

## 导线网可靠性分析和粗差探查

黄加纳 吴俊昶

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 39 号,430070)

**摘要** 采用相关平差算法计算导线网中每个观测值的多余观测分量和各类观测值的内可靠性指标,按统计假设检验理论构成观测值的粗差检测统计量,经过探查指出可能含有粗差的观测值。最后给出内可靠性分析的结果,并提出导线网设计和施测要点建议。

**关键词** 导线网;相关平差;多余观测分量;可靠性分析;粗差探查

**分类号** P 207

控制网的可靠性取决于多余观测,对于有  $n$  个观测值,  $r$  个多余观测的网,平均多余观测分量  $\bar{r} = r/n$  代表该网整体的可靠性指标。一般情况下,  $\bar{r}$  值在 0.1 至 0.5 之间。当  $\bar{r}$  达到 0.4 以上时,有足够的多余观测能较好地监控粗差;当  $\bar{r}$  接近于 0.1 时,多余观测少,可靠性弱,对粗差的判定困难。

整体可靠性指标  $\bar{r}$  是进行平差的全部观测值所作贡献的平均值,或者说全部观测值的多余观测分量  $r_i (i=1, 2, \dots, n)$  之和,即总的贡献就是多余观测数  $r$ 。对某个观测值  $L_i$ ,因在网中所处的位置和先验精度不同,其  $r_i$  也不相同。 $r_i$  是探查粗差的关键,关系到监控粗差的能力。

用常规的微机求观测值的多余观测分量和探查粗差所依赖的观测值改正数  $v_i$  及其协因数  $Q_i$  (对全网就是改正数向量  $V$  及其协因数阵  $Q$ ) 通常是困难的。为此,采用相关平差算法,先作主网平差求得结点未知数的协因数阵  $Q_X$ ;然后对各导线节进行附有未知数的条件平差,计算观测值的改正数  $v_i$  和多余观测分量  $r_i$ ;最后构成  $t$  分布检验量  $T_i$ ,逐个探查观测值中是否可能存在粗差。

## 1 多余观测分量计算

按导线网相关平差算法,进入平差的观测值是已知点和结点上的观测方向值、中间导线点上的左角以及导线点间边长,全网按方向及边作严格平差。如图 1 所示的导线网中有 2 个已知点,1 个结点,4 个导线节,13 个(中间)导线点,观测总数  $n=38$ ,多余观测  $r=7$ 。

将图 1 中各导线节的原观测值换算成相关观

测值得向量  $L$  和协因数阵  $Q$ ,权阵  $P=Q^{-1}$ 。如导线节(2)的相关观测值为长边  $S$ ,两端的方向值  $L_1, L_m$  和相应的协因数阵  $Q_S$ 。 $P$  为拟对角阵,其主元为各个导线节的 3×3 阶权阵  $P_j (j=1, 2, \dots, 4)$ 。当已知点上联测了已知坐标方位角的方向时,此直接观测方向值也要进入平差。

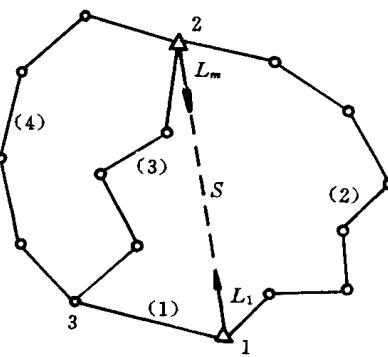


图 1 导线网示意图

Fig. 1 Sketch of Traverse Network

根据相关观测值组成主(结点)网平差的误差方程:

$$\hat{V} = \hat{B} \hat{X} + \hat{l} \quad (1)$$

$\hat{X}$  中包含已知点及结点的定向角改正数  $z$ ,结点的坐标改正数  $(x, y)$  和尺度比改正数  $t$ ,总共有  $t$  个未知数; $B$  为系数矩阵, $l = d - L$ ,  $L = L + V$ 。图 1 有 12 个相关观测值,  $n=12$ ,  $t=5$ 。按(1)式组成法方程:

$$B^T \hat{P} B \hat{X} + B^T \hat{P} l = 0 \quad (2)$$

解算(2)式得:

$$\begin{cases} \hat{X} = - (B^T \hat{P} B)^{-1} B^T \hat{P} l \\ \hat{Q}_X = (B^T \hat{P} B)^{-1} \end{cases} \quad (3)$$

由(1)式得相关观测平差值  $L$  的协因数阵:

$$Q_L = B Q \bar{X} B^T \quad (4)$$

由(1)和(3)式得相关观测值改正数:

$$V = -B Q \bar{X} B^T P L + l = (E - Q \bar{X} P) l \quad (5)$$

其协因数阵为:

$$Q_V = (E - Q \bar{X} P) \bar{Q} (E - \bar{P} Q \bar{X}) = \bar{Q} - Q_L \quad (6)$$

$$\text{写成:} \quad Q_V = \bar{Q} - Q \bar{X} \quad (7)$$

上式代入(5)式得:

$$V = (E - (\bar{Q} - Q \bar{X} P) l = Q_V P l \quad (8)$$

可以证明  $Q_V P$  是幂等阵,即

$$(Q_V P)^2 = Q_V P$$

由矩阵代数知幂等阵的秩等于其迹,顾及(6)与

(4)式求迹得:

$$\text{tr}(Q_V P) = \text{tr}(E - Q \bar{X} P) = \bar{n} - t = r \quad (9)$$

由此可知,  $Q_V P$  阵的迹等于平差网的多余观测数  $r$ ,其主对角元是相关观测值的多余观测分量  $\bar{r}$

分析导线节的可靠性需要原观测值的多余观测分量  $r_i$  以已知点的定向角 结点的定向角与坐标为联系未知数,在正式坐标系中按节组成附有未知数的 3 个条件方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + \sum_{i=2}^m v_i - v_{m+1} + \hat{z}_1 - \hat{z}_{m+1} \\ \quad + w_z = 0 \\ \sum_{i=1}^m \cos T_i v_i - \frac{1}{d} (y_{m+1} - y_1) (\hat{z}_1 + v_1) \\ \quad - \frac{1}{d} \sum_{i=2}^m (y_{m+1} - y_i) v_i + \hat{x}_1 - \hat{x}_{m+1} \\ \quad + w_x = 0 \\ \sum_{i=1}^m \sin T_i v_i + \frac{1}{d} (x_{m+1} - x_1) (\hat{z}_1 + v_1) \\ \quad + \frac{1}{d} \sum_{i=2}^m (x_{m+1} - x_i) v_i + \hat{y}_1 - \hat{y}_{m+1} \\ \quad + w_y = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

如果主网平差时对长边  $S$  附设了尺度比未知数  $\lambda$ ,组成(10)式的后两个坐标条件时,也要给观测边  $S$  附设尺度比未知数。因此,对(10)式中的后两式应分别增补相应的改正项:

$$(x_{m+1} - x_1) \lambda, \quad (y_{m+1} - y_1) \lambda \quad (11)$$

(10)式中,  $v_1, v_{m+1}$  是方向  $U_1, U_{m+1}$  的改正数,  $v_2, \dots, v_m$  是左角改正数,  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是观测边的改正数,它们都是独立的原观测值

全网设定的未知数  $t$  个,条件方程的总数为  $r + t$  个。将全网条件写成矩阵表达式:

$$AV + CX + W = 0 \quad (12)$$

对照(10)式可知条件方程的系数矩阵  $A$  和未知数的系数矩阵  $C$ ,闭合差  $W = A_0 + AL$  组成法方

程:

$$\begin{cases} A Q A^T K + C \hat{X} + W = 0 \\ C^T K = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $Q$  为原观测值的对角形权逆阵令  $N = A Q A^T$ 。解算法方程得:

$$\begin{cases} \hat{X} = - (C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1} W \\ K = - N^{-1} (C \hat{X} + W) \end{cases} \quad (14)$$

原观测值的改正数:

$$V = Q \hat{A}^T K \quad (15)$$

按广义误差传播律导出  $X$  和  $K$  的协因数阵:

$$\begin{cases} Q \bar{X} = (C^T N^{-1} C)^{-1} \\ Q_K = N^{-1} - N^{-1} C Q \bar{X} C^T N^{-1} \end{cases} \quad (16)$$

按(15)式得原观测值改正数  $V$  的协因数阵:

$$Q_V = Q \bar{A}^T Q_K A Q \quad (17)$$

可以证明矩阵  $Q_V P$  是幂等阵,即  $(Q_V P)^2 = Q_V P$  顾及(17)及(16)式求迹:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_V P) &= \text{tr}(Q \bar{A}^T Q_K A) = \\ \text{tr}(Q \bar{A}^T N^{-1} A - Q \bar{A}^T N^{-1} C Q \bar{X} C^T N^{-1} A) &= \\ \text{tr}(A Q \bar{A}^T N^{-1} A) - \text{tr}(C (C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1} A) &= \\ (r + t) - t &= r \end{aligned} \quad (18)$$

由此可知,用导线网的原观测值按附有未知数的条件平差法组成的矩阵  $Q_V P$ ,其迹仍然等于全网的多余观测数,它的第  $i$  个主对角元  $(Q_V P)_{ii}$  就是对应的第  $i$  个原观测值的多余观测分量  $r_i$  实际计算时可分节组成 3 个条件,逐节计算原观测值的多余观测分量  $r_i$

将(14)式代入(15)式并顾及(16)式:

$$V = -Q \bar{P} L + V_0 \quad (19)$$

上式表示观测值改正数与矩阵  $Q \bar{P}$  和观测向量  $L$  的关系。如果某个观测值含有粗差,它将影响全部观测值的改正数;若多个观测值含有粗差,则任一改正数都将受这些粗差的综合影响;若向量  $L$  中仅有一个观测值含粗差  $X$ ,此粗差对其自身改正数的影响  $v_i^*$  等于相应的主对角元  $-(Q \bar{P})_{ii}$  与  $X$  的乘积。可以说,在仅有一个粗差的情况下其多余观测分量愈大就愈能反映粗差对自身的影响,或者说对粗差的监控能力愈强。由  $L = \hat{L} - V$  按广义传播律可以导出:

$$Q = Q \bar{L} + Q_V$$

$$\text{或} \quad Q_V = Q - Q \bar{L} \quad (20)$$

对独立的原观测值权矩阵  $P$  为对角阵,得:

$$r_i = Q_{ii} P_i = Q P_i - Q_{ii}^* P_i = 1 - Q_{ii}^* P_i$$

当进入平差的原观测值的改正数等于零时,  $Q_{ii}^* = P_i^{-1}$ ,得  $r_i = 0$ ,通常  $1 > r_i \geq 0$ 。当  $r_i = 0$  时,表示该观测值对平差未作任何贡献,如独立导线网中仅

联测 1 个已知坐标方位角的观测方向, 它只起定向作用。

综上可知, 多余观测分量  $r$  对于可靠性分析和粗差探查是至关重要的, 故有把  $Q_{rP}$  称为可靠性矩阵的。

## 2 统计假设检验和粗差探查

传统的做法凡是当改正数  $v_i$  大于 3 倍中误差 ( $|v_i| > 3\epsilon$ ) 时, 就认为该观测值含有粗差。这种做法在理论上是不严密的。当独立观测向量只有一个  $L_i$  含有粗差  $X$  时, 它对自身改正数  $v_i$  产生影响  $r_i X$ 。根据巴尔达的“数据探测”理论, 用改正数  $v_i$  构成判断粗差的统计检验量——标准化残差:

$$W_i = \frac{|v_i|}{e_{v_i}} = \frac{|v_i|}{\epsilon_0} \frac{1}{Q_{v_i}} = \frac{|v_i|}{e_{L_i}} \frac{1}{r_i} \quad (21)$$

$W_i$  服从标准正态分布, 用显著水平  $T = 0.001$  查正态分布表得临界值 3.29。当计算的检验量小于 3.29 时, 认为在该显著水平下观测值  $L_i$  不存在粗差。以上检验量中的  $\epsilon_0$  是理论上的单位权中误差, 实际检验时只能用估计值  $\hat{\epsilon}_0$  取代, 有:

$$T_i = \frac{|v_i|}{\hat{\epsilon}_0} = \frac{|v_i|}{\hat{\epsilon}_0} \frac{1}{Q_{v_i}} = \frac{|v_i|}{\hat{\epsilon}_{L_i}} \frac{1}{r_i} \quad (22)$$

根据前述,  $Q_{v_i}$  单位对于方向和角度取  $(")^2$ , 对于边长取  $\text{cm}^2$ 。检验量  $T$  服从  $t$  分布, 以  $T = 0.001$  和自由度  $r = n - t$  查  $t$  分布表得检验临界值。当计算的检验量大于临界值时, 判断该观测值含有粗差。

计算 (22) 式中的估值  $\hat{\epsilon}_0$  时, 应减去含有粗差的自身改正数  $v_i$  的影响, 取为:

$$\hat{\epsilon}_0^2 = (V^T P V - p_i v_i^2 / r_i) / (r - 1) \quad (23)$$

需要指出, 按 (22) 和 (23) 式构成检验量判断观测值是否可能含有粗差, 是在只有一个粗差的假设下推导获得的。当多个观测值存在粗差时, 多余观测分量对各个改正数产生综合影响。

一般情况下粗差的出现是个别的, 由于导线网采用边角延伸布网设点, 最终附合到已知点或汇集于结点形成闭合环路的独特结构, 某个观测值的粗差主要影响本导线节的改正数。虽然以上的  $t$  检验是针对一个粗差推导的, 但是应用 (22) 和 (23) 式逐个地计算检验量  $T$  仍能较好地查出含有粗差的观测值。

## 3 平差系统软件及其应用

我国的软件产业有了很大发展, 对控制网平差软件也提出了更高的要求。如希望用户界面清晰完善, 运行速度快, 便于使用并有良好的操作容错能力; 程序的功能强, 通用性好, 软件运行的各个环节自行设置传输接口; 平差结果建成汉化文件和绘制控制网和误差椭圆图等。

导线网是一些测绘、地籍部门在工矿、城镇或其它地区测图时常用的控制手段。对导线网平差软件除了上述一般要求外, 还需引入近代平差成果。易于调整观测值的先验精度, 作平差模型假设检验, 需要时附设系统性参数, 作可靠性分析印出  $t$  检验量, 排除可能发现的粗差。具备以上性能的导线网平差软件已经引入全汉化菜单操作控制网平差软件包<sup>[5, 6]</sup>, 无偿提供老用户使用。

取  $T = 0.001$ , 根据自由度从  $t$  分布表查得  $t$  检验统计量的临界值<sup>[9]</sup>, 若按 (22) 式计算的检验量  $T$  超过临界值, 则判定该观测值含有粗差。

使用具有可靠性分析和粗差探查功能的导线网平差软件计算分析图 1 所示导线图。该网的平均多余观测数  $\bar{r} = 7/38 = 0.184$ , 说明并不能很好地监控粗差。

逐节对原观测值进行分析探查, 结果如表 1。2 第 2、3 两个导线节的结果略。取  $T = 0.001$  由文献 [9] 查得临界值 5.41。从计算结果可知全部观测值都通过了  $t$  检验, 认为不含有粗差。

表 1 导线节 1

Tab. 1 Traverse 1

观测值	$U_1$	$U_2$	$s_1$
多余观测分量 $r_i$	0.180	0.185	0.057
改正数 $v_i$	0.360	-0.137	0.127
权 $p_i$	0.309	0.309	0.062
$v_i$ 的权倒数 $Q_{v_i}$	0.582	0.600	0.009
单位权常数 $\epsilon_0$	1.01	1.020	0.88
检验量 $T_i$	0.47	0.170	1.50

多余观测分量和  $E_r = 0.422$ ,  $V^T P V = 6.326$

从该例总体看来, 测边的多余观测分量最小, 其中的半数小于 0.1, 最小值为 0.057, 最大值 0.219 (在 3 节, 略); 分量值  $r$  大的导线节在网的内部, 边的平均分量值  $\bar{r}_边 = 2.068/17 = 0.122$ 。角的多余观测分量最大, 它是相应的两个方向的分量之和, 最大值 0.400, 最小值 0.156 (在 2 节, 略); 角的平均分量值  $\bar{r}_角 = 3.411/13 = 0.262$ 。进入平差的方向有 8 个, 分量最大值 0.237 (在 3 节, 略), 最小值 0.137 (在 2 节, 略), 方向的平均

分量值  $\bar{r}_i = 1.519/8 = 0.190$  在中间导线点上按角或方向(选为结点)计算的检验量  $T$  相等。测

角的粗差相对于边或方向(结点及已知点上)能得到较好监控。

表 2 导线节 4

Tab. 4 Traverse 4

观测值	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	U <sub>4</sub>	U <sub>5</sub>	U <sub>6</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>5</sub>
$r_i$	0.199	0.400	0.238	0.350	0.230	0.201	0.090	0.129	0.098	0.071	0.091
$v_i$	-0.616	0.015	-0.106	-0.085	-0.860	0.914	0.025	0.161	0.126	0.001	0.044
$p_i$	0.309	0.154	0.154	0.154	0.154	0.309	4.871	4.865	6.246	6.441	5.574
$Q_{ii}^V$	0.646	2.590	1.541	2.269	1.491	0.651	0.019	0.026	0.016	0.011	0.016
$e_{0i}$	0.980	1.03	1.030	1.030	0.990	0.92	1.02	0.94	0.94	1.03	1.02
$T_i$	0.780	0.01	0.080	0.050	0.710	1.24	0.18	1.05	1.07	0.01	0.34

多余观测分量和  $E_{r_i} = 2.098$ , 多余观测分量总和 7.000

综合实例分析后可得初步结论: a. 导线网外围观测值的多余观测分量小, 内部的多余观测分量大, 观测外网导线节时要倍加注意。b. 方向及角的多余观测分量较大, 易于监控粗差; 边的多余观测分量小, 难以反映粗差, 测边的先验精度要尽可能符合实际。c. 一般情况下, 含有粗差的观测值主要影响本导线节的检验量, 检测重点在本节。d. 把导线网的加密总点数除以导线节总数得每节平均加密点数  $D$ , 按相当多的计算实例统计给出表 3 的参数数据。因此, 设计导线网时在可能情况下  $D$  以小为佳。

表 3 统计参考数据

Tab. 3 Statistical Reference Data

节平均加 密点数	多余观测分量			
	$r/n$ 平均值	方向平均值	角平均值	边平均值
$D < 2$	0.314	0.371	0.375	0.225
$2 \leq D < 4$	0.205	0.268	0.284	0.107
$4 \leq D < 7$	0.099	0.131	0.136	0.056

## 参 考 文 献

- 1 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 北京: 测绘出版社, 1986.
- 2 崔希璋, 于宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差(第二版). 北京: 测绘出版社, 1992. 72~78
- 3 黄维彬. 近代平差理论及其应用. 北京: 解放军出版社, 1992. 422~438
- 4 吴俊昶, 刘大杰. 控制网测量平差. 北京: 测绘出版社, 1985. 304~316
- 5 吴俊昶, 韩绍伟. 新型控制网平差软件包. 测绘通报, 1994(2): 19~23
- 6 吴俊昶. 全汉化菜单操作控制网平差软件包. 城市勘测, 1995(1): 18~20
- 7 于宗俦, 鲁林成. 测量平差基础(增订本). 北京: 测绘出版社, 1984. 320~331
- 8 王之卓. 摄影测量原理续编. 北京: 测绘出版社, 1986. 48~60
- 9 李庆海, 陶本藻. 概率统计原理和在测量中的应用. 1982.

## Reliability Analysis and Gross Error Detection of Traverse Network

Huang Jiana Wu Junchang

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

**Abstract** The authors have adopted the algorithm of the correlated adjustment. According to this method, the redundant observation components of the observations and the norm of the internal reliability of all kinds of observations in the traverse network can be calculated. Based on the theory of statistics and hypothesis test, the statistical components, which are applied to inspect the gross error of the observations, have formed. By means of detection, the observations which may contain the gross error can be pointed out. In the end, the analysis of the internal reliability is put forward. At the same time, the paper gives suggestions on both the design of the traverse network and the point in measurements.

**Key words** traverse network; correlated adjustment; redundant observation components; reliability analysis; gross error detection