DOI:10.13203/j.whugis1995.01.013
第20卷第1期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 20 No. 1
1995年3月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping March 1995

分数布朗运动的小波分析

王 桥 胡毓钜
(武汉测绘科技大学图土信息与地图科学系,武汉市珞喻路39号,430070)

摘 要 给出了分数布朗运动的连续和离散小波分析,讨论了有关的性质,并将结果用于分维估值、分数布朗运动小波变换系数的相关性研究等方面。

关键词 分数布朗运动;分维数;小波分析;随机过程
分类号 O174;TP391

本文所依据的小波分析理论的主要结果是:对于$\mathbb{R}$的全体二进区间 $I=[K/2^j,(k+1)/2^j)$ $(j,k\in\mathbb{Z})$所组成的集合 $\mathscr{F}$,存在小波函数 $\psi(x)$,且具有足够强的光滑性;它本身与它的导数在无穷远处速降(甚至可要求它本身有紧支集),具有高阶的消失矩;其 Fourier 变换集中在原点附近,使得 $\psi_I(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k)$,即由 ψ 进行平移与展缩所得到的函数系 $\{\psi_I\}_{I\in\mathscr{F}}$,构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组完备的正交基(小波基),它是大多数已知的 Banach 空间(L^p, $1<p<\infty$;Hardy 空间 H^p;BMO;Sobolev 空间 H^m;Besov 空间 $\dot{B}_p^{sq}$, $1<p,q\leqslant\infty$;Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_p^{sq}$, $1<p<\infty$等)的无条件基。对这组正交基 φ_I,不仅可以进行频谱分析,逐项微分与积分,还可以进行局部分析。

1 分数布朗运动

分数布朗运动 fBm 是一个零均值的非平稳高斯随机函数:

$$B_H(t)=\frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\left[\int_{-\infty}^{0}(|t-s|^{H-1/2}-|s|^{H-1/2})\mathrm{d}B(s)+\int_0^t|t-s|^{H-1/2}\mathrm{d}B(s)\right]$$

其中,$B(t)$是通常的布朗运动,$0<H<1$,$\Gamma(x)$是 Gamma 函数。

易知,fBm 的自相关函数为:

$$R_{B_H}(t,s)=E(B_H(t)B_H(s))=V_H[|t|^{2H}+|s|-|t-s|^{2H}]/2 \tag{1}$$

式中,$V_H=\Gamma(1-2H)\cos(\pi H)/\pi H$。

从(1)式可以知道,fBm 不是一个平稳过程。但是,fBm 的增量是一个平稳过程,即对任何尺度参数 $a>0$ 和时间 t,

$$(B_H(t+a\tau)-B_H(t))\overset{d}{=}(a^HB_H(\tau)),\qquad (\overset{d}{=}\text{ 表示等分布})$$

fBm 的最本质的特征是它构成的图形具有统计意义上的自相似性。其分维值 D 可由下式确定:

$$D=n+1-H \tag{2}$$

式中,n 是拓扑维数。

收稿日期:1994-07-27. 王桥,男,37岁,博士生,副教授,现从事数学制图与计算机制图研究.

2　fBm 的连续小波分析

根据引言中的结果,对于给定的尺度 a,可以得出分数布朗运动 $B_H(t)$的连续小波变换:

$$T_{B_H}(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} B_H(s) g(\frac{s-t}{a}) \mathrm{d}s \tag{3}$$

其中,$g(t)$是一分析小波,其 Fourier 变换 $G(W)$满足:

$$G(0) = 0, \qquad \int_0^{+\infty} |G(W)|^2 \frac{\mathrm{d}W}{W} < \infty,\ a \neq 0$$

(3)式表示了 $B_H(t)$在 $g(t)$函数的不同尺度 a 和平移 t 上的投影。

下面考察 $T_{B_H}(t,a)$的自相关函数:

$$R_{B_H}(t,s;a) = E(T_{B_H}(t,a)T_{B_H}(s,a)), \qquad (a\ \text{是给定的尺度})$$

注意到 $G(0)=0$,由(1)式可得出:

$$R_{B_H}(t,s;a) = -(V_H/2)a^{2H+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_g(\tau - \frac{t-s}{a})|\tau|^{2H}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

其中,

$$\gamma_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)g(\theta - \tau)\mathrm{d}\theta$$

从(4)式看到,$R_{B_H}(t,s;a)$是 t 与 s 的函数,只与 $t-s$ 有关,也即只与时间间隔有关。所以,在尺度一定的情况下,$T_{B_H}(t,a)$是平稳过程。这是分数布朗运动的连续小波变换的一个重要性质,它提供了一条将非平稳过程的分数布朗运动转化为平稳过程进行研究的途径。

利用(4)式还可进行分维估值。当 $t=s$ 时,

$$R_{B_H}(t,t;a) = -(V_H/2)a^{2H+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_g(\tau)|\tau|^{2H}\mathrm{d}\tau$$

$$= a^{2H+1}(-V_H/2)\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2H}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)g(\theta-\tau)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau$$

此时,$(-V_H/2)\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2H}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)g(\theta-\tau)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau$ 是常数,设其为 c,则有:

$$R_{B_H}(t,t;a) = ca^{2H+1} \tag{5}$$

(5)式中两边取对数:

$$\lg R_{B_H}(t,t;a) = (2H+1)\lg a + \lg c \tag{6}$$

在不同尺度 a_i 下,计算 $R_{B_H}(t,t;a_i)$。可以得到点对$(a_i, R_{B_H}(t,t;a_i))$。再根据(6)式进行最小二乘拟合,即可得到 H 值,从而根据(2)式,得到分维值 D。

3　fBm 的离散小波分析

设 $N(\varphi)$是一个正交的多尺度分析,$\varphi \in L^2(\mathbb{R})$,且 φ 满足双尺度差分方程:

$$\varphi(t) = \sum_n C_n \varphi(2t-n)$$

令

$$\psi(t) = \sum_n (-1)^n C_{1-n}\varphi(2t-n), \quad \psi_{mn}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t-n)$$

$m,n \in \mathbb{Z}$,可以证明,$(\psi_{mn})_{mn\in Z}$构成 $L^2(\mathbb{R})$的标准正交基。

当序列$\{C_k\}$有限时,相应的小波 $\psi(t)$具有有限支集。此时,$\psi(t)$至少存在一阶消失矩,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t)\mathrm{d}t = 0, \qquad m = 1,2,\cdots,n$$

由 $\varphi(t)$、$\psi(t)$及序列$\{C_k\}$的上述性质可以得出：

$$\operatorname{span}\{2^{J/2}\varphi(2^J t - m), m \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{j=-\infty}^{J-1} \operatorname{span}\{2^{j/2}\psi(2^{j/2}t - m), m \in \mathbb{Z}\}$$

这样，可计算出 $B_H(t)$于尺度 2^j 的离散小波变换系数：

$$b(j,m) = \langle B_H(t), 2^{j/2}\psi(2^j t - m)\rangle = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} B_H(t)\psi(2^j t - m)\mathrm{d}t$$

及其多尺度逼近的广义 Fourier 系数：

$$a(j,m) = \langle B_H(t), 2^{j/2}\varphi(2^j t - m)\rangle = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} B_H(t)\varphi(2^j t - m)\mathrm{d}t$$

由于对于任意有限整数 J，$\{2^{J/2}\varphi(2^J t-m)\} \cup \{2^{j/2}\psi(2^j t-m)\}_{j=J}^{\infty}$是 $L^2(\mathbb{R})$的正交基，所以 $B_H(t)$可以写成：

$$B_H(t) = 2^{j/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(J,m)\varphi(2^J t - m) + \sum_{j=J}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{j/2} b(j,m)\psi(2^j t - m) \tag{7}$$

(7)式即给出了分数布朗运动 $B_H(t)$的多分辨分解。对于固定的 j，$\{\sum_m 2^{j/2}b(j,m)\psi(2^j t-m)\}$即是 $B_H(t)$的尺度为 2^j 的细节，而$\{\sum_m 2^{j/2}a(J,m)\psi(2^J t-m)\}$则是 $B_H(t)$的直到尺度 2^J 的近似。

下面讨论有关性质。首先证明 $b(j,m)$是一个平稳过程。

设 $\psi(t)$是具有紧支集$[-k_1,k_2](k_1,k_2>0)$和 M 阶消失矩的正交小波，$b(j,m)$的自相关函数为：

$$\begin{aligned}
R_b(j,k;m,n) &= E[b(j,m)b(k,n)] \\
&= 2^{(j+k)/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_H}(s,t)\psi(2^j t - m)\psi(2^k s - n)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \frac{-V_H}{2}\cdot\frac{1}{2^{(j+k)/2}}\int_{-k_1}^{k_2}\mathrm{d}t\int_{-k_1}^{k_2}|2^{-j}t - 2^{-k}s + 2^{-j}m - 2^{-k}n|^{2H}\psi(t)\psi(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{-V_H}{2}\,\frac{2^{-2Hj}}{2^{(j+k)/2}}\int\mathrm{d}t\int|t + 2^{j-k}n - m|^{2H}\psi(2^{j-k}s - t)\psi(s)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $\psi(t)$具有紧支集，且 $0<H<1$，所以，$R_b(j,k;m,n)$对于一切 j 和 $k\geqslant 0$ 以及 m、n 都是有限的。注意到对于固定的尺度(例如 $j=k$)，$R_b(j,k;m,n)$是$|m-n|$的函数，故 $b(j,m)$对固定的 j 是一个平稳过程。

下面考察母小波 $\psi(t)$对 $R_b(j,k;m,n)$的影响。为此我们定义一个函数：

$$\Lambda(2^{j-k};t) = \int\psi(2^{j-k}s - t)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

利用(9)式，$R_b(j,k;m,n)$可以写成：

$$R_b(j,k;m,n) = \frac{-V_H}{2}\,\frac{2^{-2Hj}}{2^{(j+k)/2}}\int|t + 2^{j-k}n - m|^{2H}\Lambda(2^{j-k};t)\mathrm{d}t$$

由于

$$\int t^m\mathrm{d}t\int\psi(2^{j-k}s - t)\psi(s)\mathrm{d}s = -\int\mathrm{d}t\int(2^{j-k}s - t)^m\psi(t)\psi(s)\mathrm{d}s$$

$$= -\int\mathrm{d}t\int\sum_n\binom{m}{n}(2^{j-k}s)^{m-n}(-t)^n\psi(t)\psi(s)\mathrm{d}s = 0, \quad (m < 2M)$$

所以，如果 $\psi(t)$具有 M 阶消失矩，那么 $\Lambda(2^{j-k};t)$就有 $2M$ 阶消失矩；且如果 $\psi(t)$具有紧支集，那么 $\Lambda(2^{j-k};t)$也具有紧支集。

现考虑积分 $\int f(t+a)\Lambda(2^{j-k};t)\mathrm{d}t$（$a$ 为参数）。可以证明，如果 $\Lambda(2^{j-k};t)$ 具有 $2M$ 阶消失矩，$f(t+a)$ 是在 $\Lambda(2^{j-k};t)$ 的有限支集 s 上 $2M$ 次可微的，则下列不等式成立：

$$\left|\int f(t+a)\Lambda(2^{j-k};t)\mathrm{d}t\right| < c\sup_{t\in s}\left|\frac{\mathrm{d}^{2M}f(t+a)}{\mathrm{d}t^{2M}}\right| \tag{10}$$

其中，c 是依赖于 $\psi(t)$ 的某常数。

由(10)式可知，当参数 a 增加时，如果 $|\mathrm{d}^{2M}f(t+a)/\mathrm{d}t^{2M}|$ 迅速衰减，则 $\left|\int f(t+a)\Lambda(2^{j-k};t)\mathrm{d}t\right|$ 也将随 a 增加而迅速衰减。

这里，我们感兴趣的是 $f(t+a)=|t+a|^{2H}$ 的情形。此函数不是 t 的处处可微函数，但是只要 $-a\notin s$，则 $|t+a|^{2H}$ 对于变量 $t(t\in s)$ 将有 $2M$ 阶连续导数。进一步地，当 $a^{2(H-M)}$ 中 a 趋于无穷时，它的 $2M$ 阶导数亦将随之衰减。基于上述事实，我们可得出如下定理：

定理　设 $B_H(t)$ 是具有参数 $H(0<H<1)$ 的分数布朗运动，$\psi(t)$ 是具有 M 阶消失矩的离散正交小波，且具有支集 $[-k_1,k_2]$，$(k_1,k_2>0)$，随机过程 $b(j,m)=2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty}B_H(t)\psi(2^jt-m)\mathrm{d}t$，则：

(i)对于固定的 j，过程 $2^{j(H+1/2)}b(j,m)$ 是平稳过程；

(ii)对于固定的 j 和 k，$R_b(j,k;m,n)$ 随着 $o(|2^{-j}m-2^{-k}n|^{2(H-M)})$ 衰减（m,n 可任意），且 $|2^{-j}m-2^{-k}n|>\max(2^{-j}k_1+2^{-k}k_2,2^{-k}k_1+2^{-j}k_2)$。

此定理结论(i)可直接从(8)式证得；结论(ii)的证明可根据以下事实。如果

$$|2^{-j}m-2^{-k}n|>\max(2^{-j}k_1+2^{-k}k_2,2^{-k}k_1+2^{-j}k_2)$$

则 $-(2^{j-k}n-m)\notin s$，而函数 $|t+2^{j-k}n-m|$ 对任何 $t\in s$ 具有泰勒展开式（s 为如(9)式所定义的函数 $\Lambda(2^{j-k};t)$ 的支集）。

此定理的详细证明从略。

此定理说明，从计算的观点，处理 fBm 的小波变换系数比处理 fBm 本身要有效。对于任何有限区间 $[-T_1,T_2]$ $(T_1,T_2>0)$，分数布朗运动 $B_H(t)$ 可分解成：

$$B_H(t)=\sum_{m=N_1}^{N_2}a(m)\varphi(t-m)+\sum_{j\geqslant 0}\sum_{m=-M_1(j)}^{M_2(j)}\sqrt{2}\,b(j,m)\psi(2^jt-m) \tag{11}$$

式中，$t\in[-T_1,T_2]$；$a(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}B_H(t)\varphi(t-m)\mathrm{d}t$；$b(j,m)$ 如定理所设。

(11)式可由规范化方法（技术）去建立。因为对于 (s,t) 平面的任意有限区域，$R_{B_H}(s,t)$ 具有有限功率，因此，它可以扩展到任意有限区域 $I=\{(s,t);-T_1\leqslant s,t\leqslant T_2;T_1,T_2>0\}$ 上：

$$\begin{aligned}R_{B_H}(s,t)={}&\sum_{n=-N_1}^{N_2}\sum_{m=-N_1}^{N_2}R_a(m,n)\varphi(t-m)\varphi(s-n)\\&+\sum_{n=-N_1}^{N_1}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{m=-M_1(j)}^{M_2(j)}2^{j/2}R_{ab}(j;m,n)[\varphi(s-n)\psi(2^jt-m)\\&+\varphi(t-n)\psi(2^js-m)]+\sum_{j\geqslant 0}\sum_{m=-M_1(j)}^{M_2(j)}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n=-M_1(k)}^{M_2(k)}\\&2^{(j+k)/2}R_b(j,k;m,n)\psi(2^jt-m)\psi(2^kt-n)\end{aligned}$$

其中，$-T_1\leqslant s,t\leqslant T_2$。

在 I 所包含的有限区间里，先计算变量 s 的小波变换，再计算变量 t 的小波变换，可求出：

$$R_a(m,n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}R_{B_H}(s,t)\varphi(t-m)\varphi(s-n)\mathrm{d}s$$

$$R_{ab}(j,k;m,n) = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}R_{B_H}(s,t)\varphi(s-n)\psi(2^j t-m)\mathrm{d}s$$

而 $R_b(j,k;m,n)$ 可由(8)式计算。

综上所述，不同尺度 fBm 的离散小波系数是相关的，它们的自相关函数以双曲型衰减，其速率大大快于 fBm 的自相关函数的衰减速度；同时，我们也看到，在任意有限区间上，处理过程 $a(m)$ 和 $b(j,m)$ 就相当于处理 fBm，而这些过程所具有的良好结构以及可产生小波分解等良好性质，使得我们能够获得解决有关 fBm 的理论上和实际应用方面的问题(如快速算法的设计，fBm 的合成等)的有效途径。

参 考 文 献

1 王建忠. 小波理论及其在物理和工程中的应用. 数学进展，1992，21(3)：289～315

2 邓东皋，彭立中. 小波分析. 数学进展，1991，20(3)：294～310

3 刘贵忠，邸双亮. 小波分析及其应用. 西安：西安电子科技大学出版社，1992. 1～178

4 Mandelbrot B B, Ness V. Fractional Brownian Motion, Fractional Noise and Application. SIAM Rev., 1968, 10(4): 422～437

5 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.

6 Flandrin P. Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion. IEEE Trans. Inf., 1992, 38(2): 910～917

7 Flandrin P. On the Spectrum of Fractional Brownian Motions. IEEE Trans. Inf., 1989, 35(1): 197～199

8 Falconer K. Fractal Geometry. Chichester: Wily and Sons, 1990.

9 Devaney R. Chaos, Fractals & Dynamics. Massachusetts: Addision-Wesley, Reading, 1989.

10 Goff J A. Fractal Mapping of Digitized Image Application to the Topography of Arizona and Comparisons with Synthetic-Images-Comments. Journal of Geophysical Research, 1990, 95(NB4): 5159～5163

11 Goff J A. Stochastic Modeling of Seafloor Morphology: A Parameterized Gaussian Model. Geophysical Research Letter, 1989, 16(1): 45～48

The Wavelet Analysis of Fractional Brownian Motion

Wang Qiao Hu Yuju

(Dept. of Land Information & Cartography, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract Fractional Brownian motions (fBm) provide useful fractal modeles for geographic information processing. In this paper, the continuous and discrete wavelet analysis of fBm are proposed. These results are used to estimate fractal dimension, and to study the correlation structure of discrete wavelet coefficients of fBm, and the advantage of using wavelet analysis to study fBm be shown lastly.

Key words fractional Brownian motion; fractal dimension; wavelets; stochastic processes