

地图图斑形状特征的量化及其分形模型研究

吴纪桃 王 桥

(武汉测绘科技大学基础课部, 武汉市珞喻路 39 号, 430070)

摘 要 运用分形几何原理, 提出了量化地图图斑形状特征的分形模型, 讨论了模型中的参数——形状因子和分维的意义及求法, 给出了制图现象形状特征量化的一种新途径。

关键词 地图图斑; 分形; 形状因子; 分维

分类号 P283.1

计算机制图、地理信息系统的迅速发展, 迫切需要对地图图形信息的形状特征进行数量化描述, 从而推动地图学研究从定性向定量的转化。大量的制图现象在地图上往往表现为地图图斑, 为探索量化地图图斑形状特征的途径, 国内外学者提出了不少描述形状标志。近来的研究表明, 这些指标由于受传统数学方法(主要是传统几何方法)的局限, 还不能充分顾及图形的复杂程度, 因而它们主要适于比较规则图斑的形状特征量化, 对于形状复杂的图斑, 其形状特征的量化需进一步深入研究。

Mandelbrot 创立的分形理论为研究复杂、非规则现象提供了有力的工具, 近年来已被广泛和成功地应用于众多领域^[1,4,10]。大量研究表明, 地理现象是分形表现极为典型的例证^[3,4]。而地图图斑是地理现象的反映, 不同于一般的图形, 它有着非常深刻的地理背景, 所以, 可以认为复杂地图图斑属于分形(一般是在统计意义上的), 也即可以用分形方法对其进行研究。

地图图斑通常有单个图斑(包括单连通, 如图 1(a)所示; 复连通, 如图 1(b)所示; 图斑集, 如图 1(c)所示)两种表示形式, 以下将分别就这两种情形进行分形建模。

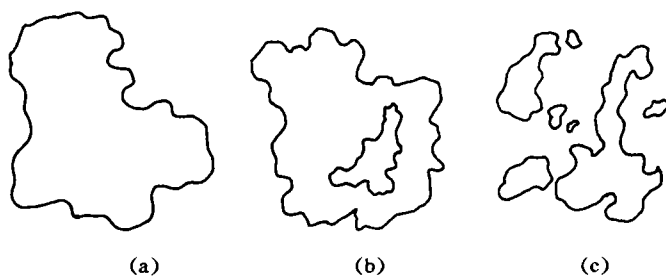


图 1

1 基于分形分析的地图图斑形状特征指标

Mandelbrot 从分析规则几何图形的周长-面积关系中, 给出了分形曲线的长度 L 与它所包围的面积 A 的关系:

$$L^{1/D} \propto A^{1/2} \quad (1)$$

其中, D 是曲线的分维。我们运用量纲分析方法^[10]可以得到 L 与 A 满足:

$$L^{1/D} = ad^{(1-D)/D} A^{1/2} \quad (2)$$

其中, d 是量测尺度; L 是在 d 下图斑周界的欧氏长度; A 是在 d 下图斑的面积; a 是无量纲常数, $D(1 \leq D \leq 2)$ 称为图斑的分维。由(2)式不难看出, 当 A 确定时, D 越大则 L 越大, 即周界填充空间的能力越大, 也就是图斑周界曲线越复杂, 所以 D 可以刻画图斑边界的复杂程度。

下面分析(2)式中 a 的作用。由(2)式, 得:

$$a = L^{1/D} d^{1-1/D} / A^{1/2} \quad (3)$$

当 $D=1$ (即图斑具有规则形状时), 由(3)式得:

$$a = L / A^{1/2} \quad (4)$$

不妨设图斑为长是 x , 宽是 y , 长宽比是 $t=x/y$ 的单连通矩形, 由(4)式得:

$$a = 2(x+y)/(xy)^{1/2} = 2(t^{1/2} + 1/t^{1/2}) \quad (5)$$

利用微积分方法分析(5)式可知, a 在 $t=1$ 时达到最小; 当 $t>1$ 时, a 单调增加。从而, 当图斑为正方形时, $a=4$; 当图斑是长方形时, $a>4$; 当长宽比 t 越大时, a 越大。由此可见, a 刻画了图斑的“扁率”。

对于复连通矩形, 我们也可以类似地分析出 a 的作用。同理, 我们也可以就图斑的形状为椭圆、多边形等情形, 得出关于 a 的上述结论。

当 $D \neq 1$ (即图斑具有复杂形状) 时, 由(3)式可知:

$$a = \frac{L^{1/D} d^{1-1/D}}{A^{1/2}} = \frac{L}{A^{1/2}} \left(\frac{d}{L} \right)^{1-1/D} \quad (6)$$

对于固定的尺度 d , 由于 $1-1/D$ 比较小, 所以 $(d/L)^{1-1/D}$ 一般接近于 1, (6)式中起决定作用的是 $L/A^{1/2}$ 。将(6)式与(4)式相比较, 由上述讨论可知, 对于非规则图斑, a 仍然刻画了“扁率”, 也即刻画了图斑的总体形状, 因此, 我们称 a 为图斑的形状因子。

对(2)式两边取对数:

$$\frac{1}{D} \ln L = \ln a + \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \ln d + \frac{1}{2} \ln A \quad (7)$$

整理(7)式, 可得:

$$\ln \left(\frac{L}{d} \right) = D \ln a + D \ln \left(\frac{A^{1/2}}{d} \right) \quad (8)$$

为考察形状因子 a 与分维 D 的关系, 不妨固定 L 与 A 。设 $\ln(L/d) = C_1$, $\ln(A^{1/2}/d) = C_2$, (8)式可写成:

$$D = C_1 / (\ln a + C_2) \quad (9)$$

由(9)式知: a 越大 (“扁率”越大), D 越小 (边界越光滑); 反之, a 越小, D 越大, 即边界越复杂。因此, 形状因子与分维相互制约, 共同从数量上决定了图斑的形状特征。

根据分形几何原理和图形形态测量理论, 一旦图形的复杂程度及 “扁率” 确定了, 该图形形状的本质特征也就随之确定了。上述讨论表明, (2)式同时从复杂程度、“扁率” 两方面反映了图斑形状的本质特征, 因此, 可作为量化地图图斑形状特征的基本依据。

2 单个地图图斑分维及形状因子估值

令 $C = D \ln a$, 则(8)式可写成:

$$\ln\left(\frac{L}{d}\right) = C + D \ln\left(\frac{A^{1/2}}{d}\right) \quad (10)$$

为得到 D 和 a 的估值,可考虑根据 d 的不同取值 d_1, d_2, \dots, d_k (即 d 的不同尺度), 得出一系列点对: $(\ln A_1^{1/2}/d_1, \ln L_1/d_1), (\ln A_2^{1/2}/d_2, \ln L_2/d_2), \dots, (\ln A_k^{1/2}/d_k, \ln L_k/d_k)$, 然后用线性回归分析方法在 $\ln A^{1/2}/d - \ln L/d$ 坐标系下拟合这些点对。根据(10)式, 所拟合的直线的斜率即为 D 的估值; 该直线在纵轴上的截距即为 C 。再由 $C = D \ln a$, 可求出:

$$a = e^{C/D} \quad (11)$$

从以上讨论容易知道, 获得 D, a 的估值的关键在于计算 A_i 和 L_i , 下面我们提出 3 种 D, a 的估值方法。

2.1 基于步行算法的估值

设构成所讨论图斑的数据集为 $S = \{(X_i, Y_i) | i = 1, 2, \dots, m\}$, 由曲线分维估值的步行算法^[10], 对给定的尺度 d_i , 可得出 S 的生成集 S' : $S'_i = \{(x_{i,j}, y_{i,j}) | j = 1, 2, \dots, n_i\}$, 其中, $[(x_{i,j} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i,j} - y_{i,j+1})^2]^{1/2} = d_i$, $(i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i - 1)$, 从而 $L_i = (n_i - 1)d_i + \theta_i d_i = (n_i - 1 + \theta_i)d_i$, $(0 < \theta_i < 1)$

$$A_i = \left| \sum_{j=2}^{n_i-1} y_{i,j} (x_{i,j-1} - x_{i,j+1}) \right| / 2$$

其中, $i = 1, 2, \dots, k$ 。按线性回归分析原理:

$$D = \frac{k \sum_{i=1}^k [\ln(\frac{L_i}{d_i}) \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})] - [\sum_{i=1}^k \ln(\frac{L_i}{d_i})] [\sum_{i=1}^k \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})]}{k \sum_{i=1}^k [\ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})]^2 - [\sum_{i=1}^k \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})]^2} \quad (12)$$

$$C = \frac{[\sum_{i=1}^k \ln(\frac{L_i}{d_i})] [\sum_{i=1}^k \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})] - \sum_{i=1}^k [\ln(\frac{L_i}{d_i}) \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})] \sum_{i=1}^k \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})}{k \sum_{i=1}^k [\ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})]^2 - [\sum_{i=1}^k \ln(\frac{A_i^{1/2}}{d_i})]^2} \quad (13)$$

再由(11)式, $a = e^{C/D}$ 。

2.2 基于 Douglas-Peucker 算法的估值

容易看到, 由步行算法得到的 S'_i 中有很多新插入的非原始数据点, 这在一定程度上可能会影响估值效果。为使 $S'_i \subset S$, 可考虑使用 Douglas-Peucker 方法, 即根据阈值 d_i (矢高) 与各数据点至递归弦的距离的比较结果决定数据点的取舍, 从而得到生成集 S'_i : $S'_i = \{(x_{i,j}, y_{i,j}) | j = 1, 2, \dots, n_i\}$, 其中

$$\frac{|(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})(x_{i,j} - x_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i,j-1} - y_{i,j})|}{[(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2]^{1/2}} > d_i$$

式中, $i = 1, 2, \dots, k; j = 2, 3, \dots, n_i - 1$, 故

$$L_i = \sum_{j=1}^{n_i} [(x_{i,j} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i,j} - y_{i,j+1})^2]^{1/2}, \quad X_{i,n_i+1} = x_{i,1}, \quad y_{i,n_i+1} = y_{i,1}$$

$$A_i = \left| \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} (x_{i,j-1} - x_{i,j+1}) \right| / 2, \quad X_{i,n_i+1} = X_{i,1}, \quad X_{i,n_i} = X_{i,0}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

与 2.1 类似地, 可求出 D, C 和 a 。

2.3 基于计盒算法的估值

我们知道, 用栅格数据形式便于进行面块的数据处理, 为此, 我们给出如下方法。

用行距、列距均为 d 的方形网格覆盖图斑, 计算出边界 L 所占的格子数 $N(d)$ 和面积 A 所占的格子数 $M(d)$, 则可得到基于尺度 d 的 L 与 A :

$$L = N(d)d \quad (14)$$

$$A = M(d)d^2 \quad (15)$$

把(14)式, (15)式代入(10)式:

$$\ln \frac{N(d)d}{d} = C + D \ln \frac{[M(d)d^2]^{1/2}}{d}$$

$$\text{即} \quad \ln N(d) = C + D[\ln M(d)]/2 \quad (16)$$

显然, 只要 d 取不同值 d_1, d_2, \dots, d_k , 可得出相应的 $(N(d_1), M(d_1)), (N(d_2), M(d_2)), \dots, (N(d_k), M(d_k))$, 根据(16)式及线性回归分析原理, 与 2.1、2.2 类似地可求出:

$$D = \frac{k \sum_{i=1}^k [\ln N(d_i) \ln M(d_i)] - [\sum_{i=1}^k \ln N(d_i)] [\sum_{i=1}^k \ln M(d_i)]}{k \sum_{i=1}^k [\ln M(d_i)]^2 - [\sum_{i=1}^k \ln M(d_i)]^2} \quad (17)$$

$$C = \frac{[\sum_{i=1}^k \ln N(d_i)] [\sum_{i=1}^k \ln M(d_i)] - \sum_{i=1}^k [\ln N(d_i) \ln M(d_i)] \sum_{i=1}^k \ln M(d_i)}{k \sum_{i=1}^k [\ln M(d_i)]^2 - [\sum_{i=1}^k \ln M(d_i)]^2} \quad (18)$$

$$a = e^{C/D}$$

3 地图图斑集分维及形状因子估值

由多个图斑构成的地图图斑集是较为常见的情形, 其分维及形状因子估值的基本原理与单个图斑的情形类似, 但处理采用的观点或手法可以是多样的, 我们提出以下 4 种方法:

3.1 简单平均法

多个图斑构成的地图图斑集的形状特征可视为由其各图斑的形状特征共同作用的结果, 故可分别用构成图斑集的各图斑的维数、形状因子的平均数作为图斑集的维数和形状因子。

设图斑集由 n 个图斑构成, 各单个图斑的分维分别为 D_1, D_2, \dots, D_n ; 形状因子分别为 a_1, a_2, \dots, a_n , 则图斑集的分维 D 和形状因子 a 分别为:

$$D = (\sum_{i=1}^n D_i)/n, \quad a = (\sum_{i=1}^n a_i)/n \quad (19)$$

(19)式刻画了平均意义上图斑集的形状特征。

3.2 加权平均法

简单平均法具有简便易行的优点, 但存在明显的不足, 即当图斑集中各图斑大小相差悬殊时, (19)式对图斑集的形状特征刻画就会显得粗糙, 因为面积大者必然对图斑集形状特征刻画的贡献大。为此, 我们采用以面积为权来进行加权平均。

设 A 是图斑集的总面积, A_i 是第 i 个图斑的面积 ($i=1, 2, \dots, n$), 则(19)式可改写成:

$$D = \sum_{i=1}^n A_i D_i / A, \quad a = \sum_{i=1}^n A_i a_i / A$$

3.3 整体回归法

前二种方法强调了构成图斑集的各个图斑个体对整体形状的作用。事实上, 亦可将图斑集

作为一个整体对待,视其面积 A 为各图斑面积 A_i 之和,周长 L 为各图斑周长 L_i 之和($i=1,2,\dots,n$),按(10)式有:

$$\ln\left[\left(\sum_{i=1}^n L_i\right)/d\right] = \ln C + D \ln\left[\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)^{1/2}/d\right] \quad (21)$$

再类似 2.1 或 2.2,对整体的面积 $A=\sum_{i=1}^n A_i$ 和周长 $L=\sum_{i=1}^n L_i$ 的有关测量值作线性回归,即可得到整体图斑集的分维 D 和形状因子 a 。

3.4 计盒法

将整体回归法与单个图斑情形的计盒法相结合,可以获得图斑集分维及形状因子估值的计盒法。

如图 2 所示,用行距、列距均为 d_i 的方形网格覆盖图斑集,与 2.3 类似地,可算出每个图斑边界所占格子数 $N_1(d_i), N_2(d_i), \dots, N_k(d_i)$ 和面积所占格子数 $M_1(d_i), M_2(d_i), \dots, M_k(d_i)$ ($i=1,2,\dots,k$),此时将图斑集视为一个整体,把 $N(d_i) = \sum_{j=1}^k N_j(d_i), M(d_i) = \sum_{j=1}^k M_j(d_i)$ 代入(17)、(18)式即可求出图斑集的分维 D 和形状因子 a 。

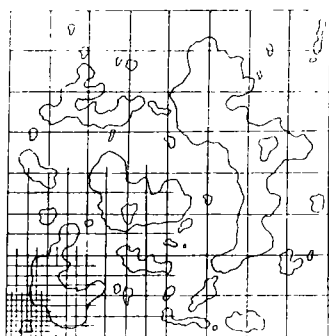


图 2

4 实例及其结果分析

下面以单个图斑为例,应用本文所提出的方法对图 3(a)~3(d)所示图斑形状特征进行量化,并对结果作出分析。采用 2.3 中所提出的方法,分别对图 3(a)~3(d)所示图斑进行分维、形状因子估值结果如下表。

表 1

图 形	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)
分维 D	1.051	1.205	1.040	1.231
形状因子 a	3.272	3.183	4.413	4.278

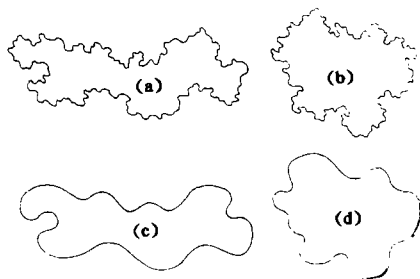


图 3

从上面结果可以看出,图 3(a)与 3(b),3(c)与 3(d)的分维值有较大差异,反映了它们边界的复杂程度相差很大,但这并不意味着它们的总体形态相差很大。事实上,它们的形状因子值很接近,说明它们在总体形态上是很接近的;不过这也还不能说明它们的形状特征很接近,因为边界形状的较大差异导致了它们形状特征上的明显差异。类似地,尽管图 3(a)与 3(c)、3(b)与 3(d)的分维值很接近,即边界复杂程度很接近,但它们的形状因子值却有很大差异,因而它们形状特征的差异也是很大的。由图 3 可以看到,上述结果、结论是与实际相符合的。同时,我们也看到,不同的分维值、形状因子值反映了图斑边界的不同复杂程度和图斑的不同形态——分维与形状因子相辅相成,共同在本质上描述了图斑形状特征的数量规律。

综合上述,本文所进行的研究是量化地图图斑形状特征的新探索,其结果可能会给制图综合、空间分析、机助制图等领域中现有方法难以处理的有关问题的解决带来新的希望。

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.
- 2 Falconer K J. Fractal Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- 3 Lam N S N, Quattrochi D A. On the Issues of Scale, Resolution and Fractal Analysis in the Mapping Sciences. Professional Geographer, 1992, 44(1): 88~98
- 4 Goodchild M F, Mark D M. The Fractal Nature of Geographic Phenomena. Annals of the Association of American Geographers, 1987, 77: 265~278
- 5 Lee D C. Fractal Analysis of Classified Landsat Scence. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1989, 55(5): 601~610
- 6 Olsen E R. A Modified Fractal Dimension as a Measure of Landscape Diversity. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1993, 59(10): 1517~1572
- 7 Burce T M. Measuring the Fractal Geometry of Landscapes. Applied Mathematics and Computation, 1988, 27: 67~79
- 8 Gagnepain J J, Roques C C. Fractal Approach to Two-dimensional and Three-dimensional Surface Roughness. Wear, 109(1/4), 1986. 119~126
- 10 董连科. 分形理论及其应用. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1991.
- 11 王 桥, 吴纪桃. 分形、分维及其在地图制图中的应用. 地图, 1992(3): 5~11
- 12 王 桥. GIS 环境下制图综合分形处理方法研究. 见: '94 地理信息系统学术讨论会论文集. 北京: 中国科学技术发展基金会, 1994

A Research on the Quantization and Fractal Model for Polygonal Shape Features on Map

Wu Jitao Wang Qiao

(Dept. of Fundamental Courses, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract By applying the fractal theory, a fractal model of quantizing polygonal shape features on map is proposed. The meaning and formula of the model parameters, which are shape factor and fractal dimension, are also discussed. Thus a new solution for measuring the shape features on map is given.

Key words polygonal shape on map; fractal; shape factor; fractal dimension