

# 使用泊松方程插值方法进行遥感影像融合

高 建<sup>1</sup> 谢 伟<sup>2</sup> 涂志刚<sup>3</sup> 秦前清<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学计算机学院, 武汉市珞珈山, 430072)

(3 武汉大学电子信息学院, 武汉市珞珈山, 430072)

**摘 要:**以高空间分辨率的全色影像为引导, 高光谱分辨率的多光谱数据作为已知条件, 利用泊松方程插值方法对各个波段影像在空间维进行插值, 最终得到的多光谱影像既具有原有多光谱影像的光谱信息, 同时又具有全色影像的清晰细节。该方法还具有不受波段数目限制的特点, 与多重网格方法结合可以提高数据处理效率。使用该融合方法对 QuickBird 和 IKONOS 数据进行融合实验, 实验结果在 RASE、ERGAS、空间细节质量、SSIM 等多项质量指标上优于传统融合方法。

**关键词:**泊松插值; 偏微分方程; 影像融合

**中图法分类号:**P237.3

高空间分辨率全色影像与低分辨率多光谱影像的数据融合, 常用的方法有 HIS 变换、Brovey 方法、主成分分析(PCA)、Gram-Schmidt 变换等, 这些方法在空间分辨率和光谱保真上各有优劣<sup>[1]</sup>。

近年来, 基于偏微分方程的方法被广泛应用于图像去噪、恢复、修补、分割等处理中。其中, 利用泊松方程的方法已经被用来进行图像动态范围压缩<sup>[2]</sup>、图像无缝修补<sup>[3]</sup>、拼接<sup>[4]</sup>和插值处理<sup>[5-6]</sup>等。本文提出了一种使用泊松方程插值的遥感影像融合方法。

## 1 泊松方程插值方法

定义闭子集  $S \subset \mathbf{R}^2$  为灰度图像的定义域, 其包含一个闭子集  $\Omega \subset S$ , 边缘为  $\partial\Omega$ ,  $f$  为对应图像中  $\Omega$  内部的灰度值未知部分,  $f^*$  为之外的已知部分,  $\mathbf{v}$  为定义在  $\Omega$  内部的向量场。可以利用边界条件和梯度  $l_2$  范数最小的约束求解  $\Omega$  内部的灰度值, 即将问题转化为:

$$\min_f \iint_{\Omega} |\nabla f|^2, \quad f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \quad (1)$$

其中,  $\nabla$  为梯度算子, 上式对应的 Euler-Lagrange 方程为:

$$\Delta f = 0, \quad f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \quad (2)$$

式(2)是满足 Dirichlet 边值条件的拉普拉斯方程, 使用该式进行插值处理, 得到的数值空间分布比较平滑, 在图像上表现为模糊。

取向量场  $\mathbf{v}$  作为约束条件引导插值, 称为引导场, 使插值结果的梯度与其一致, 将式(1)改写为:

$$\min_f \iint_{\Omega} |\nabla f - \mathbf{v}|^2, \quad f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \quad (3)$$

其解是满足 Dirichlet 条件的泊松方程:

$$\Delta f = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \quad (4)$$

式(4)即为泊松方程插值方法的基本方程。

当向量场  $\mathbf{v}$  为已知图像  $g$  的梯度时, 可以得到新方程:

$$\Delta f = \Delta g, \quad f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \quad (5)$$

此时,  $g$  引导方程解在计算区域灰度值的变化, 要求解的梯度与  $g$  保持一致。在边界值确定的条件下, 插值区域内的灰度变化梯度可以与任意给定图像匹配, 这种处理方法可以实现两幅图像的无缝编辑、修补等。

## 2 遥感影像的泊松方程融合

使用高空间分辨率的全色影像  $p$  作为引导场,对低分辨率多光谱影像  $m$ ,在融合结果  $f$  的空间定义域内进行泊松方程插值。根据式(5)即有:

$$\Delta f = \Delta p, f|_{\partial\Omega} = m|_{\partial\Omega} \quad (6)$$

对于影像中的离散点  $(i, j)$ ,使用四邻域有限差分法建立泊松方程为:

$$\begin{aligned} f_{i+1,j}^k + f_{i-1,j}^k + f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^k - 4f_{i,j}^k &= \Delta p_{i,j} \\ \Delta p_{i,j} &= p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 4p_{i,j} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $k$  为波段序号。将所有计算像素的泊松方程组成线性方程组:

$$\mathbf{A}f = \mathbf{b} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{A}$  为方程左端系数的稀疏矩阵;  $\mathbf{b}$  为方程等号右端项。

不同于经典的 Dirichlet 边值条件,作为已知条件的多光谱数据  $m$ ,只提供散布在计算域中的孤立点数据。根据  $p$  和  $m$  的几何映射关系,已知数据  $m$  被重配置到  $f$  中相应的位置,在对  $m$  插值时,如果  $(i, j)$  的四邻域内有多光谱数据,即用其代替式(7)中对应的  $f$ 。例如,  $(i+1, j)$  处有已知数据  $m_{i+1,j}$ ,则相应的方程变为:

$$f_{i-1,j}^k + f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^k - 4f_{i,j}^k = \Delta p_{i,j} - m_{i+1,j}^k \quad (9)$$

如果数据  $m$  恰好处于  $(i, j)$  处,则方程

$f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j-1}^k + f_{i,j+1}^k = \Delta p_{i,j} + 4m_{i,j}^k$  会使得方程组矩阵  $\mathbf{A}$  对角元素为零,矩阵奇异,无法求解。可以将上式改写为:

$$\begin{aligned} f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j-1}^k + f_{i,j+1}^k - \alpha f_{i,j}^k &= \\ \Delta p_{i,j} + (4 - \alpha) m_{i,j}^k \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\alpha$  为非零常数,这样就可以避免出现系数矩阵奇异的情况。当  $\alpha$  接近 0 时,方程即呈现病态,  $\alpha$  的绝对值决定了  $m$  约束条件作用的强弱,过大容易出现已知像素孤立于插值结果的情况。  $\alpha$  一般取正值为宜,根据实验经验,建议  $\alpha$  的取值范围为  $[2, 12]$ 。

引入参数  $\alpha$  之后,多光谱数据就可以作为已知条件融入到插值过程中,求解方程式(8),即可得到影像融合结果。

对于计算域为影像栅格的偏微分方程,在迭代过程中,残差信息的高频部分比低频部分更快地传递到计算结果中进行修正。因此,基于图像

金字塔的多重网格方法比传统方法具有更高的计算效率,本文实验采用 MGD9V 作为方程求解工具。此外,多光谱影像融合过程中,各个波段的处理过程相互独立,这就使得该方法不受多光谱影像波段数目的限制,可以对单波段数据进行处理,也可以对高光谱数据进行融合。

## 3 实验与分析

利用常用融合方法,包括 IHS 变换方法、Brovey 方法、Gram-Schmidt(G-S)方法、PCA 方法、色彩归一化(CN)方法与本文方法(P-I),对 QuickBird 和 IKONOS 数据进行融合实验。实验数据包括全色影像(空间分辨率为 0.61 m 和 1 m)和 4 波段多光谱影像(2.44 m 和 4 m),实验前数据已经过严格几何配准,如图 1、2 所示。其中, IHS 和 Brovey 方法波段数目受限,仅采用 1(B)、2(G)和 3(R)波段。



图 1 QuickBird 全色影像和多光谱数据及本文方法融合结果

Fig. 1 QuickBird Image (Pan & MS) and Fusion with the Proposed Method



图 2 IKONOS 全色影像和多光谱数据及本文方法融合结果

Fig. 2 IKONOS Image (Pan & MS) and Fusion with the Proposed Method

对实验结果进行客观评价选用的质量指标,包括针对融合光谱质量的光谱相关系数(CCM)、相对平均光谱误差指数(RASE)和相对整体维数综合误差(ERGAS),此外,还有空间细节相关系数(CCP)和结构相似度(SSIM)等。其中,CCP 是对融合结果和全色影像分别进行 8 邻域拉普拉斯算子处理之后再计算的。计算融合结果 SSIM 的亮度部分采用多光谱数据作参照,对比度和结构信息部分采用全色数据作参照,取各波段的 SSIM 均值作为最后结果。

选择比较有代表性的局部细节,通过观察可以发现不同方法间的细微差异。如图3所示,IHS方法、Brovey方法和CN方法的融合结果中,空间细节都比较清晰,但光谱失真比较严重;PCA方法和G-S方法的融合结果光谱信息保持

较好,但对空间信息应用不够充分,局部细节都存在不同程度的模糊,PCA方法尤为严重;相比之下,本文方法( $\alpha=4$ )的融合结果,光谱保持上要优于IHS方法、Brovey方法和CN方法,细节清晰度也要优于PCA方法和G-S方法。

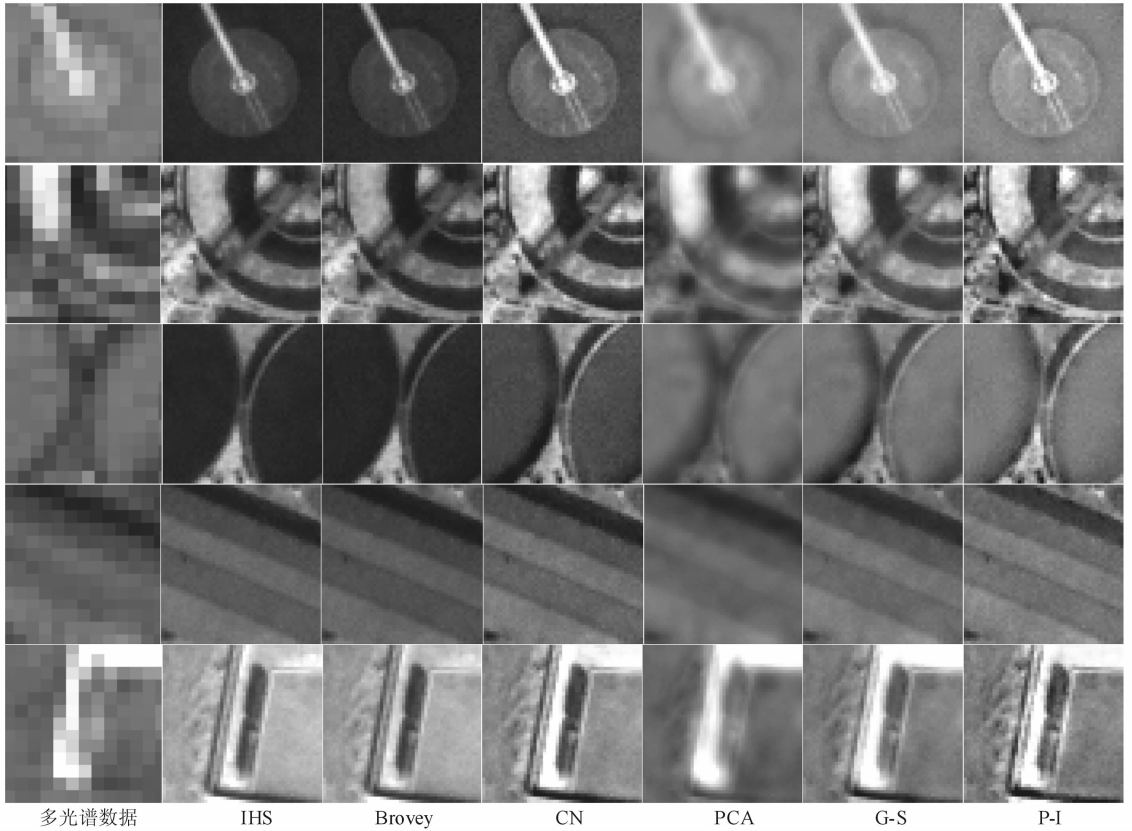


图3 影像融合结果局部细节放大效果比较

Fig. 3 Details of Different Fusion Methods Results

各种方法融合结果的客观评价指标数据如表1所示。从光谱保持上来看,本文方法( $\alpha=4$ 和 $\alpha=8$ )的CCM基本都好于IHS方法、Brovey方法和CN方法;RASE数据优于其他所有方法;ERGAS数据仅略高于G-S方法,综合而言,该方法具有较好的光谱保真性。本文方法融合结果各波

段的CCP,相比其他方法,数值较高且比较稳定,变化幅度不大,这与采用全色引导数据有关。从综合评价指标SSIM的数据来看,本文方法优于其他所有方法。参数 $\alpha$ 的绝对值决定了多光谱数据已知条件所起的引导作用的强弱, $\alpha$ 的绝对值越大,方程解越稳定。 $\alpha$ 取值对融合结果的影响,

表1 QuickBird全色影像多光谱影像不同融合方法性能评价

Tab. 1 Compared Result of Different Fusion Methods Applying to QuicikBird Pan and MS Image

		IHS	Brovey	CN	PCA	G-S	P-I( $\alpha=4$ )	P-I( $\alpha=8$ )
CCM	1	0.613	0.289	0.581	0.976	0.934	0.653	0.656
	2	0.492	0.509	0.753	0.972	0.925	0.855	0.857
	3	0.667	0.702	0.885	0.976	0.937	0.861	0.863
	4	-	-	0.965	0.870	0.930	0.970	0.971
RASE		37.095	38.120	47.038	12.151	10.229	8.874	8.801
ERGAS		15.020	15.831	18.408	2.462	2.180	2.321	2.301
CCP	1	0.995	0.995	0.989	0.824	0.966	0.985	0.973
	2	0.997	0.997	0.991	0.927	0.987	0.986	0.974
	3	0.994	0.989	0.978	0.867	0.983	0.985	0.974
	4	-	-	0.966	0.999	0.994	0.977	0.960
SSIM		0.833	0.818	0.776	0.814	0.809	0.838	0.837

可以从图 4 中反映出来(为方便比较,3 个指标值都以  $\alpha=4$  时的取值为基准对齐)。可以看出,当  $\alpha=4$  时,式(8)的泊松方程插值不受多光谱数据的约束,可以更大限度地利用全色影像数据的空间信息,因此,融合图像的空间细节质量最好;RASE 和 ERGAS 随着  $\alpha$  的增大和多光谱数据的约束作用增强而减小,RASE 的变化趋势更为明显。

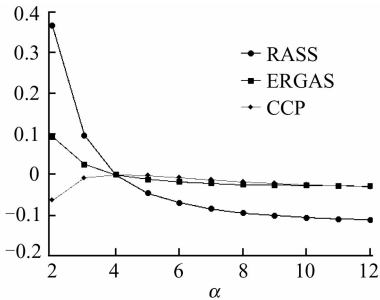


图 4 RASE、ERGAS 和 CCP 的变化情况

Fig. 4 RASE, ERGAS and CCP for Different  $\alpha$

## 4 结 语

与常用方法相比,本文所提出的基于泊松方程的遥感影像融合方法,用于 QuickBird 和 IKONOS 数据的融合实验时,其融合结果在视觉效果、光谱信息和空间信息的融合质量指标上都有

较好的表现,实现了高空间分辨率全色影像和低分辨率的多光谱数据更好的融合。

## 参 考 文 献

- [1] 邵振峰,刘军,李德仁. 一种基于高斯影像立方体的空间投影融合方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(10): 1 207-1 211
- [2] Fattal R, Lischinski D, Werman M. Gradient Domain High Dynamic Range Compression[J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(3): 249-256
- [3] Xu Dong, Zhang Hongxin, Wang Qing, et al. Poisson Shape Interpolation [J]. Graphical Models, 2006, 68(3): 268-281
- [4] Ren Chunjian, Huang Yaping, Liu Xiaoqiang, et al. Removing Shift-Variant Motion Blur from an Image Using Poisson Interpolation[C]. International Symposium on Multispectral Image Processing and Pattern Recognition, Yichang, 2009
- [5] Su Xue, Dai Qionghai. Nonlinear Poisson Image Completion using Color Manifold[C]. 2007 IEEE International Conference on Image Processing, San Antonio, 2007
- [6] 王忠武,刘顺喜,陈晓东. IKONOS 图像融合中自动拟合低分辨率全色图像的方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(11): 1 283-1 288

第一作者简介:高建,博士生,研究方向为遥感图像处理与分析。  
E-mail: jgao2008@126.com

## Remote Sensing Image Fusion Method with Poisson Equation Interpolation

GAO Jian<sup>1</sup> XIE Wei<sup>2</sup> TU Zhigang<sup>3</sup> QIN Qianqing<sup>1</sup>

(1 State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Computer, Wuhan University, LuoJia Hill, Wuhan 430072, China)

(3 School of Electronic Information, Wuhan University, LuoJia Hill, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** Multispectral image is interpolated in each band using Poisson equation with panchromatic image as guidance based on the known condition. The resulting multispectral image keeps most spectral information of original one and possess clear details as the same as panchromatic image. The method works without limitation of band quantity and association with Multigrid solver improves efficiency of data processing. The values of quality index on RASE, ERGAS, spatial detail and SSIM of the proposed new method do well or better compared to traditional image fusion ones in experiment on QuickBird and IKONOS images.

**Key words:** Poisson interpolation; partial differential equation; image fusion