_{2i} Q_{i2} Q_{22}^{-1} / [q_{ii}(1 - d_i^2)]$$

$$P_{i2} = P_{2i} = -Q_{22} Q_{22}^{-1} / [q_{ii}(1 - d_i^2)]$$

将矩阵 $R = Q' P$ 亦相应分解,得:

$$Q' P = \begin{bmatrix} q'_{ii} & Q'_{i2} \\ Q'_{2i} & Q'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ii} & P_{i2} \\ P_{2i} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

于是,观测值 l 的多余观测分量 r_i 为:

$$\begin{aligned} r_i &= q'_{ii} P_{ii} + Q'_{i2} P_{2i} \\ &= (q'_{ii} - Q'_{i2} Q_{22}^{-1} Q_{2i}) / [q_{ii}(1 - d_i^2)] \end{aligned} \quad (11)$$

分析式(11)可知:

1) 若 $d_i = 0$, 则 $Q_{2i} = 0$, $r_i = q'_{ii} / q_{ii}$, r_i 的值域为 $[0, 1]$ 。此时,与独立观测平差系统的情况一样,当 $r_i = 1$ 时, l_i 为完全多余观测; 当 $r_i = 0$ 时, l_i 为完全必要观测, 反之亦然。

2) 当 $d_i \neq 0$ 时, r_i 的大小不仅与 d_i 有关,而且还受到残差之间相关性的影响。 r_i 是设计矩阵 A 和协因数阵 Q 的元素的多元函数,一般情况,由式(11)很难给出 r_i 的值域,也不可能为 $[0, 1]$, 在 2.3 中将举例说明。

2 可靠性指标

测量平差系统的可靠性理论最早由荷兰的 Baarda 教授在 1968 年提出,后由德国的 Forstner 教授和我国的李德仁教授进一步扩展^[1,7]。其基本概念为,从单个备选假设出发可以研究平差系统在给定显著水平 T_0 和检验功率 U_0 的情况下发现粗差的能力(内可靠性)以及不可发现的粗差对平差结果的影响(外可靠性)。

2.1 观测值的内可靠性指标

当选定 T_0 U_0 后, 相应的非中心化参数 W_i 得到确定,从而可以计算每个观测值 l_i 的可探测粗差的临界值 $5\text{o}l_i$ 。对于相关观测值,由文献[1, 9]可导出:

$$5\text{o}l_i = e_0 W_i / (e^T P Q' P e) \quad (12)$$

其中,向量 e 为影响向量,即一个除第 i 个元素为 1 外其余均为 0 的 n 维列向量。

为了比较不同精度或不同类型的观测值的可

靠性,可将式(12)中与观测精度有关的部分 e_0 抽掉, 定义一个无量纲的数值指标, 称为可控性数值:

$$\begin{aligned} C_0 &= 5\text{o}l_i / e_i = 5\text{o}l_i / (e_0 - q_{ii}) \\ &= W_i / \overline{q_i e^T P Q' P e} = W_i / \overline{R_i} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $R_i = q_i e^T P Q' P e$, 同样是一个无量纲的数值,与平差问题所设定的 e_0 无关。当 l_i 为独立观测值时, R_i 就是人们所熟悉的多余观测分量 r_i 。此时,

$$C_0 = W_i / \overline{r_i} \quad (14)$$

因此,定义 R_i 为观测值的内可靠性指标更具有普遍性。同时,由式(13)、(14)可见,对于相关观测值仍把 r_i 视为内可靠性指标是不严密的。

2.2 观测值的外可靠性指标

外可靠性定义为每一个临界可探测的误差 $5\text{o}l_i$ 对未知参数向量的影响:

$$5\text{o}x_i = (A^T P A)^{-1} A^T P e \cdot 5\text{o}l_i \quad (15)$$

为使用方便, Baarda 教授建议用所谓的经验影响函数, 即 Cook 距离, 定例外可靠性指标 W_i (为无量纲的数值):

$$W_i^2 = 5\text{o}x_i^T D_x^{-1} 5\text{o}x_i \quad (16)$$

式中, $D_x = e_0^2 (A^T P A)^{-1}$ 。将式(12)代入式(16)可导出:

$$W_i = W_i (1/R_i(1 - d_i^2))^{1/2} \quad (17)$$

利用柯西-施瓦茨不等式, 容易导出未能发现的粗差 $5\text{o}l_i$ 对平差参数的函数 f 的影响:

$$5\text{o}f \leq e_f W_i \quad (18)$$

分析式(17)可知:

1) 外可靠性指标 W_i 与内可靠性指标 R_i 和复相关系数 d_i 有关, 对于确定的 d_i , W_i 随 R_i 的增大而减小;

2) 当 $d_i = 0$, 即观测值 l_i 为独立观测时, $R_i = n$, 此时,

$$W_i = W_i / (1 - n) / R_i \quad (19)$$

3) 当 n 个相关观测值的 d_i 均相等时, W_i 与 R_i 存在一致性, 此时, 可仅用 R_i 作为观测值的可靠性度量指标。但是, 当观测值的 d_i 不均相等时, 观测值的可靠性应当同时考虑内可靠性 R_i 和外可靠性 W_i 。文献[8]认为 W_i 和 R_i 存在一致性, 并将 R_i 用作观测值的可靠性度量指标, 这一结论只有在 d_i 均相等的条件下才成立。

2.3 举例说明

应用文献[8]中的一个例子。设想有一组相

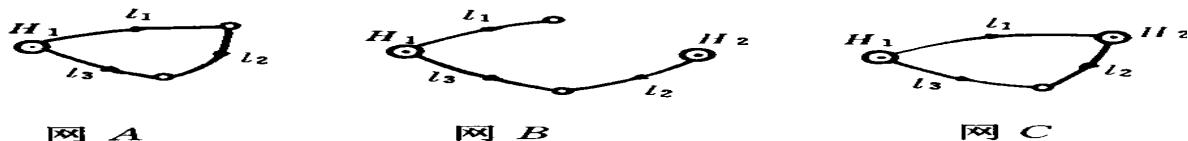


图 1 模拟高程网

Fig. 1 Simulated Level Network

观测量值 $l = (l_1 \ l_2 \ l_3)^T$, 分别构成图 1 所示的 3 个高程网。 l 的协因数阵为:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 3 & 0.5 & 5 \end{bmatrix}$$

由式 (9)、(11)、(13)、(17) 可分别计算 3 个网中相应观测值的复相关系数 d 、多余观测分量 r_i 、内可靠性指标 R_i 和可控性数值 C_{0i} 、外可靠性指标 W_i , 结果见表 1

表 1 多余观测分量和可靠性指标分析

($T_0 = 0.1\%$, $U_0 = 80\%$)

Tab. 1 Analysis of Redundant Observation Components and Reliability Indicators
($T_0 = 0.1\%$, $U_0 = 80\%$)

网	l_i	d	r_i	R_i	C_{0i}	W_i
<i>A</i>	1	0.9733	-1	2	2.920	12.041
	2	0.7071	0.5	1	4.130	4.130
	3	0.9747	1.5	5	1.847	7.153
<i>B</i>	1	0.9733	0	0	—	—
	2	0.7071	0.1	0.2	9.235	12.390
	3	0.9747	0.9	1.0	4.130	18.002
<i>C</i>	1	0.9733	1	10	1.306	3.918
	2	0.7071	1	2	2.920	0.000
	3	0.9747	0	10	1.306	4.130

分析表 1 的数据不难发现:

1) 对于相关观测量而言, $\sum r_i = n - t = r$ 的条件式仍然成立。

2) 多余观测量 n 与内可靠性指标 R_i 在数值上相差甚大, r_i 的值域并不满足式 (7), 如网 *A* 的 r_1 为 -1, r_3 为 1.5, 这一发现在文献 [12] 中给出了理论证明。当 r_i 大于 1 时, 按照残差理论的解释, 粗差 5 l_i 对残差 V 的影响被扩大了, 而不是部分的影响。

3) 当 l_i 为完全必要观测量时, $R_i = r_i = 0$, 如网 *B* 的 l_1 ; 但是, $r_i = 0$ 时, l_i 并不为完全必要观测量, 如网 *C* 的 l_3 。当 l_i 为完全多余观测量时, $r_i = 1$, 如网 *C* 的 l_1 ; 但是, 当 $r_i = 1$ 时, l_i 并不一定为完全多余观测量, 如网 *C* 的 l_2 。

4) 内可靠性指标 R_i 与可控性数值 C_{0i} 的变化趋势一致, 而 R_i 与外可靠性指标 W_i 的一致性变化

规律不成立。如网 *A* 的 l_1 和 l_3 , R_i 为小的 W_i 并不为小, R_i 为大的 W_i 亦不为大; 再如网 *C* 的 l_1 和 l_3 , 虽然 R_i 相等, 但 W_i 并不相等。因此, 外可靠性指标 W_i 不仅与内可靠性指标 R_i 有关, 而且还受到复相关系数 d 的影响。

3 在 GPS 准动态测量中的应用

GPS 准动态测量的基本做法是: 一台 GPS 接收机作为固定站, 另一台作为流动站, 流动站在第 1 点上采用某种方法确定整周模糊度后, 便开始迁站, 迁站过程中要求卫星信号的锁定。为此, 在待测点第 2, 3, 4, ..., n 点上每点仅需观测 2~3 个历元便可达到较高的精度。据 Wild 300 GPS 测量系统介绍, 这种方法的基线精度为 1~2 cm + 1 ppm(rms)。

在 GPS 基线数据处理中, 平差过程所用的观测量一般为载波相位观测的二次差分观测量, 该虚拟观测量是相关的。GPS 测量平差系统与常规测量方法一样, 同样存在质量控制问题, 包括精度指标和可靠性指标的监控。由于这一工作与观测量本身无关, 而取决于测量平差系统的几何结构和观测精度, 因此可在实际观测之前进行预分析和设计。GPS 基线测量中有关精度指标的估计问题, 作者已在文献 [11] 中作了研究, 下面仅就可靠性指标的应用问题作一论述。

数值计算采用 1994 年 4 月 10 日采集的卫星概略星历, 给定某地一固定站的位置为已知, 固定站至流动站的三维坐标增量为未知参数, 整周模糊度确定正确, 固定站到流动站的距离不远 (2.5 km)。流动站的测定分 3 种情况来考虑, 设测定日期为 1994 年 4 月 12 日 (GPST):

- ① 测 1 个历元 (4 51: 15);
- ② 测 2 个历元 (4 51: 15~4 51: 30);
- ③ 测 3 个历元 (4 51: 15~4 51: 45)。

这 3 种方案中, 卫星高度角限值取为 15° , 预计观测时共有 6 颗共视卫星, 参考星选定为 28 号星, 组星为 18 22 25 31 29 号星, 卫星的天空分布如图 2 所示。单个历元双差观测值的方差协方差

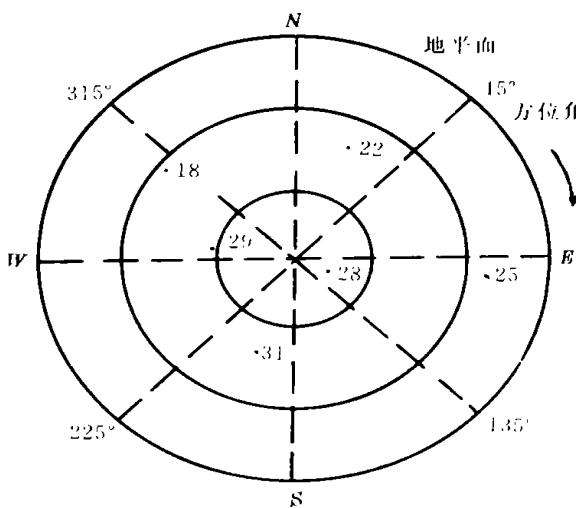


图 2 观测时间的可见卫星分布情况

Fig. 2 Visible Satellites Distribution

阵为:

$$D_l = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

其中, e_0^2 为单个相位观测值的方差。设计矩阵 A 从作者所研制的 RDO P 估算软件中提取, 选择显著水平 $T_0 = 0.1\%$, 检验功效 $U_0 = 80\%$, 于是非中心化参数 $W = 4.13$ 。根据本文的公式可分别计算 3 种方案的多余观测分量 r_i 、内可靠性指标 R_i 可发现粗差的下界值 5_{0l_i} 、外可靠性指标 W_i 和不可发现的粗差 5_{0l_i} 对坐标增量 Δx 的影响 $5_{0\Delta x}$ 。结果见表 2。值得说明的是, 双差观测值的复相关系数 d 与历元数的多少无关, 仅与卫星数有关, 在本例中 d 均为 0.6325。分析表 2 可知:

1) 多余观测分量 r_i 与内可靠性指标 R_i 相差

表 2 GPS 准动态测量的可靠性分析

Tab. 2 Reliability Analysis of GPS Stop and Go Positioning

l_i	1 个历元					2 个历元					3 个历元				
	r_i	R_i	5_{0l_i}	W_i	$5_{0\Delta x}$	r_i	R_i	5_{0l_i}	W_i	5_{0l_i}	r_i	R_i	5_{0l_i}	W_i	$5_{0\Delta x}$
1	-0.051	0.426	12.66 e_0	7.054	2.43 e_0	0.473	1.045	8.08 e_0	3.185	0.78 e_0	0.648	1.252	7.38 e_0	2.379	0.47 e_0
2	0.594	0.652	10.23 e_0	5.155	1.78 e_0	0.797	1.159	7.67 e_0	2.735	0.67 e_0	0.864	1.328	7.17 e_0	2.087	0.42 e_0
3	0.071	0.244	16.73 e_0	9.977	3.44 e_0	0.536	0.957	8.44 e_0	3.558	0.87 e_0	0.692	1.194	7.56 e_0	2.598	0.52 e_0
4	0.521	0.702	9.86 e_0	4.844	1.67 e_0	0.760	1.184	7.59 e_0	2.639	0.64 e_0	0.840	1.344	7.12 e_0	2.023	0.40 e_0
5	0.865	1.250	7.39 e_0	2.384	0.82 e_0	0.933	1.459	6.84 e_0	1.559	0.38 e_0	0.955	1.528	6.68 e_0	1.243	0.25 e_0
6					0.475	1.047	8.08 e_0	3.176	0.77 e_0	0.650	1.253	7.38 e_0	2.373	0.47 e_0	
7					0.797	1.158	7.67 e_0	2.736	0.67 e_0	0.865	1.328	7.17 e_0	2.088	0.42 e_0	
8					0.533	0.953	8.46 e_0	3.574	0.87 e_0	0.690	1.192	7.57 e_0	2.607	0.52 e_0	
9					0.762	1.187	7.58 e_0	2.627	0.64 e_0	0.841	1.346	7.12 e_0	2.015	0.40 e_0	
10					0.932	1.459	6.84 e_0	1.560	0.38 e_0	0.955	1.528	6.68 e_0	1.243	0.25 e_0	
11										0.651	1.254	7.37 e_0	2.367	0.47 e_0	
12										0.865	1.327	7.17 e_0	2.088	0.42 e_0	
13										0.688	1.190	7.57 e_0	2.616	0.52 e_0	
14										0.842	1.348	7.11 e_0	2.007	0.40 e_0	
15										0.955	1.528	6.68 e_0	1.244	0.25 e_0	

较大, 且 r_i 有负值的情况, 如 1 个历元中的 r_i 由于双差观测值各历元间的独立性, 因此, 当观测历元数增加并且卫星数不变时, 观测值的复相关系数 d 是均等的, 此时 R_i 与 W_i 的数值变化存在一致性。

2) 流动站上观测历元数的增加, 如由 1 个历元增加到 3 个历元, 内可靠性指标 R_i 增大, $\min(R_i)$ 由 0.244 增至 1.194; 可发现粗差的下界值 5_{0l_i} 明显减小, $\max(5_{0l_i})$ 由 16.73 e_0 降到 7.57 e_0 ; 外可靠性指标 W_i 减小, $\max(W_i)$ 由 9.977 降到 2.616; 以不可发现的粗差对坐标增量 Δx 的影响 $5_{0\Delta x}$ 为例, $\max(5_{0\Delta x})$ 由 3.44 e_0 降到 0.52 e_0 。

3) R_i 、 W_i 与卫星分布有关, 高度角低的观测值 R_i 为小, 而 W_i 为大; 高度角高的观测值 R_i 为大, 而 W_i 为小。这也给我们一些提示, 低高度角的观测值要特别注意其粗差的存在及其影响。

另外, 如果取相位观测中误差 $\text{e}_0 = \pm 0.05$ 周, 进行单频观测 ($L_1 = 19 \text{ cm}$), 则相应可发现粗差的下界值 $\max(5_{0l_i})$ 以及不可发现的粗差对坐标增量 Δx 的影响 $\max(5_{0\Delta x})$ 见表 3 表 3 中增加了一个测 4 个历元的数据, 以便分析。表 3 表明, GPS 准动态测量中可发现粗差的下界值和不可发现的粗差对未知参数的影响将随着观测历元数的增加而减小, 尤其是 1 历元和 2 历元比较时相差较大。但是, 当观测历元数增大到一定值

时,如3个历元,再增加观测历元数对提高可靠性无更大意义。这表明, GPS准动态测量中,如果模糊度参数确定正确,天空可见卫星数较多时,流动站测定2~3个历元具有足够的可靠性。

表 3 GPS准动态测量中可靠性与观测历元数的关系

Tab. 3 Relationship Between Reliability and Observed Epoch Number in GPS Stop and Go Positioning

观测历元数	$\max(5 \Delta l_i) / \text{cm}$	$\max(5 \Delta x) / \text{cm}$
1	15.9	3.3
2	8.0	0.8
3	7.2	0.5
4	6.8	0.4

参 考 文 献

- 1 李德仁.误差处理和可靠性理论.北京:测绘出版社, 1988.
- 2 陶本藻.测量数据统计分析.北京:测绘出版社, 1992.
- 3 黄维彬.近代平差理论及其应用.北京:解放军出版

- 社, 1992.
- 4 姚应生,董烈镛.测量误差检验与数据处理.北京:煤炭工业出版社, 1991.
- 5 黄健柏,高益忠,张后苏.多余观测分量研究.中南工业大学学报, 1995, 26 (2): 172~175
- 6 李德仁.顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计的设想.测绘学报, 1989, 18 (4): 241~248
- 7 Forstner W. The Reliability of Block Triangulation. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1985 (51): 1137~1147
- 8 王金岭,陈永奇.论观测值的可靠性度量.测绘学报, 1994, 23 (4): 252~258
- 9 Biasc Z F, et al. Reliability Analysis of Phase Observations in GPS Baseline. Journal of Surveying Engineering, 1990, 116 (4): 204~224
- 10 冯浩鉴.相关平差概论.北京:测绘出版社, 1982.
- 11 黄声享,张琰.GPS相对定位几何精度指标的研究.地壳形变与地震, 1996, 16 (增刊): 60~67
- 12 Chen Y, Wang J. Reliability Measures for Correlated Observations. ZTV, 1996 (5): 211~219

Research on Redundant Observation Components and Reliability Measures for Correlated Observations

Huang Shengxiang Wang Jinling

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract In this paper, the range of the redundant observation component for correlated and uncorrelated observations is discussed, and the difference between the redundant observation component and the internal reliability is proved. Then, the further study on using the problem of reliability indicators is taken, and when one multiple correlation coefficient is different from another for correlated observations. Their internal and external reliability indicators should be simultaneously considered. Finally, an actual example of GPS stop and go positioning is analyzed.

Key words correlated observation; redundant observation component; reliability indicator; GPS stop and go positioning