DOI:10.13203/j.whugis1994.04.006
第19卷第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 19 No. 4
1994年12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1994

贝叶斯序贯平差

王新洲
（武汉测绘科技大学，地球科学与测量工程学院，武汉市珞喻路39号，430070）

摘　要　应用贝叶斯统计理论推导了序贯平差公式。按本文推导的公式进行贝叶斯序贯平差，得到的未知参数 X 的贝叶斯估值与按经典序贯平差得到的结果完全相同，但单位权方差 σ^2 的贝叶斯估值却与按经典平差方法得到的结果相差一个因子。

关键词　贝叶斯统计；序贯平差；先验分布；验后分布
分类号　P207

1　贝叶斯估计原理与贝叶斯假设

贝叶斯统计的基本思想[1-6]，就是将未知参数的先验分布与样本信息相综合，导出未知参数的验后分布，然后据此验后分布作出统计推断。

设未知参数 X 的先验分布密度为 $\pi(X)$，样本（观测值）L 对 X 的条件密度为 $P(L|X)$。用 $f(X|L)$ 表示 X 对 L 的条件密度，即 X 的验后分布密度。于是贝叶斯公式为：

$$f(X|L)=\frac{\pi(X)P(L|X)}{\int_{\Theta}\pi(X)P(L|X)\mathrm{d}X} \tag{1}$$

式中积分域 Θ 为参数空间。当通过观测得到确定的样本 L 后，$P(L|X)$ 中的 L 就是常数。$P(L|X)$ 可看成是未知参数 X 的函数，通常称为似然函数，用 $l(X|L)$ 表示之。又当取得了样本 L 后，(1)式中的分母是与 X 无关的常数。于是未知参数 X 的验后分布可写为[7]：

$$f(X|L)\propto\pi(X)l(X|L) \tag{2}$$

式中 $\propto$ 表示比例。在选择平方损失函数情况下，未知参数 X 的贝叶斯估值为：

$$\hat{X}_B=\mathrm{E}(X|L)=\int_{\Theta}Xf(X|L)\mathrm{d}X \tag{3}$$

当对未知参数 X 一无所知时，X 的先验分布密度 $\pi(X)$ 称为无信息先验分布密度，此时 $\pi(X)$ 未知。在这种情况下，贝叶斯假设 $\pi(X)$ 应在 X 的取值范围内是"均匀"分布的。又由于对 X 一无所知，故设 X 在负无穷到正无穷之间取值。根据广义分布密度[7]有：

$$\pi(X)=c\quad 或\ \pi(X)\propto 1,\quad -\infty<X<\infty \tag{4}$$

如果参数的取值范围为 $(0,\infty)$，例如 σ^2，则可令 $X=\ln\sigma^2$，此时仍有 $-\infty<X<\infty$。因 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}$，所以，

$$\pi(\sigma^2)\propto\frac{1}{\sigma^2} \tag{5}$$

将(4)式代入(2)式，得：

$$f(X|L)\propto l(X|L) \tag{6}$$

收稿日期：1994－03－17．王新洲，男，40岁，博士，讲师，现从事大地测量数据处理的研究。

即在采用无信息先验分布的情况下，似然函数就是验后分布密度的核[7]。

2　贝叶斯序贯平差

设同精度观测值序贯平差的观测方程为：

$$\begin{aligned} &L_k + \Delta_k = A_k X, \quad E(\Delta_k | X) = 0, \quad D(\Delta_k | \sigma^2) = \sigma^2 I_k \\ &L_{k+1} + \Delta_k = A_{k+1} X, \quad E(\Delta_{k+1} | X) = 0, \quad D(\Delta_{k+1} | \sigma^2) = \sigma^2 I_{k+1} \end{aligned} \tag{7}$$

当 $k=1$，并单独平差第一组观测值时，由于此时对未知参数 X 无丝毫的了解，故可采用无信息先验密度(4)式作为 X 的先验分布密度。

假设观测值 L_1 在 X 和 σ^2 取确定值的条件下服从正态分布，即 $L_1 | X,\sigma^2 \sim N(A_1 X, \sigma^2 I_1)$。于是，由似然函数的定义知：

$$l(X,\sigma^2 | L_1) = (2\pi)^{-n/2} (\det\sigma^2 I_1)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(L_1 - A_1 X)^T (L_1 - A_1 X)\right] \tag{8}$$

式中 $\det\sigma^2 I_1$ 表示矩阵 $\sigma^2 I_1$ 的行列式。为了推导公式，引入 X 的最小二乘估值：

$$\hat{X} = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T L_1 \tag{9}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (L_1 - A_1 \hat{X})^T (L_1 - A_1 \hat{X}) / (n_1 - t) = V_1^T V_1 / (n_1 - t) \tag{10}$$

将似然函数(8)式中指数部分的二次型展开：

$$\begin{aligned} (L_1 - A_1 X)^T (L_1 - A_1 X) &= [(L_1 - A_1 \hat{X}) - A_1 (X - \hat{X})]^T [(L_1 - A_1 \hat{X}) - A_1 (X - \hat{X})] \\ &= (L_1 - A_1 \hat{X})^T (L_1 - A_1 \hat{X}) + (X - \hat{X})^T A_1^T A_1 (X - \hat{X}) \end{aligned}$$

因为顾及(9)式有：

$$(X - \hat{X}) A_1^T (L_1 - A_1 \hat{X}) = (L_1 - A_1 \hat{X})^T A_1 (X - \hat{X}) = 0$$

顾及(10)式有：

$$(L_1 - A_1 X)^T (L_1 - A_1 X) = (n_1 - t)\hat{\sigma}^2 + (X - \hat{X})^T A_1^T A_1 (X - \hat{X}) \tag{11}$$

令

$$\tau = 1/\sigma^2, \quad \tau > 0 \tag{12}$$

将(11)、(12)式代入(8)式，得：

$$l(X,\tau | L_1) = (2\pi)^{-n_1/2} \tau^{n_1/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}[(n_1 - t)\hat{\sigma}^2 + (X - \hat{X})^T A_1^T A_1 (X - \hat{X})]\right\} \tag{13}$$

由于采用无信息先验分布，故(4)式是 X 的先验密度。又由于 τ 也未知，故还应导出 τ 的先验分布密度 $\pi(\tau)$。由(5)式并顾及(12)式有 $\pi(\frac{1}{\tau}) \propto \tau$。因为 $d(\frac{1}{\tau})/d\tau = -\frac{1}{\tau^2}$，所以，

$$\pi(\tau) \propto \frac{1}{\tau}, \quad \tau > 0 \tag{14}$$

将(4)、(13)和(14)式代入(2)，得未知参数 X 和 τ 在 L_1 取确定值条件下的验后密度：

$$f(X,\tau | L_1) \propto (2\pi)^{-n_1/2} \tau^{n_1/2-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}[(n_1 - t)\hat{\sigma}^2 + (X - \hat{X})^T A_1^T A_1 (X - \hat{X})]\right\} \tag{15}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = (n_1 - t)\hat{\sigma}^2/2, \qquad \mu_1 = \hat{X} \\ &Q_1^{-1} = A_1^T A_1, \qquad d_1 = (n_1 - t)/2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

则略去常数因子后，(15)式可写为：

$$f(X,\tau | L_1) \propto \tau^{t/2+d_1-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}[2b_1 + (X - \mu_1)^T Q_1^{-1} (X - \mu_1)]\right\} \tag{17}$$

将(17)式与附录中的(B1)式相比较知，除比例常数外，两式相同，所以未知参数 X、τ 服从正态伽马分布，即

$$X,\tau \sim NG(\mu_1,Q_1,b_1,d_1) \tag{18}$$

由附录中的定理 4 知，X 的边缘分布为多变量 t 分布，即

$$X \sim t(\mu_1,b_1Q_1|d_1,2d_1) \tag{19}$$

τ 的边缘分布为伽马分布，即

$$\tau \sim G(b_1,d_1) \tag{20}$$

由附录中的定理 5 知，单位权方差 σ^2 服从逆伽马分布，即

$$\sigma^2 \sim IG(b_1,d_1) \tag{21}$$

由附录中的定理 2 并顾及(3)式和(16)式知，未知参数 X 的贝叶斯估值及其方差阵为：

$$\begin{aligned}\hat{X}_{B1} &= \mathrm{E}(X|L_1) = \mu_1 = \hat{X} = Q_1A_1^{\mathrm{T}}L_1\\ D_{\hat{X}_{B1}} &= \mathrm{D}(X|L_1) = \frac{2d_1}{2d_1-2}b_1Q_1|d_1 = \frac{n_1-t}{n_1-t-2}\hat{\sigma}^2Q_1\end{aligned} \tag{22}$$

由附录中的定理 6 知，单位权方差 σ^2 的贝叶斯估值及其方差为：

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2_{B_1} &= \mathrm{E}(\sigma^2|L_1) = b_1/(d_1-1) = (n_1-t)\hat{\sigma}^2/(n_1-t-2)\\ \mathrm{D}(\hat{\sigma}^2_{B_1}|L_1) &= b_1^2/[(d_1-1)^2(d_1-2)]\\ &= 2(n_1-t)\hat{\sigma}^2/[(n_1-t-2)^2(n_1-t-4)]\end{aligned} \tag{23}$$

(22)和(23)式就是贝叶斯序贯平差中第一组观测值单独平差的公式。平差第二组观测值时，未知参数 X 和 τ 的先验分布就是第一组观测值平差时的验后分布。于是有：

$$\pi(X,\tau|L_2) \propto \tau^{t/2+d_1-1}\exp\{-\frac{\tau}{2}[2b_1+(X-\mu_1)^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(X-\mu_1)]\}$$

第二次平差时，观测值 L_2 的似然函数为：

$$l(X,\tau|L_2) = (2\pi)^{-n_2/2}\tau^{n_2/2}\exp[-\frac{\tau}{2}(L_2-A_2X)^{\mathrm{T}}(L_2-A_2X)]$$

于是，由(2)式得第二次平差时，略去常数因子后的验后分布密度为：

$$\begin{aligned}f(X,\tau|L_2) \propto \tau^{t/2+n_2/2+d_1-1}\exp\{-\frac{\tau}{2}[2b_1+(X-\mu_1)^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(X-\mu_1)\\ +(L_2-A_2X)^{\mathrm{T}}(L_2-A_2X)]\}\end{aligned} \tag{24}$$

令 $a=2b_1+(X-\mu_1)^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(X-\mu_1)+(L_2-A_2X)^{\mathrm{T}}(L_2-A_2X)$，将 a 展开，得：

$$\begin{aligned}a &= 2b_1+X^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}X-2X^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\mu_1+\mu_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\mu_1+L_2^{\mathrm{T}}L_2-2X^{\mathrm{T}}A_2^{\mathrm{T}}L_2+X^{\mathrm{T}}A_2^{\mathrm{T}}A_2X\\ &= 2b_1+L_2^{\mathrm{T}}L_2+\mu_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\mu_1+X^{\mathrm{T}}(A_2^{\mathrm{T}}A_2+Q_1^{-1})X-2X^{\mathrm{T}}(A_2^{\mathrm{T}}L_2+Q_1^{-1}\mu_1)\end{aligned}$$

令

$$Q_2=(A_2^{\mathrm{T}}A_2+Q_1^{-1})^{-1},\quad \mu_2=Q_2(A_2^{\mathrm{T}}L_2+Q_1^{-1}\mu_1),\quad \Delta\mu_2=\mu_1-\mu_2 \tag{25}$$

则 a 可表示为：

$$a = 2b_1+(L_2-A_2\mu_2)^{\mathrm{T}}(L_2-A_2\mu_2)+\Delta\mu_2^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\Delta\mu_2+(X-\mu_2)^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}(X-\mu_2)$$

令

$$b_2=[2b_1+(L_2-A_2\mu_2)^{\mathrm{T}}(L_2-A_2\mu_2)+\Delta\mu_2^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\Delta\mu_2]/2 \tag{26}$$

$$d_2=(n_2+2d_1)/2 \tag{27}$$

将 b_2 代入 a 得：

$$a = 2b_2+(X-\mu_2)^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}(X-\mu_2) \tag{28}$$

将(27)式和(28)式同时代入(24)式，得第二次平差时 X 和 τ 的验后分布密度为：

$$f(X,\tau|L_2) \propto \tau^{t/2+d_2-1}\exp\{-\frac{\tau}{2}[2b_2+(X-\mu_2)^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}(X-\mu_2)]\} \tag{29}$$

显然，(29)式与(B1)式相同，也是正态伽马分布的密度，故 X、τ 仍服从正态伽马分布，即

$$X,\tau \sim NG(\mu_2,Q_2,b_2,d_2)$$

所以，由上述推导知：

$$\left.\begin{aligned} \hat{X}_{B2} &= \mathrm{E}(X|L_2) = \mu_2 = Q_2(A_2^{\mathrm{T}}L_2 + Q_1^{-1}\mu_1) \\ \hat{\sigma}_{B2}^2 &= \mathrm{E}(\sigma^2|L_2) = b_2/(d_2-1) = \frac{(n_1-t)\hat{\sigma}^2 + V_2^{\mathrm{T}}V_2 + \Delta\mu_2^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\Delta\mu_2}{n_2+n_1-t-2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中 $V_2 = A_2\hat{X}_{B2} - L_2$，$\hat{X}_{B2}$ 的协方差阵和 $\hat{\sigma}_{B2}^2$ 的方差分别为：

$$D_{\hat{X}_{B2}} = \frac{2d_2}{2d_2-2}b_2Q_2/d_2 = \frac{b_2}{d_2-1}Q_2 = \hat{\sigma}_{B2}^2Q_2 \tag{31}$$

$$\mathrm{D}(\hat{\sigma}_{B2}^2) = b_2^2/[(d_2-1)^2(d_2-2)] \tag{32}$$

一般地，令

$$V_{k+1} = A_{k+1}\mu_{k+1} - L_{k+1},\quad \Delta\mu_{k+1} = \mu_k - \mu_{k+1},\quad k \geqslant 1 \tag{33}$$

有：

$$\left.\begin{aligned} Q_{k+1} &= (A_{k+1}^{\mathrm{T}}A_{k+1} + Q_k^{-1})^{-1},\ \mu_{k+1} = Q_{k+1}(A_{k+1}^{\mathrm{T}}L_{k+1} + Q_k^{-1}\mu_k) \\ b_{k+1} &= (2b_k + V_{k+1}^{\mathrm{T}}V_{k+1} + \Delta\mu_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}\Delta\mu_{k+1})/2,\ d_{k+1} = (n_{k+1} + 2d_k)/2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

于是有贝叶斯序贯平差递推公式：

$$\hat{X}_{B_{k+1}} = \mu_{k+1} = Q_{k+1}(A_{k+1}^{\mathrm{T}}L_{k+1} + Q_k^{-1}\mu_k),\ k \geqslant 0 \tag{35}$$

$$\hat{\sigma}_{B_{k+1}}^2 = b_{k+1}/(d_{k+1}-1) = \frac{2b_k + V_{k+1}^{\mathrm{T}}V_{k+1} + \Delta\mu_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}\Delta\mu_{k+1}}{n_{k+1}+2d_k-2},\ k \geqslant 0 \tag{36}$$

注意，当 $k=0$ 时，由于使用了无信息先验分布，有 $\mu_0=0$。此时可补充定义 $b_0=0, \Delta\mu_1=0$。

由以上推导知，贝叶斯序贯平差递推公式(35)式和(36)式仅适用于同精度独立观测值的情况。而在实际工作中，更多的是不同精度甚至是相关观测值的情况。在这种情况下，作如下变换，可将它们转化为同精度的独立观测值：

$$P_k = G_kG_k^{\mathrm{T}},\ A_k = G_k^{\mathrm{T}}\overline{A}_k,\ L_k = G_k^{\mathrm{T}}\overline{L}_k,\ V_k = G_k^{\mathrm{T}}\overline{V}_k,\ k \geqslant 1 \tag{37}$$

式中 G_k 为下三角阵，通过对 P_k 作乔勒斯基分解而得。$\overline{L}_k$、$\overline{A}_k$ 和 $\overline{V}_k$ 为实际的观测值、设计矩阵和改正数。作此变换后，可得：

$$Q_1 = (\overline{A}_1^{\mathrm{T}}G_1G_1^{\mathrm{T}}\overline{A}_1)^{-1} = (\overline{A}_1^{\mathrm{T}}P_1\overline{A}_1)^{-1},\ Q_{k+1} = (\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\overline{A}_{k+1} + Q_k^{-1})^{-1},\ k \geqslant 1 \tag{38}$$

$$\hat{X}_{B_{k+1}} = \mu_{k+1} = (\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\overline{A}_{k+1} + Q_k^{-1})^{-1}(\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\overline{L}_{k+1} + Q_k^{-1}\mu_k),\ k \geqslant 0 \tag{39}$$

$$\hat{\sigma}_{B_{k+1}}^2 = \frac{2b_k + \overline{V}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\overline{V}_{k+1} + \Delta\mu_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}\Delta\mu_{k+1}}{n_{k+1}+2d_k-2},\ k \geqslant 0 \tag{40}$$

应用下列矩阵恒等式[9]

$$\left.\begin{aligned} (A^{\mathrm{T}}PA + Q^{-1})^{-1}A^{\mathrm{T}}P &= QA^{\mathrm{T}}(AQA^{\mathrm{T}} + P^{-1})^{-1} \\ (A^{\mathrm{T}}PA + Q^{-1})^{-1} &= Q - QA^{\mathrm{T}}(AQA^{\mathrm{T}} + P^{-1})^{-1}AQ \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

则(39)式可变为：

$$\begin{aligned} \hat{X}_{B_{k+1}} &= [Q_k - Q_k\overline{A}_{k+1}(\overline{A}_{k+1}Q_k\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}} + P_{k+1}^{-1})^{-1}A_{k+1}Q_k](\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\overline{L}_{k+1} + Q_k^{-1}\mu_k) \\ &= \hat{X}_{B_k} + Q_k\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\overline{A}_{k+1}Q_k\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}} + P_{k+1}^{-1})^{-1}(\overline{L}_{k+1} - \overline{A}_{k+1}\hat{X}_{B_k}) \end{aligned} \tag{42}$$

显然，(42)式就是文献[10]中(6-4-15)式在 $B_k = -I_k$ 时的形式。

由(41)式的第二式有：

$$Q_{k+1} = Q_k - Q_k\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\overline{A}_{k+1}Q_k\overline{A}_{k+1}^{\mathrm{T}} + P_{k+1}^{-1})^{-1}\overline{A}_{k+1}Q_k \tag{43}$$

(43)式就是文献[10]中(6-4-16)式在 $B_k = -I_k$ 时的形式。可见贝叶斯序贯平差与经典序贯平差所得到的未知数 X 的估值及其协因数阵完全一样。但比较(40)式与文献[10]中(6-4-13)式知，单位权方差的估值不同。顾及文献[10]中的符号与本文符号的含义知，它们的分子相同，分母不同，且有：

$$\frac{\hat{\sigma}^2_{B_{k+1}}}{\hat{\sigma}^2_{k+1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1} n_i - t}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} n_i - t - 2}, \quad k \geqslant 1 \qquad (44)$$

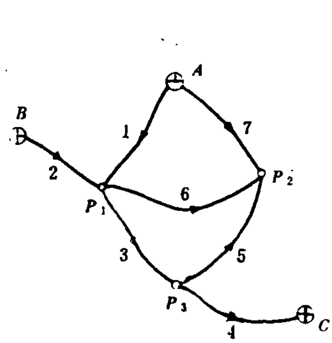

图 1

3　算例与结论

本例取自文献[12]中的例[6-8]，水准网如图 1 所示。已知 $H_A=5.000\mathrm{m}$，$H_B=3.953\mathrm{m}$，$H_C=7.650\mathrm{m}$，观测高差及路线长度见表 1。文献[12]中将 7 个观测值一起平差，其结果为：

表 1

序　号	1	2	3	4	5	6	7
观测高差/m	0.050	1.100	2.398	0.200	1.000	3.404	3.452
路线长度/km	1	1	2	2	2	2	2

$$\delta\hat{X} = (-1.8421 \quad 0.4211 \quad 0.5263)^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\sigma}^2 = 5.7632$$

现将前 6 个观测值作为第一组，最后一个观测值作为第二组，按贝叶斯序贯平差。因为

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{l}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则有 $\delta\hat{X}_{B_1} = (\overline{A}_1^{\mathrm{T}} P_1 \overline{A}_1)^{-1} \overline{A}_1^{\mathrm{T}} P_1 \bar{l}_1 = (-1.6956 \quad 1.0435 \quad 0.7826)^{\mathrm{T}} = \mu_1$。由文献[12]知 $\bar{l}_2 = 0$，$P_2 = 2$，故由(42)式有：

$$\bar{l}_2 - \overline{A}_2 \mu_1 = -1.0435$$

$$Q_1 \overline{A}_2^{\mathrm{T}} (\overline{A}_2 Q_1 \overline{A}_2^{\mathrm{T}} + P_2^{-1})^{-1} = (0.1404 \quad 0.5965 \quad 0.2456)^{\mathrm{T}}$$

所以，

$$\delta\hat{X}_{B_2} = \begin{bmatrix} -1.6956 \\ 1.0435 \\ 0.7825 \end{bmatrix} - 1.0435 \begin{bmatrix} 0.1404 \\ 0.5965 \\ 0.2456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8421 \\ 0.4211 \\ 0.5263 \end{bmatrix} = \delta\hat{X} = \mu_2$$

因为，$\overline{V}_1 = \overline{A}_1 \delta\hat{X}_{B_1} + \bar{l}_1 = (1.3044 \quad -1.6956 \quad 1.4782 \quad -0.7826 \quad 2.2609 \quad -2.2609)^{\mathrm{T}}$

所以，

$$\overline{V}_1^{\mathrm{T}} P_1 \overline{V}_1 = 22.1739, \qquad \hat{\sigma}_1^2 = \overline{V}_1^{\mathrm{T}} P_1 \overline{V}_1 / (n_1 - t) = 7.3913$$

$$\hat{\sigma}^2_{B_1} = (n_1 - t)\hat{\sigma}_1^2 / (n_1 - t - 2) = 22.1739, \quad \overline{V}_2 = 0.4211, \quad \overline{V}_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2 = 0.3547$$

$$\Delta\mu_2 = \mu_1 - \mu_2 = (-0.1465 \quad -0.6224 \quad -0.2563)^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta\mu_2^{\mathrm{T}} Q_1^{-1} \Delta\mu_2 = 0.5442$$

所以由(40)式知 $\hat{\sigma}^2_{B_2} = 11.5264$，显然 $\hat{\sigma}^2_{B_2} > \hat{\sigma}^2$，且有：

$$\hat{\sigma}^2_{B_2} / \hat{\sigma}^2 = 2 = \frac{1 + 6 - 3}{1 + 6 - 3 - 2} = \frac{n_2 + n_1 - 3}{n_2 + n_1 - 3 - 2}$$

通过以上推导和计算可以看出：

(1)贝叶斯统计推断理论可以用来解决平差问题，尤其是当已知未知参数的先验信息时，更应该应用贝叶斯统计理论。

(2)当使用无信息先验分布时，在观测值 L 服从正态分布的假设下，未知参数 X 的贝叶斯估值 $\hat{X}_B$ 与经典的最小二乘估值完全相同。

(3)单位权方差 σ^2 的贝叶斯估值 $\hat{\sigma}_B^2$ 大于经典估值 $\hat{\sigma}^2$，且 $\hat{\sigma}_B^2/\hat{\sigma}^2=(n-t)/(n-t-2)$。当且仅当多余观测数 $r(r=n-t)$大于 2 时才能估计单位权方差。当 $r\leqslant 2$ 时，$\hat{\sigma}_B^2=\infty$，这说明任一平差问题，当多余观测数 $r\leqslant 2$ 时，未知参数 X 的估值是极不可靠的。

(4)进行贝叶斯序贯平差时，第一组观测方程(或误差方程)中的观测值的个数 n_1 必须大于未知数的个数加 2，即 $n_1>t+2$，而不是经典序贯平差中的 $n_1>t$[11]。分组时必须注意贝叶斯序贯平差与经典序贯平差的这一差别。

(5)本文仅导出了固定参数的贝叶斯序贯平差。对于可变参数的贝叶斯序贯平差，还有待进一步探讨。

附 录

A. 多变量 t 分布

定理 1 设 $k\times 1$ 的随机向量 $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)^T$ 服从正态分布 $Z\sim N(0,\Sigma)$，其中 $k\times k$ 阶矩阵 Σ 为正定阵。又设随机变量 $h\sim\chi^2(\gamma)$，其中 γ 为自由度。再设随机向量 Z 与随机变量 h 不相关。如果下列变换

$$x_i = z_i(h|\gamma)^{-1/2} + \mu_i, \quad i = 1,\cdots,k$$

所得到的随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_k)^T$ 的密度函数为：

$$P(X|\mu,\Sigma,\gamma) = \frac{\gamma^{\gamma/2}\Gamma((k+\gamma)/2(\det\Sigma^{-1})^{1/2}}{\pi^{k/2}\Gamma(\gamma/2)}[\gamma + (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)]^{-(k+\gamma)/2}$$

式中 $\mu=(\mu_i)$为 $k\times 1$ 的向量，矩阵 Σ 和 γ 为参数，则称 X 服从多变量 t 分布，记为：

$$X \sim t(\mu,\Sigma,\gamma)$$

定理 2 设 $k\times 1$ 的随机向量 $X\sim t(\mu,\Sigma,\gamma)$，则 X 的期望和方差分别为：

$$E(X) = \mu, \quad \gamma > 1; \quad D(X) = \frac{\gamma}{\gamma-2}\Sigma, \quad \gamma > 2 \tag{A1}$$

B. 正态伽马分布

定理 3 设 X 为 $n\times 1$ 的随机向量 $X=(x_i)$，τ 为随机变量。又设 X 在 τ 取确定值的条件下服从参数为 μ、$\tau^{-1}Q$ 的正态分布 $X\sim N(\mu,\tau^{-1}Q)$；τ 服从参数为 b、d 的伽马分布 $\tau\sim G(b,d)$，则随机向量 $Z(X^T,\tau)^T$ 服从正态伽马分布，记为：

$$X,\tau \sim NG(\mu,Q,b,d)$$

且其密度函数为：

$$P(X,\tau|\mu,Q,b,d) = (2\pi)^{-n/2}(\det Q)^{-1/2}b^d(\Gamma(d))^{-1}\tau^{n/2+d-1}\exp\{-\frac{\tau}{2}[2b + (X-\mu)^TQ^{-1}(X-\mu)]\} \tag{B1}$$

式中 μ、Q、b、d 为参数，且 $b>0,d>0,0<\tau<\infty,-\infty<x_i<\infty$。

定理 4 设向量 $Z(X^T,\tau)^T$ 服从正态伽马分布 $X,\tau\sim NG(\mu,Q,b,d)$，则 X 的边缘分布为多变量 t 分布：

$$X \sim t(\mu,bQ|d,2d) \tag{B2}$$

而 τ 的边缘分布为伽马分布，即

$$\tau \sim G(b,d) \tag{B3}$$

C. 逆伽马分布

定理 5 如果随机变量 τ 服从伽马分布，即 $\tau\sim G(b,d)$，则随机变量 $y=1/\tau$ 服从逆伽马分布，记为：

$$y \sim IG(b,d) \tag{C1}$$

其密度函数为：

$$\left.\begin{aligned} &P(y|b,d) = \frac{b^d}{\Gamma(d)}\left(\frac{1}{y}\right)^{d+1}\exp(-b/y), \quad b>0, \quad d>0, \quad 0<y<\infty \\ &P(y|b,d) = 0 \qquad\qquad \text{对于 } y \text{ 的其它值} \end{aligned}\right\} \tag{C2}$$

定理6　如果随机变量 y 服从逆伽马分布 $y \sim IG(b,d)$，则 y 的期望和方差分别为：

$$E(y) = b/(d-1), \quad d>1; \quad D(y) = b^2/[(d-1)^2(d-2)], \quad d>2 \tag{C3}$$

参 考 文 献

1　陈希孺. 数理统计中的两个学派——频率学派和Bayes学派. 数理统计与应用概率，1990，5(4)：389～399

2　成　平. 对贝叶斯估计的几点看法. 数理统计与应用概率，1990，5(4)：383～388

3　朱建军. 方差分量的Bayes估计. 测绘学报，1991，20(1)：1～5

4　欧自强. 广义方差估计理论及其在测量中的应用：[学位论文]. 长沙：中南工业大学，1991

5　杨元喜. 抗差贝叶斯估计及应用. 测绘学报，1992，21(1)：42～49

6　崔希璋，於宗俦，陶本藻，等. 广义测量平差(第二版). 北京：测绘出版社，1991.

7　张尧庭，陈汉峰. 贝叶斯统计推断. 北京：科学出版社，1991.

8　Koch K R. Bayesian Inference with Geodetic Applications. Berlin Heidelberg：Springer-Verlag，1990.

9　Koch K R. Parameter Estmation and Hypothesis Testing in Linear Models. Berlin Heidelberg：Springer，1987.

10　黄维彬. 近代平差理论及其应用. 北京：解放军出版社，1992. 320～339

11　於宗俦，于正林. 测量平差原理. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1990. 214～236

12　王新洲. 测量平差. 北京：水利电力出版社，1991. 210～213

Bayesian Sequential Adjustment

Wang Xinzhou

(Institute of Earth Science and Survey Engineering, WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

Abstract　This paper develops sequential adjustment formulas based on Bayesian theory. Using these formulas we can obtain the same estimators of unknown parameters as using classical sequential adjustment. But the estimator of unit weight deviation is different from classical method.

Key words　Bayesian statistics; sequential adjustment; prior distributions; posterior distributions