

GPS 水准、天文重力水准与重力大地水准面 多种数据联合处理的研究*

杨沾吉 於宗俦 于正林 陈永奇

(香港理工大学土地测量与地理资讯学系, 香港, 九龙红磡)

摘要 针对我国大地水准面的研究状况, 提出了在国家 GPS B 级网完成之后, 利用 GPS 水准、天文重力水准与重力大地水准面 3 类数据确定我国高精度大地水准面的理论和方法。分析了 3 类数据的误差传播规律, 给出了联合平差模型, 并用一模拟网进行了试算。

关键词 大地水准面; GPS 水准; 天文重力水准; 重力大地水准面数据联合处理

分类号 P207; P224; P228; P223

随着测绘技术的不断发展, 旧的大地水准面很难满足人们在精度和分辨率方面的要求, 这就要求大地测量工作者寻找精化旧大地水准面的理论和方法。空间定位技术出现以后, 随着多普勒点、GPS 控制网点的增加, 以及高分辨率地球重力场模型、数字地面模型的出现, 使天文重力大地水准面、重力大地水准面在精度和分辨率方面的改善成为可能。

尽管各国都布设并施测了一定的 GPS 网(导线)用于控制当地的大地水准面, 但 GPS 大地高没有直接用于大地水准面的确定。无论是重力、天文水准、天文重力水准, 还是 GPS 水准, 都是以大地水准面作为研究对象, 3 种方法都可以得到大地水准差距值。尽管其间还存在着基准差, 但经过一定的转换, 这 3 种数据可以统一在同一基准下。在同一基准下, 由这 3 种数据联合确定大地水准面是可行的, 无论是精度还是分辨率都会得以改善。由此, 本专题研究了 GPS 水准、天文(重力)水准及重力大地水准面数据联合处理的理论和方法, 并用一模拟算例进行了验证。

1 三种数据联合处理

在 60~70 年代, 我国利用天文重力水准方法测定了我国的似大地水准面, 得到了 1980 年国家大地坐标系下的全国高程异常图。管泽霖等利用重力资料计算了我国 $5' \times 5'$ 高分辨率重力大地水准面 WZD-94。我国目前施测的 GPS B 级网的目的之一就是为了用 GPS 水准精化我国的大地水准面。就目前我国大地水准面所有的 3 种资料情况来看, 研究 3 种数据的联合处理, 对精化我国的大地水准面具有实际意义。

由于 GPS 测定的大地高是以 WGS-84 椭球为基准的, 我国的重力大地水准面 WZD-94 是以 GRS 80 椭球为参考椭球的, 因此这两类数据都需转化到我国 1980 大地坐标系下, 以便 3 种数据统一于 1980 国家大地坐标系。在以下的讨论中均认为 3 种数据是在同一椭球下的。基准统一后, 联合处理的核心是 3 种观测权的确定问题, 因此首先需弄清楚 3 种数据的误差及传

* 收稿日期: 1996-05-09. 杨沾吉, 男, 32 岁, 博士生, 现从事 GPS 观测数据处理的研究。

* 国家测绘局“八五”重点科技攻关及香港理工大学资助项目, 编号 C85-04-03-03 及 350 /389

播规律,然后才能建立联合平差模型。

1.1 3种数据的误差及传播规律

1.1.1 GPS水准

GPS水准联测点上的高程异常主要包含3种误差: GPS测点大地高的误差; 水准高程的误差; 坐标系转换的误差。

GPS大地高差 Δh 的误差 $m_{\Delta h}$ 一般要比测定相邻两点间的距离 ΔS 的误差 $m_{\Delta S}$ 要大。根据国内外实测经验统计,一般要大1~2倍。陈俊勇建议取 $m_{\Delta h} = 2m_{\Delta S}$ 。根据我国GPS网的布网要求,东部地区的边长一般在50 km左右,中部地区为100 km左右,西部为150 km左右。按现有的GPS测边(粗码)条件下,取 $m_{\Delta h}$ 均为10 mm+ $\Delta S \times 10^{-6}$ 。大地高一个段差 Δh 的误差 $m_{\Delta h}$ 及各段差和 $\sum \Delta h$ 的误差 $m_{\sum \Delta h}$ 见表1。表中 $L = \sum \Delta S$ 以km为单位, $m_{\sum \Delta h}$ 按下式计算:

$$m_{\sum \Delta h} = \frac{m_{\Delta h}}{\Delta S} \sqrt{L} \quad (1)$$

表1 GPS水准联测点间大地高差的误差(/m)

ΔS	$m_{\Delta h}$	$m_{\sum \Delta h}$
50	0.120	0.0170 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
100	0.220	0.0220 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
150	0.320	0.0261 $\frac{L}{\sqrt{L}}$

表2 GPS水准点间正常高差的误差(/m)

ΔS	$m_{\Delta H}$	$m_{\sum \Delta H}$
50	0.071	0.010 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
100	0.160	0.010 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
150	0.122	0.010 $\frac{L}{\sqrt{L}}$

正常高差 ΔH 的误差 $m_{\Delta H}$ 主要与水准测量的误差及段距 ΔS 的长度有关。该段距两端点的正常高差 ΔH 以三等水准的精度测定(实际上可能要高一些)。其误差 $m_{\Delta H}$ 列于表2。

GPS水准得到的大地高差属于WGS-84系统,因而需转换到国家1980大地坐标系,即把 Δh 转换成国家1980大地坐标系下的大地高差 $\Delta h'$ 。转换公式为:

$$\Delta h + \Delta = \Delta h' \quad (2)$$

式中, $\Delta = (\cos B_i \cos L_i - \cos B_k \cos L_k) \Delta X + (\cos B_i \sin L_i - \cos B_k \sin L_k) \Delta Y$

$$+ (\sin B_i - \sin B_k) \Delta Z - [N_i (1 - e^2 \sin^2 B_i) - N_k (1 - e^2 \sin^2 B_k)] \frac{da}{a} \\ + [M_i (1 - e^2 \sin^2 B_i) \sin^2 B_i - M_k (1 - e^2 \sin^2 B_k) \sin^2 B_k] \frac{dT}{1 - T} \quad (3)$$

i, k 分别表示段两端点的点号, B, L, N, M 分别表示纬度、经度、卯酉圈曲率半径和子午圈曲率半径, da, dT 为两椭球的长半轴及扁率之差值, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 为两坐标系间的3个平移参数。

略去扁率的平方项,并设平移参数的误差为 m ,则大地高差转换值 Δ 的误差为 m_{Δ} 。用 $m_{\sum \Delta}$ 表示几个段差之和 $\sum \Delta h$ 沿联测线路转换为 $\sum \Delta h'$ 时的误差,数值见表3。

表3 由地心坐标转换参数误差 m 引起的大地高转换误差(/m)

m / m	m_{Δ} / km			$m_{\sum \Delta}$		
	50	100	150	50	100	150
± 5	0.037	0.074	0.112	0.005 $\frac{L}{\sqrt{L}}$	0.007 $\frac{L}{\sqrt{L}}$	0.009 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
± 2	0.015	0.030	0.045	0.003 $\frac{L}{\sqrt{L}}$	0.003 $\frac{L}{\sqrt{L}}$	0.003 $\frac{L}{\sqrt{L}}$
± 0.5	0.004	0.007	0.011	0.000	0.001 $\frac{L}{\sqrt{L}}$	0.001 $\frac{L}{\sqrt{L}}$

在GPS水准联测点间,局部坐标系下的大地水准面差距差 ΔN 为:

$$\Delta N = \Delta h' - \Delta H = \Delta h + \Delta - \Delta H \quad (4)$$

其误差 $m_{\Delta N}$ 也由三部分组成,即

$$m_{\Delta N}^2 = m_{\Delta h}^2 + m_{\Delta}^2 + m_{\Delta H}^2 \quad (5)$$

表 4 大地水准面差距的误差 (/m)

ΔS	$m_{\Delta N}$	$m_{\Sigma \Delta N}$	$m_{\Sigma \Delta N'} (\text{WGS-84})$	
50	0.144	0.0204	\overline{L}	\overline{L}
100	0.253	0.0253	\overline{L}	\overline{L}
150	0.360	0.0294	\overline{L}	\overline{L}

若取坐标转换参数的误差 $m = \pm 5 \text{ m}$, 大地高差的精度为 10^{-6} 量级, 则大地水准面差距段差 ΔN 的误差 $m_{\Delta N}$ 见表 4 表 4 也给出了相应于 WGS-84 的大地水准面差距的误差 $m_{\Sigma \Delta N'}$ 。

1.1.2 天文重力水准与重力大地水准面

在一级、二级天文重力水准路线上, 测点间大地水准面差距差的误差可分别用 $\pm 0.027 \overline{L}$ 和 $\pm 0.060 \overline{L}$ 进行估计, 而沿天文水准路线上的点则可按 $\pm 0.070 \overline{L}$ 计算。式中 L 表示测点间的距离, 以 km 为单位。

重力大地水准面的误差一般由下式估计:

$$\text{RMS} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (N_i^{\text{GPS}} - N_i^{\text{GRA}})^2 / n} \quad (6)$$

其中 N_i^{GPS} 、 N_i^{GRA} 为由 GPS 水准及重力大地水准面上得到的同一点的大地水准面差距。

1.2 3种数据联合处理

当观测值经过基准统一、异常数据检测之后, 由各类观测值的误差传播规律, 选定单位权方差后, 可以确定各类观测值的权。据此可以构造出联合平差模型, 得到 3类数据联合处理后的大地水准面差距及其中误差。同样, 由 3类数据的两两组合也可以得到大地水准面差距及中误差。由此, 在综合考虑分辨率及精度两个指标后, 可以选择确定大地水准面差距的最佳方案。

现有的 GPS 网与天文水准(天文重力水准)网不完全重合, 现有的重力大地水准面差距均为网格点上的数值。也就是说, GPS 网及天文(重力)水准网中的点没有已知的重力大地水准面差距值, 是 3种数据联合处理中存在的两个技术问题。按 GPS 水准及天文(重力)水准点的坐标可由内插方法得到 GPS 水准点及天文(重力)水准点上的重力大地水准面差距值。由此可以得到 3类数据 3类观测值的权的正确确定也是联合处理中的一个关键技术问题, 解决的方法是: 首先按各自的误差传播规律得到各自的方差阵, 然后由方差分量估计得到最佳权比。

1.2.1 函数模型

对一局部区域的 GPS 网、天文(重力)水准网及重力大地水准面 3类观测值, 取 GPS 点、天文(重力)水准点的大地水准面差距为未知参数, 对于上述 3类观测值可列出其平差模型:

$$\begin{aligned} \text{GPS 水准: } \Delta N_{ij}^{\text{GPS}} &= -\tilde{N}_i + \tilde{N}_j \\ \text{天文(重力)水准: } \Delta N_{kj}^{\text{AST}} &= -\tilde{N}_k + \tilde{N}_j \\ \text{重力大地水准面差距: } N_j^{\text{GRA}} &= \tilde{N}_j \end{aligned} \quad (7)$$

1.2.2 3类观测值的初始权

GPS 水准观测值的误差由表 5 内插得到, ΔS 为两点距离(边长)。对于天文(重力)水准, 一等测量观测值的误差为:

$$m_{\Delta N_{ij}^{\text{AST}}}^{\text{AST}} = \pm 0.027 \overline{L}_{ij}, \quad m_{\Delta N_{ij}^{\text{AST}}}^{\text{AST}} = \pm 0.060 \overline{L}_{ij}$$

其中 L_{ij} 为传算路线长度, 单位为 km。对于重力大地水准面有:

$$m_N^{\text{GRA}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta N_{\text{GPS}} - \Delta N_{\text{GRA}})_i^2 / n}$$

表 5 GPS水准误差表

$\Delta S / \text{km}$	50	70	100	130	150	250
$m_{\Delta N}^{\text{GPS}} / \text{m}$	± 0.144	± 0.188	± 0.253	± 0.318	± 0.360	± 0.487

取一定边长的 GPS 水准的大地水准面差距差为单位权观测值, 则 3类观测值的权分别为:

$$P_{ij}^{\text{GPS}} = m_0^2 / (m_{ij}^{\text{GPS}})^2, \quad P_{kj}^{\text{AST}} = m_0^2 / (m_{kj}^{\text{AST}})^2, \quad P_j^{\text{GRA}} = m_0^2 / (m_N^{\text{GRA}})^2 \quad (8)$$

由此确定的权为初次平差的权, 最优权需通过方差分量估计得到。

1.2.3 最佳模型的选择

3种数据联合平差可以得到单位权方差的估值及各点的中误差。同样, 由数据的两两组合也可以得到各点上的中误差及单位权方差。通过比较, 可以分析各类数据对大地水准面的精度贡献及分辨率方面的贡献。由不同模型(不同的数据组合)的分辨率及精度可选出最佳模型。

假定 GPS 水准为第一类观测值, 天文(重力)水准、重力大地水准面差距为第二、三类观测值, 则 3类数据联合平差得到的单位权中误差为:

$$m = \pm \sqrt{(V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2 + V_3^T P_3 V_3) / r} \quad (9)$$

同样,

$$m_{12} = \pm \sqrt{(V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2) / r_{12}}$$

$$m_{13} = \pm \sqrt{(V_1^T P_1 V_1 + V_3^T P_3 V_3) / r_{13}}$$

$$m_{23} = \pm \sqrt{(V_2^T P_2 V_2 + V_3^T P_3 V_3) / r_{23}}$$

定义第 i 类观测值对大地水准面的精度贡献为:

$$C_i = (m_{jk} - m) / m \quad (i, j, k \text{ 取 } 1, 2, 3) \quad (10)$$

由二维离散 FFT 可以得到不同平差方案的频谱 Fourier 谱表示有两个重要的意义: 一是检测出构造大地水准面的频率分量; 二是进行由空间域到频率域的变换。Fourier 频谱能够表明在原来的大地水准面中含有什么样的频率分量以及相应的振幅。

对不同数据组合得到的大地水准面差距进行 Fourier 变换, 作频谱分析, 可以了解空间域中各种波长对大地水准面的贡献, 还可以了解大地水准面受短波分量的影响, 以便进一步分析地形等短波分量对大地水准面的贡献。

有关二维离散 FFT 的频谱分析的公式此处不再列出, 可参阅有关的教科书。

2 算例分析

为验证前述理论与方法, 我们选国家 GPS B级网 F 区, 模拟了 3类观测值, 进行了试算。

2.1 模拟网概况与模拟数据

由于目前国家 GPS B级网的实测资料尚未经过处理, 因而难以找到一个较大区域的 GPS 水准网, 并辅以天文水准、重力大地水准面数据, 因而采用了模拟数据。模拟网形与实测的 F 区基本一致。网中共有 107个点, 其中 GPS 点 64个, 天文水准点 57个, 重合点 14个。

GPS网平均边长为114 km,范围约为126万 km^2 ;天文(重力)水准平均边长为111 km,范围约为86万 km^2 ;模拟网点的平均边长为112 km,实际覆盖范围约为144万 km^2 ,网形见图1

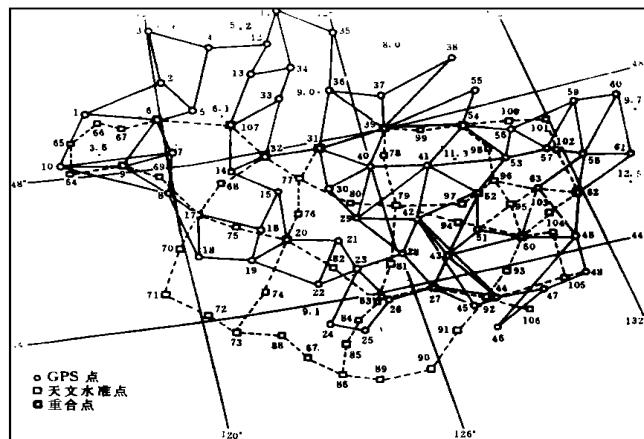


图 1 模拟网

GPS水准及天文(重力)水准的观测值由国家1980高程异常图内插并按各自的误差传播规律产生随机误差得到。各点的重力大地水准面差距值由高程异常图内插算得,“观测值”的中误差分别以 $\pm 0.2\text{ m}$, $\pm 1\text{ m}$, $\pm 2\text{ m}$ 产生随机数得到。这样共有3组重力大地水准面数据, GPS水准、天文(重力)水准各一组。GPS水准观测值为117个,天文(重力)水准为68个,重力大地水准面观测值107个。

2.2 平差方案与结果

本专题共设计了4种平差方案:一为3种数据联合处理;二为GPS水准与天文(重力)水准联合处理;三为GPS水准与重力大地水准面差距联合处理;四为单独的GPS水准数据处理。由此4种方案,用上述数据共得8种结果,平差时以网中107号点为固定点,取值6.1 m,以50 km的GPS水准观测误差为单位权方差,采用方差分量估计迭代定权,其迭代次数最佳权比以及单位权中误差列于表6

由表6可见:1)当重力大地水准面中误差取 $\pm 0.2\text{ m}$ 时, GPS水准与重力大地水准面差距的权不匹配(见表中①⑤);2) GPS水准与天文水准观测值的权基本上是匹配的,但从表中看出加入天文重力水准数据没有提供平差精度增益,这可能是由于系统转换误差的影响,这是一个值得进一步研究的问题;3)重力大地水准面的中误差为 $\pm 2\text{ m}$ 时,联合平差的单位权中误差最小;4)从迭代次数来看,由于重力大地水准面差距的权与GPS水准不匹配,而使迭代的次数增加;5)单点最大中误差3种数据联合平差时不超过 $\pm 0.687\text{ m}$ (对应于方案一),对方案二即GPS水准与天文水准联合平差为1.310 m,方案三不超过 $\pm 0.357\text{ m}$,单独的GPS水准平差(方案四)为1.224 m

综上所述,联合平差只要定权合理,结果优于单独的GPS水准平差。可见GPS水准网实测完成以后,要由GPS水准来精化我国的大地水准面,联合平差是必需的。本例中因重力大地水准面的给定精度高而使有重力大地水准面的联合平差优于其它平差方案。假若重力大地水准面的精度低于算例中的精度,而其与另外两类数据的精度相差不会太大,那么联合平差的单位权中误差有可能会降低,这一点可由表中方案一、三中的单位权中误差数值得以说明。

表 6 联合平差结果表

平 差 方 案	使用数据			结 果 序 号	平差结果			
	GPS 水 准	天 文 水 准	重力大地水准面 /m $m = \pm 0.2 \pm \pm 2$		迭代 次 数	最佳权比	单位权中 误差 (/m)	单点最大 中误差 (/m)
一	✓	✓	✓	①	10	0.866 9 0.090 0 [*]	± 0.226 0	± 0.190
—	✓	✓	✓	②	6	0.967 0 [†] 0.249 0 [†]	± 0.206 2	± 0.563
	✓	✓		③	6	0.980 2 [‡] 0.2870 [‡]	± 0.193 0	± 0.687
二	✓	✓		④	5	0.947 4	± 0.189 3	± 1.310
	✓		✓	⑤	9	0.005 8	± 0.228 7	± 0.164
三	✓		✓	⑥	6	0.107 9	± 0.208 6	± 0.320
	✓		✓	⑦	6	0.219 9	± 0.194 2	± 0.357
四	✓			⑧	/	/	± 0.569 7	± 1.224

表中*为 GPS 水准与天文重力水准的权比, **为 GPS 水准与重力大地水准面差距的权比。

3 结论与建议

鉴于目前很难找到一个大范围的拥有 3 种数据的实测网资料, 只能用模拟网进行验证, 所用的数据均认为是在同一基准下的, 主要结论有:

1) 通过算例证明, 本文提出的联合数据处理方法是切实可行的, 平差模型简便。就我国大地水准面的研究状况来看, 由于已经有了天文重力大地水准面及重力大地水准面两类数据, 在全国 GPS 网施测之后, 用本文的方法由于避免了使用用于计算重力大地水准面及天文(重力)大地水准面的重力及天文原始数据, 而使数据处理变得简单多了。

2) 就文中的算例而言, 联合平差优于单独的 GPS 水准确定的大地水准面。

3) 在全国 GPS B 级网数据处理之后, 要用 GPS 水准精化我国的大地水准面, 建议采取如下措施:

(1) 考虑到短波分量的影响, 应按移去恢复技术顾及地形改正。

(2) 采用本文介绍的联合数据处理方法, 按本文的经验, 取最优联合平差方案, 当重力大地水准面中误差小于 2 m, 椭球转换参数误差小于 5 m, 大地高差精度在 1 ppm 量级, GPS 水准点的大地水准面差距的中误差小于 1 m 是可以实现的。

(3) 应进一步研究我国重力大地水准面的实际精度, 以便使三类数据的赋权合理。

参 考 文 献

1 Ayhan M E. Geoid Determination in Turkey(TG-91). Bulletin Geodesique, 1993(67): 10~22

- 2 Brenneck J A European Astro-gravimetric Geoid. DGK(Reihe B) , 1983(269)
- 3 Denker H GPS Control of the 1989 Gravimetric Quasigeoid for the Federal Republic of Germany, IAG 106. In Determination of the Geoid. Rapp S, eds. Springer Verlag, 1990. 152~ 159
- 4 Forsberg R, Kearsley A H W. Precise Gravimetric Geoid Computations Over Large Regions. In Development in Four-dimensional Geodesy. Friz K B, Rizos C, eds. Springer Verlag, 1990. 65~ 83
- 5 Hardy R L. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surface. J G R, 1971, 76(8): 1 905 ~ 1 915
- 6 Holdahl S R, Hardy R L. Solvability and Multiquadric Analysis as Applied to Investigations of Vertical Crustal Movements. Tectonophysics. 1979(52): 139~ 155
- 7 Mainville A, Forsberg R, Sideris M. GPS Levelling—performance of Geopotential Models and Gravimetric Geoid Methods in the Great Slave Lake Area. In Proceedings of the Second International Symposium on Precise Positioning with Global Positioning System. Ottawa: Canada Institute of Surveying and Mapping, 1990. 1 042~ 1 059
- 8 Kearsley A H W. Test on the Recovery of Precise Geoid Height Differences from Gravimetry. J G R, 1988, 93(86): 6 559~ 6 570
- 9 Schwarz K P, Sideris M G. Precise Geoid Heights and Their Use in GPS Interferometry, Contract Report 85-004. Geoid. Surv. of Can. , 1985.
- 10 Schwarz K P, Sideris M G, Forsberg R. Orthometric Heights Without Levelling. J. of Surv. Eng. , 1987, 113(1): 28~ 40
- 11 Sideris M G, Forsberg R. Review of Geoid Prediction Methods in Mountainous Regions. In Proceedings of the First International Geoid Commission Symposium. Millan, 1990. 51~ 62
- 12 Sideris M G. Tests of a Gravimetric Geoid in GPS Networks. Surveying and Land Information Systems, 1993, 53(2): 94~ 102
- 13 Shresha R. Surface Interpolation Techniques to Convert GPS Ellipsoid Heights to Elevations. Surveying and Land Information System, 1993, 53(2): 133~ 144
- 14 Suenkel H A General Surface Representation Module Designed for Geodesy, Report No. 292. The Ohio State University, 1980.
- 15 Torge W. Computation of a High Resolution European Geoid(EGG1). In Proceedings of the Second International Symposium on the Geoid in Europe and Mediterranean Area. Rome. Ist. Geogr. Florence, 1982. 437~ 460
- 16 Torge W. Long Range Geoid Control Through the European GPS Traverse DGK, Geih e B. 1989(290)
- 17 Torge W, Denker H. Possible Improvements of the Existing European Geoid, IAG 106. In Determination of the Geoid. Rapp S, eds. Springer Verlag, 1990. 287~ 295
- 18 Tziavos I N. Determination of Geoidal Heights and Deflection of the Vertical for the Hellenic Area Using Heterogeneous Data. Bulletin Geodesique, 1987(61): 177~ 197
- 19 Tziavos I N, Sideris M G, Schwarz K P. A Study of the Contributions of Various Gravimetric Data Types on the Estimation of Gravity Field Parameters in the Mountains. J G R, 1992, 97(B6): 884~ 885
- 20 Tziavos I N, Arabelos D. Estimation of the Disturbing Potential Components and Comparison with Grand Astrogeodetic Data, IAG 106. In Determination of the Geoid. Rapp S, eds. Springer Verlag 1990. 141~ 151
- 21 陈俊勇.我国GPS水准网的布设及其精度的探讨.测绘学报, 1993, 22(2): 87~ 93
- 22 管泽霖,宁津生.地球形状及外部重力场.北京:测绘出版社, 1980.

A Study of Combined Data Processing with GPS-Leveling, Astrogravimetric Leveling and Gravimetric Geoid

Yang Zhanji Yu Zongchou Yu Zhenglin Chen Yongqi

(Dept. of Land Surveying and Geo-informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong)

Abstract According to the situation of geoid studies in China, this paper presents a theory and method for determination of high accuracy geoid of China by using the three types of data, i. e. GPS-leveling, astrogravimetric leveling and gravimetric geoid, after the completion of national B class GPS network. The error propagation rules of the data are analyzed, and the models for combined adjustment are given. Finally, a computation demonstration is presented using a simulative network.

Key words geoid; GPS-leveling; astrogravimetric leveling; gravimetric geoid combined data processing

(上接第 322页)

Removing the Singularity of the Earth's Free Oscillation Ordinary Differential Equations at the Earth Center by Chebyshev Collocation Method

Guo Junyi Zhang Feipeng

(Laboratory for Modern Geodynamics, WUTSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract The ordinary differential equations of the free oscillation of the Earth are solved by using the Chebyshev collocation method for removing their singularity at the Earth center and high-accuracy result is obtained.

Key words Chebyshev collocation method; ordinary differential equations of the Earth's free oscillation; singularity