DOI: 10.13203/j.whugis1996.04.006

第 21卷第 4期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 21 No. 4
1996年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1996

顾及模糊逻辑关系的稳健估计*

王新洲
(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 39号, 430070)

摘　要　首先给出了标准化残差受粗差污染的隶属函数,进而导出了观测误差与残差之间的模糊逻辑关系,以及观测误差属于粗差的隶属函数。最后提出了顾及模糊逻辑关系的稳健估计算法。计算结果表明,顾及模糊逻辑关系的稳健估计能有效地抵制粗差的影响,并能正确地定位粗差。

关键词　粗差;稳健估计;模糊集合;模糊逻辑关系
分类号　P207

对粗差的处理方法一般可归纳为两大类:一类是将粗差归入函数模型的均值漂移模型,另一类是将粗差归入随机模型的方差膨胀模型。这两种方法的缺点文献 [1]已有论述。除 [1]中论述的缺点外,这两种方法还有一个共同的缺点,就是将残差或标准化残差小于等于某一阈值的所有观测值都看成是不含粗差的观测值的集合;而将残差或标准化残差大于这一阈值的所有观测值都看成是含粗差观测值的集合。现设标准化残差 $w_i=1.999\,999$, $w_j=2.000\,001$,当取阈值等于 2时,则判断结果为第 i 个观测值不含粗差,而第 j 个观测值含粗差。w_i与 w_j的较差仅为 0.000 002。这么小的差异,就得出绝然不同的两个结论。将观测值 L_i和观测值 L_j划分为两个绝然不同的集合,显然是不够合理的。

粗差是比随机误差大得多的一种异常误差。而比随机误差大得多,是一个没有明确外延的模糊概念。模糊概念不能用普通集合描述[5]。这就是为什么会出现上述不合理现象的根本原因。既然普通集合不能用来描述粗差这一模糊概念,就应该用模糊集合来描述。基于这一思想,本文导出了粗差的隶属函数,并设计了顾及模糊逻辑关系的稳健估计。

1　标准化残差受粗差污染的隶属函数

前已述及,粗差是比随机误差大得多的异常误差。对比随机误差大得多这句话,无法划出严格分明的界限,使在此界限内都属于“比随机误差大得多”,否则不属于,而只能说某一误差属于粗差的程度是高还是低。这就是模糊集合的概念。模糊集合可用隶属函数来表示。在构造粗差的隶属函数之前,有必要先构造标准化残差受粗差污染的隶属函数。

设 $\underset{\sim}{S}$是最大程度地受粗差污染的标准化残差 W 的模糊子集。我们的论域为标准化残差的绝对值 $|W|$。在论域上给定映射:

$$\mu_{\underset{\sim}{s}}: |W| \rightarrow [0, 1] \tag{1}$$

则说 $\mu_{\underset{\sim}{s}}$确定了$|W|$ 上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{S}$,称 $\mu_{\underset{\sim}{s}}$为 $\underset{\sim}{S}$的隶属函数。$\mu_{\underset{\sim}{s}}(w_i)$ 表示 w_i关于 $\underset{\sim}{S}$的隶属程度,即 w_i属于 $\underset{\sim}{S}$的程度 (w_i为论域$|W|$ 的元素,则 $w_i\geqslant 0$,下同)。当 $\mu_{\underset{\sim}{s}}(w_i)=1$时,$w_i$完

收稿日期: 1996-05-23.王新洲,男, 42岁,教授,现从事模糊数学在数据处理中的应用研究。
* 国家自然科学基金资助项目,编号 49574201

全属于 $\tilde{S}$,即观测值 L_i最大程度上受粗差污染。当 $\mu_{\tilde{S}}(w_i)=0$时,w_i完全不属于 $\tilde{S}$,即观测值 L_i完全没受粗差污染。$\mu_{\tilde{S}}(w_i)$越接近 1,w_i属于 $\tilde{S}$的程度就越大,L_i受粗差污染的可能性就越大。由误差理论知,当 $w_i<1$时,L_i一般未受粗差污染;当 $1\leqslant w_i<2$时,L_i受粗差污染的可能性很小;当 $2\leqslant w_i\leqslant 2.6$时,随 w_i的增大,L_i受粗差污染的可能性快速增大;当 $2.6<w_i$时,L_i受粗差污染的可能性很大。但随 w_i的增大,L_i受粗差污染的可能性增大较缓慢,且隶属函数的图像应以 1为渐近线,如图 1所示。根据图 1,我们通过大量的试验,得出标准化残差最大程度上受粗差污染的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{S}}(w_i)=\begin{cases}0 & w_i<1\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{20+w_i}{w_i^{c^2}}} & w_i\geqslant 1\end{cases}\tag{2}$$

式中,

$$c=\begin{cases}w_i & w_i<3\\ 3 & w_i\geqslant 3\end{cases}\tag{3}$$

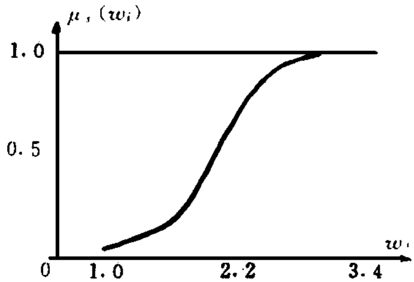

图 1

当 $w_i=1.999999$ 时,$\mu_{\tilde{S}}(w_i)=0.36363535$;当 $w_i=2.000001$ 时,$\mu_{\tilde{S}}(w_i)=0.36363736$。显然它们受粗差污染的程度非常接近。这样就避免了上述普通集合的不合理现象。w_i取不同值时,$\mu_{\tilde{S}}(w_i)$的值列于表 1。

表 1　w_i取不同值时隶属函数的函数值

w_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$\mu_{\tilde{S}}(w_i)$	0.045 45	0.056 46	0.078 36	0.121 44	0.206 33	0.363 63	0.597 14	0.820 76	0.944 43
w_i	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
$\mu_{\tilde{S}}(w_i)$	0.987 08	0.997 61	0.998 50	0.999 02	0.999 34	0.999 55	0.999 68	0.999 77	0.999 83

从表 1所列数据可以看出,隶属函数式 (2) 的确具有图 1所示的特性。

显然 $\tilde{S}$的补集 $\tilde{S}^c$就是最大程度上不受粗差污染的标准化残差 W 的模糊子集。根据模糊补集的定义,可得标准化残差最大程度上不受粗差污染的隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{S}^c}(w_i)=1-\mu_{\tilde{S}}(w_i)\tag{4}$$

2　粗差与残差之间的模糊逻辑关系

2.1　Δ_i为粗差的隶属函数

根据标准化残差最大程度上受粗差污染的隶属函数值 $\mu_{\tilde{S}}(w_i)$,只能粗略地判断观测值 L_i受粗差污染的程度,还不能仅以此值来定位粗差。要正确定位粗差,还应顾及观测误差 Δ 与残差 V 之间的模糊逻辑关系,即当顾及所有观测误差对各个残差 v_i的综合影响后,含粗差的观测值的残差属于异常残差的程度最大;属于正常残差的程度最小。若用 $\tilde{A}$表示异常残差的模糊子集,用 $\tilde{D}$表示正常残差的模糊子集,用 $\tilde{G}$表示粗差的模糊子集,则根据模糊逻辑关系,Δ_i若是粗差,就必然存在 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$达到最大的同时 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$达到最小,并且 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$一定大于 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$。因此,Δ_i属于粗差 $\tilde{G}$的隶属函数定义为:

$$\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i)=\begin{cases}0, & \mu_{\tilde{A}}(v_i)\leqslant\mu_{\tilde{D}}(v_i)\\ \mu_{\tilde{A}}(v_i)-\mu_{\tilde{D}}(v_i), & \mu_{\tilde{A}}(v_i)>\mu_{\tilde{D}}(v_i)\end{cases}\tag{5}$$

2.2 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$ 和 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$ 的确定

为了确定 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$ 和 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$,不妨回顾一下残差 V 与观测误差 Δ 的关系。由文献[6]知:

$$V=-R\Delta\tag{6}$$

式中,R 为可靠性矩阵,且

$$R=I-BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdots\cdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}\tag{7}$$

式(6)表明,任一观测值含有粗差,都将污染每一个残差。所以可靠性矩阵 R 的第 i 行,描述了各个观测误差 $\Delta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 对残差 v_i 的贡献,即综合影响。为了统一各观测误差 Δ_j 对 v_i 的贡献量度,我们根据可靠性矩阵 R 定义相对贡献矩阵如下:

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix}\tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \cdots & \tilde{r}_{1n}\\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \cdots & \tilde{r}_{2n}\\ \cdots\cdots & & & \\ \tilde{r}_{n1} & \tilde{r}_{n1} & \cdots & \tilde{r}_{nn}\end{bmatrix}\tag{8}$$

式中,$\tilde{r}_{ij}$ 为相对贡献矩阵的元素,其值按下式计算:

$$\tilde{r}_{ij}=|r_{ij}|/r_{\max},\quad r_{\max}=\max|r_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n\tag{9}$$

当所有观测误差 $\Delta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 属于粗差时,它们对残差的综合影响导致残差为异常残差。显然,观测误差 Δ_j 属于粗差的程度越大,使残差 v_i 为异常残差的程度越大;$\tilde{r}_{ij}$ 越大,使残差 v_i 为异常残差的程度也越大。于是为了描述所有观测误差属于粗差时对第 i 个残差的综合影响,可取相对贡献矩阵第 i 行元素 $\tilde{r}_{ij}$ 的带权平均值。这样,对于 n 个残差,就可以得到一个使残差为异常残差的综合影响向量:$T=(t_1\quad t_2\quad\cdots\quad t_n)^{\mathrm{T}}$。由于 Δ_j 属于粗差的程度越大,其权越大。而 $\mu_{\tilde{S}}(w_i)$ 能粗略地反映 Δ_j 属于粗差的程度,所以 Δ_j 的权 p_j 与 $\mu_{\tilde{S}}(w_j)$ 成正比,即 $p_j=k\mu_{\tilde{S}}(w_j)$。取 $k=1$,则 $p_j=\mu_{\tilde{S}}(w_j)$。于是有:

$$t_i=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\mu_{\tilde{S}}(w_j)/\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{\tilde{S}}(w_j)\right)\tag{10}$$

同样,当所有观测误差 Δ_j 都不属于粗差时,就可以得到一个使残差为正常残差的综合影响向量:$M=(m_1\quad m_2\quad\cdots\quad m_n)^{\mathrm{T}}$。由于 Δ_j 不属于粗差的程度越大,其权越大。而 $1-\mu_{\tilde{S}}(w_j)$ 能粗略地反映 Δ_j 不属于粗差的程度,所以 Δ_j 的权 p_j 与 $1-\mu_{\tilde{S}}(w_j)$ 成正比。取比例常数为 1,则 $p_j=1-\mu_{\tilde{S}}(w_j)$,于是有:

$$m_i=\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_{ij}(1-\mu_{\tilde{S}}(w_j))\sum_{j=1}^{n}(1-\mu_{\tilde{S}}(w_j))\tag{11}$$

有了相对影响向量 T 和 M 后,就可以确定 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$ 和 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$,即

$$\mu_{\tilde{A}}(v_i)=t_i\mu_{\tilde{S}}(w_i)\tag{12}$$

$$\mu_{\tilde{D}}(v_i) = m_i[1 - \mu_{\tilde{S}}(w_i)] \tag{13}$$

3 顾及模糊逻辑关系的稳健估计算法

根据式 (5),能得到粗差的位置 (凡 $\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i) > 0$的 Δ_i均为粗差)。但当粗差较多时,由于粗差相互影响,由式 (5) 所确定的粗差位置未必个个正确。不过一般最大的 $\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i)$ 所对应的 Δ_i 是粗差的可能性最大。于是就可以根据式 (5) 来设计顾及模糊逻辑关系的稳健估计算法:

① 按一般方法确定初始权矩阵 P;

② 进行最小二乘估计,同时计算残差 V、残差的协因数阵 Q_{VV}、可靠性矩阵 R 和相对贡献矩阵 $\bar{R}$,再计算 $\hat{\sigma} = \sqrt{V^{\mathrm{T}}PV/r}$ 和 $w_i = |v_i| / \hat{\sigma}\sqrt{Q_{v_iv_i}}$;

③ 找出最大的 $|w_i|$,并计算 $\hat{\sigma}_0 = \sqrt{(V^{\mathrm{T}}PV - p_i v_i^2)/(r-1)}$,然后比较 $\hat{\sigma}$与 $\hat{\sigma}_0$。如果 $|\hat{\sigma}| > |\hat{\sigma}_0|$,并且 $|\hat{\sigma}| \geqslant 1$,则令 $\hat{d} = 0.6745\hat{\sigma}_0$。再计算 $|\bar{w}_i| = |v_i| / (\hat{d}\sqrt{Q_{v_iv_i}})$。$\hat{d}$为或然误差[8]。

这样做的目的,是因为当 $|\hat{\sigma}| > |\hat{\sigma}_0|$ 时,说明第 i 个观测值可能含有粗差。由于第 i个观测值含有粗差,$\hat{\sigma}$一般是 σ_0的有偏估计,且一定偏大。而 $\hat{d} = 0.6745\sqrt{(V^{\mathrm{T}}PV - p_i v_i^2)/(r-1)}$ 则是扣除了第 i 个残差影响的估计量。由于粗差对其它各个残差都有影响,故 $\sqrt{(V^{\mathrm{T}}PV - p_i v_i^2)/(r-1)}$ 仍是 σ_0的偏大估计。将其乘以 0.6745后,就成为扣除第 i 个残差影响的或然误差。或然误差比中误差受粗差的污染要小,尽管如此,用 $\hat{\sigma}_0$算得的 w_i仍不是标准化残差,故本文称之为拟标准化残差;

④ 按式 (2) 计算 $\mu_{\tilde{S}}(w_i)$;

⑤ 按式 (10) 和 (11) 计算 t_i和 m_i,并按式 (12) 和 (13) 计算 $\mu_{\tilde{A}}(v_i)$ 和 $\mu_{\tilde{D}}(v_i)$;

⑥ 按式 (5) 计算观测误差 Δ_i属于粗差的隶属函数值 $\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i)$。若 $\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i)$ 全为 0,则转⑧。否则继续执行⑦;

⑦ 选出最大的 $\mu_{\tilde{G}}(\Delta_i)$,并降 Δ_i的权,建议降权公式用:

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)}((1 - \mu_{\tilde{G}}(\Delta_i))/w_i^2)^2, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{14}$$

其中 $p_i^{(k)}$为第 i个观测值第 k次迭代的权。降权后转②;

⑧ 结束迭代,输出结果。

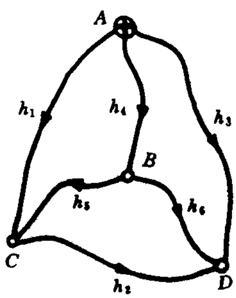

图 2

4 算　例

水准网如图 2所示,已知 $H_A = 100.00$m (无误差)。观测值及路线长度见表 2 (本例取自[9])。

表 2 观测值与路线长度

序号	1	2	3	4	5	6
h/mm	45.2	265.8	310.3	−26.2	70.8	336.5
S/km	2	1	2	1	1	1

在第 4个观测值上加上 6mm的粗差,则 h_4

变为 -20.2 用它参加最小二乘平差后,得残差为:

$$V = (1.994 \quad -0.128 \quad 2.56 \quad -2.280 \quad -1.126 \quad -1.154)^{T}$$

$$Q_{vv} = \begin{pmatrix} 0.6286 & 0.1429 & -0.2286 & -0.2000 & -0.1714 & -0.0286 \\ 0.1429 & 0.2143 & -0.1429 & 0 & 0.1429 & -0.1429 \\ -0.2286 & -0.1429 & 0.6286 & -0.2000 & -0.0286 & -0.1710 \\ -0.2000 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & 0.1000 & 0.1000 \\ -0.1714 & 0.1429 & -0.0286 & 0.1000 & 0.2286 & -0.1286 \\ -0.0286 & -0.1429 & -0.1714 & 0.1000 & -0.1286 & 0.2286 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e} = \sqrt{V^{T}PV/3} = \pm 2.9546, \quad |\hat{e}| > 1$$

$$W = (0.8512 \quad 0.0936 \quad 1.0954 \quad 1.7255 \quad 0.7971 \quad 0.8169)^{T}$$

最大的 w_i 为 w_4

$$\hat{e}_0 = \sqrt{(V^{T}PV - p_4 v_4^2)/(3-1)} = \pm 2.8100$$

因 $|\hat{e}| > |\hat{e}_0|$,所以令 $\hat{d} = 0.6745\,\hat{e}_0 = 1.8953$ 用 $\hat{d}$ 算得的拟标准化残差为:

$$\overline{W} = (1.3270 \quad 0.1459 \quad 1.7076 \quad 2.6899 \quad 1.2426 \quad 1.2735)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}}(\overline{W}) = (0.0304 \quad 0 \quad 0.0796 \quad 0.9487 \quad 0.0262 \quad 0.0276)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}^{c}}(\overline{W}) = (0.9696 \quad 1 \quad 0.9204 \quad 0.0513 \quad 0.9738 \quad 0.9724)^{T}$$

综合影响向量为:

$$T = (0.6148 \quad 0.0445 \quad 0.6383 \quad 0.5929 \quad 0.3143 \quad 0.3221)^{T}$$

$$M = (0.3767 \quad 0.4073 \quad 0.4071 \quad 0.2579 \quad 0.3874 \quad 0.3850)^{T}$$

则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(V) = (0.0187 \quad 0 \quad 0.0508 \quad 0.5625 \quad 0.0082 \quad 0.0089)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}(V) = (0.3652 \quad 0.4073 \quad 0.3747 \quad 0.0132 \quad 0.3773 \quad 0.3744)^{T}$$

于是由式 (5) 得 Δ_i 属于粗差的隶属函数值为:

$$\mu_{\underset{\sim}{G}}(\Delta) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5493 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{T}$$

对 Δ_4 降权: $p_4 = 2[(1-0.5493)/2.6899^2]^2 = 0.0078$

利用权阵 $p = \mathrm{diag}(1 \quad 2 \quad 1 \quad 0.0078 \quad 2 \quad 2)$ 再进行最小二乘平差,得:

$$V = (-0.2636 \quad -0.1286 \quad 0.3078 \quad -5.6668 \quad 0.0032 \quad -0.0254)^{T}$$

$$\hat{e} = \sqrt{V^{T}PV/r} = \pm 0.3869, \quad |\hat{e}| < 1$$

$$W = (1.0248 \quad 0.7185 \quad 1.1966 \quad 1.2976 \quad 0.0195 \quad 0.1539)^{T}$$

因为 $|\hat{e}| < 1$,故不需要计算 $\hat{d}$ 于是,

$$\mu_{\underset{\sim}{S}}(W) = (0.0196 \quad 0 \quad 0.0243 \quad 0.0288 \quad 0 \quad 0)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}^{c}}(W) = (0.9804 \quad 1 \quad 0.9757 \quad 0.9712 \quad 1 \quad 1)^{T}$$

$$T = (0.2796 \quad 0.0906 \quad 0.2823 \quad 0.6981 \quad 0.0505 \quad 0.0496)^{T}$$

$$M = (0.2528 \quad 0.2266 \quad 0.2530 \quad 0.4976 \quad 0.2075 \quad 0.2042)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(V) = (0.0055 \quad 0 \quad 0.0069 \quad 0.0201 \quad 0 \quad 0)^{T}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}(V) = (0.2478 \quad 0.2266 \quad 0.2469 \quad 0.4833 \quad 0.2075 \quad 0.2042)^{T}$$

$$\_\,_{\underset{\sim}{G}}(\Delta) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{T}$$

由于 $\_\,_{\underset{\sim}{G}}(\Delta_i)$ 全为 0,故结束迭代, $-v_4$即为 Δ_4的估值。 $-v_4 = 5.7$ mm,与加上的粗差6 mm近似相等。

5 结 论

通过以上讨论,可得如下结论: 1) 粗差属于模糊概念,不能用普通集合描述,必须用模糊集合来描述粗差。 2) 本文给出的标准化残差最大程度上受粗差污染的隶属函数 $\_\,_{\underset{\sim}{S}}(w_i)$,能客观地反映标准化残差属于粗差的程度。 3) 本文设计的稳健估计算法,顾及了观测误差与残差之间的模糊逻辑关系,是在粗差得到准确定位的前提下计算其等价权的,所以能更好地抵制粗差的影响。

参 考 文 献

1 黄维彬.近代平差理论及其应用.北京:解放军出版社,1992.

2 周江文.经典误差理论与抗差估计.测绘学报,1989(2): 115~ 120

3 杨元喜.抗差估计理论及其应用.北京:八一出版社,1993.

4 王金岭,陈永奇.粗差数学期望平移模型的理论研究.武汉测绘科技大学学报,1995, 20(2): 146~ 150

5 郭宗祥,杨鸿铨.模糊信息处理基础.成都:成都电讯工程学院出版社,1989.

6 李德仁.误差处理和可靠性理论.北京:测绘出版社,1988.

7 Sun W.粗差定位的新方法.王新洲译.武测译文,1995(2): 30~ 35

8 王新洲.测量平差.北京:水利电力出版社,1991.

Robust Estimation Considering Fuzzy Logical Relationship

Wang Xinzhou

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract By analyzing concept of blunders, this paper points out that blunders are fuzzy concept. Fuzzy concept can not be simply described by ordinary set. It only can be described by fuzzy set. Therefore, based on the fuzzy logical relationship between observation errors and residuals the membership function of blunders has been presented. At last the algorithm of robust estimation considering fuzzy logical relationship has been designed. It is shown that the robust estimation considering fuzzy logical relationship is more effective to repress the influence of blunders and more correct to locate blunders.

Key words blunder; robust estimation; fuzzy set; fuzzy logical relationship