DOI:10.13203/j.whugis1994.02.010
第19卷 第2期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 19 No. 2
1994年6月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping June 1994

一元 p-范极大似然平差*

孙海燕

(武汉测绘科技大学,地球科学与测量工程学院,武汉市珞喻路39号,430070)

摘　要　本文详细推导了一元 p-范极大似然平差的计算公式。在观测误差分布单峰、对称的条件下,该法可同时确定参数估值$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}_0$、$\hat{p}$。在忽略$\hat{p}$的随机性影响时,本文还推导了 $D_{\hat{\mu}}$的估算公式。

关键词　p-范分布;极大似然平差;单位权方差因子

分类号　P207

文献[1]根据偶然误差的基本统计特性推导了偶然误差的分布密度函数——p-范分布。对于一元的情形,该分布由 μ、σ 和 p 三个参数确定。退化分布、拉普拉斯分布、正态分布和均匀分布都是该分布的特例(分别对应于 $p\to 0$,$p=1$,$p=2$和 $p\to +\infty$)。当 p 从0连续增加至$+\infty$时,它的峰态系数将由$+\infty$连续减小到$-\frac{6}{5}$[2]。因此,对于一组只受偶然误差影响的观测值,如果服从 p-范分布,实际上只是对观测误差的分布作了单峰(均匀分布除外)、对称的假设。有了分布密度,就可以用极大似然法进行参数估计。文献[2]曾对 p-范极大似然估计作过讨论,在那里 p 是作为事先确定的数值。本文把 p 与 μ、σ 一起作为未知参数,推导其极大似然估值的计算公式。这里只讨论一元问题,多元 p-范极大似然估计将另文阐述。

1　一元 p-范极大似然估计的基本方程

设 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$是 μ 的一组独立观测值。L_i 的先验方差为:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 q_i \tag{1}$$

式中 σ_0^2为单位权方差因子,q_i 为 L_i 的先验协因数。令 $\omega_i=\sigma_0/\sigma_i=1/\sqrt{q_i}$,这里 ω_i 与通常的权 p_i 有如下关系:

$$\omega_i = \sqrt{p_i} \tag{2}$$

设 L_i 服从 p-范分布[1]:

$$f(L_i) = \frac{p}{2\sigma_i\Gamma(\frac{1}{p})}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}}\mathrm{e}^{-[\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}}\frac{|L_i-\mu|}{\sigma_i}]^p} = \frac{p\omega_i}{2\sigma_0\Gamma(\frac{1}{p})}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}}\mathrm{e}^{-[\frac{1}{\sigma_0}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}}\omega_i|L_i-\mu|]^p} \tag{3}$$

则对数似然函数为:

$$\begin{aligned}\varphi = \ln(L|\mu,\sigma_0,p) = n\{\ln p - \ln 2 - \ln\sigma_0 - \ln\Gamma(\frac{1}{p})\} + \ln(\prod_{i=1}^{n}\omega_i) \\ + \frac{n}{2}\{\ln\Gamma(\frac{3}{p}) - \ln\Gamma(\frac{1}{p}) - \frac{1}{\sigma_0^p}[\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}]^{\frac{p}{2}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\}\end{aligned} \tag{4}$$

收稿日期:1993—07—15.孙海燕,男,33岁,博士生,现从事测量平差与数据处理研究。

* 国家教委博士点基金资助项目。

似然方程为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\Big|_{\mu=\hat{\mu},\sigma_0=\hat{\sigma}_0,p=\hat{p}}=0 \tag{5a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_0}\Big|_{\mu=\hat{\mu},\sigma_0=\hat{\sigma}_0,p=\hat{p}}=0 \tag{5b}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}\Big|_{\mu=\hat{\mu},\sigma_0=\hat{\sigma}_0,p=\hat{p}}=0 \tag{5c}$$

为得出(5)式的具体形式，首先计算下列导数(或偏导数)：

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\Big)=-p\sum\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-1}\mathrm{sign}(L_i-\mu)$$

$$=-p\sum\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln\Gamma\Big(\frac{k}{p}\Big)=-\frac{1}{p^2}\varphi\Big(\frac{k}{p}\Big) \tag{7}$$

这里 $\varphi(x)$ 为普西函数(φ－函数)[3]。令

$$y=\frac{1}{\sigma_0^p}\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}\Bigg]^{\frac{p}{2}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p$$

则

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\Big\{-p\ln\sigma_0+\frac{p}{2}\ln\Gamma\Big(\frac{3}{p}\Big)-\frac{p}{2}\ln\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)+\ln\Big[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\Big]\Big\}$$

$$=-\ln\sigma_0+\frac{1}{2}\ln\Gamma\Big(\frac{3}{p}\Big)-\frac{1}{2}\ln\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)-\frac{3}{2p}\varphi\Big(\frac{3}{p}\Big)+\frac{1}{2p}\varphi\Big(\frac{1}{p}\Big)$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p} \tag{8}$$

将(6)代入(5a)得：

$$\sum\omega_i^{\hat{p}}|L_i-\hat{\mu}|^{\hat{p}-2}(L_i-\hat{\mu})=0 \tag{9}$$

对(5b)式直接计算可得：

$$\hat{\sigma}_0^{\hat{p}}=\frac{\hat{p}}{n}\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{3}{\hat{p}})}{\Gamma(\frac{1}{\hat{p}})}\Bigg]^{\frac{\hat{p}}{2}}\sum\omega_i^{\hat{p}}|L_i-\hat{\mu}|^{\hat{p}} \tag{10}$$

将(7)、(8)式代入(5c)式，并考虑到(10)，可得：

$$\hat{p}+\varphi\Big(\frac{1}{\hat{p}}\Big)+\ln\Big(\frac{\hat{p}}{n}\Big)+\ln(\omega_i^{\hat{p}}|L_i-\hat{\mu}|^{\hat{p}})-\frac{\hat{p}\sum\omega_i^{\hat{p}}|L_i-\hat{\mu}|^{\hat{p}}\ln(\omega_i|L_i-\hat{\mu}|)}{\sum\omega_i^{\hat{p}}|L_i-\hat{\mu}|^{\hat{p}}}=0 \tag{11}$$

求解(9)、(10)、(11)各式即可得到未知参数的估值 $\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}_0$、$\hat{p}$。

2　似然方程的解算

式(9)～(11)是一组非线性方程，可用迭代法解算。为了书写简便，在以后的推导中，将未知参数的估值记为 μ、σ_0、p。

首先联立求解(9)、(11)两式，然后用(10)式计算单位权方差因子。设在第k次迭代后已经求得近似值μ、p，令

$$f_1(\mu,p)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)$$

$$f_2(\mu,p)=p+\varphi(\frac{1}{p})+\ln\frac{p}{n}+\ln(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p)-\frac{p\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

将$f_1(\mu+\Delta\mu,p+\Delta\mu)=0$，$f_2(\mu+\Delta\mu,p+\Delta\mu)=0$在$\mu$、$p$处展开成泰勒级数，略去二次以上各项，则有：

$$\frac{\partial f_1}{\partial\mu}\Delta\mu+\frac{\partial f_1}{\partial p}\Delta p+f_1(\mu,p)=0,\frac{\partial f_2}{\partial\mu}\Delta\mu+\frac{\partial f_2}{\partial p}\Delta p+f_2(\mu,p)=0 \tag{12}$$

联立求解上式，将$\mu+\Delta\mu$，$p+\Delta p$作为新的近似值，即可进行下一次迭代计算。

分别对μ、p求偏导数：

$$\frac{\partial f_1}{\partial\mu}=-\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}-(p-2)\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-4}(L_i-\mu)^2$$

$$=-(p-1)\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}[\sum_{i=1}^{n}\frac{(\omega_i|L_i-\mu|)^p}{(L_i-\mu)}]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(L_i-\mu)}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)\ln(\omega_i|L_i-\mu|) \tag{14}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\mu}=\frac{-p\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p}-\frac{p}{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p)^2}\{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p)$$

$$\cdot[-\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)-p\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)\ln(\omega_i|L_i-\mu|)]$$

$$+[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)][p\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)]\}$$

$$=\frac{p^2\sum\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)\ln(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

$$-\frac{p^2[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)][\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}(L_i-\mu)]}{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p)^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p}=1-\frac{1}{p^2}\varphi'(\frac{1}{p})+\frac{1}{p}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

$$-p\frac{[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln^2(\omega_i|L_i-\mu|)][\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p]}{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p)^2}$$

$$+p\frac{[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)]^2}{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|)^2}$$

$$=1-\frac{1}{p^2}\varphi'(\frac{1}{p})+\frac{1}{p}-\frac{p\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln^2(\omega_i|L_i-\mu|)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

$$+\frac{p[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p\ln(\omega_i|L_i-\mu|)]^2}{(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|)^2} \tag{16}$$

令
$$v_i=L_i-\mu,\alpha_i=\frac{\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}},\beta_i=\frac{\omega_i^p|L_i-\mu|^p}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^p}$$

将 $f_1(\mu,p)$、(13)、(14)式代入(12)式，两边同除以 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}$，得：

$$-(p-1)\Delta\mu+[\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i\ln(\omega_i|v_i|)]\Delta p+\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0 \tag{17}$$

将 $f_2(\mu,p)$、(15)、(16)式代入式(12)，得：

$$\{p^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)}{v_i}-[p^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)][\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{v_i}]\}\Delta\mu$$

$$+\{1-\frac{1}{p^2}\varphi'(\frac{1}{p})+\frac{1}{p}-p\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln^2(\omega_i|v_i|)+p[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)]^2\}\Delta p$$

$$+p+\varphi(\frac{1}{p})+\ln\frac{p}{n}+\ln(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|v_i|^p)-p\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)=0 \tag{18}$$

令
$$a_{11}=1-p,\quad a_{12}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i\ln(\omega_i|v_i|),\quad b_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$$

$$a_{21}=p^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)}{v_i}-[p^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)][\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{v_i}]$$

$$a_{22}=1-\frac{1}{p^2}\varphi'(\frac{1}{p})+\frac{1}{p}-p\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln^2(\omega_i|v_i|)+p[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)]^2$$

$$b_2=p+\varphi(\frac{1}{p})+\ln\frac{p}{n}+\ln[\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|v_i|^p]-p\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln(\omega_i|v_i|)$$

则(17)、(18)式成为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\mu \\ \Delta p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

求解方程组(19)，如果$|\Delta\mu|$、$|\Delta p|$小于给定的迭代阀值 ε_μ 及 ε_p，则停止迭代，此时可由(10)式求出观测值的单位权方差因子。否则用 $\mu+\Delta\mu, p+\Delta p$ 作为未知参数的近似值，重新计算(19)式的系数阵及常数项，进而求解该方程。

在计算式(19)的系数时需计算伽马函数、普西函数及其导数的值。这里给出其算法[3]。

2.1 伽马函数的计算

对伽马函数有斯特林公式：

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}[1 + \frac{x^{-1}}{12} + \frac{x^{-2}}{288} - \frac{139x^{-3}}{51840} - \frac{571x^{-4}}{2488320} + \frac{163879x^{-5}}{209018880} + \frac{5246819x^{-6}}{75246796800} - \frac{534703531x^{-7}}{902961561600} + \cdots]$$

取上式前7项。当 $x>20$时，可精确至10^{-5}。如果 x 较小，可先计算 $\Gamma(x+k)$，然后由伽马函数的递推公式 $\Gamma(x+k)=x(x+1)\cdots(x+k-1)\Gamma(x)$计算 $\Gamma(x)$。

2.2 普西函数的计算

普西函数由下式定义：

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}[\ln\Gamma(x)] = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

且有渐近表达式：

$$\varphi(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{12(x-1)^2} + \frac{1}{120(x-1)^4} - \cdots \tag{20}$$

当 x 较大时，上式前4项就可给出足够的精度。当 x 较小时可先由上式计算 $\varphi(x+k)$，然后由下式计算 $\varphi(x)$：

$$\varphi(x) = \varphi(x+k) - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+i} \tag{21}$$

2.3 普西函数导数的计算

将(20)、(21)式分别对 x 求导得：

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{6(x-1)^3} - \frac{1}{30(x-1)^5} + \cdots$$

$$\varphi'(x) = \varphi'(x+k) + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(x+i)^2}$$

现在将一元 p-范极大似然估值求解步骤总结如下：1. 确定先验单位权方差因子 σ_0^2、观测值的先验方差，并计算 ω_i。2. 确定未知参数的迭代初始值。可令 $p_0=2$，μ_0即取其最小二乘估值。3. 计算 v_i、α_i、β_i。4. 计算方程组(19)式的系数阵及常数项。5. 解算(19)式。6. 检查 $\Delta\mu$，Δp 是否小于迭代阀值，如 $\Delta\mu$ 或 Δp 大于阀值，重复3、4、5步。7. 由(10)式计算单位权方差因子的估值$\hat{\sigma}_0^2$。

3 未知参数估值$\hat{\mu}$的精度评定

把估值$\hat{p}$近似地看作不受观测误差影响的常数，将(9)式两边对 L_j 求偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial L_j}\left[\sum \omega_i^p |L_i-\hat{\mu}|^{p-2}(L_i-\hat{\mu})\right]$$

$$=\sum_{i\neq j}\omega_i^p|L_i-\hat{\mu}|^{p-2}\left(-\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}\right)+\omega_j^p|L_j-\hat{\mu}|^{p-2}\left(1-\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}\right)+\sum_{i\neq j}(p-2)\omega_i^p|L_i-\hat{\mu}|^{p-4}$$

$$\cdot(L_i-\hat{\mu})^2\left(-\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}\right)+(p-2)\omega_j^p|L_j-\hat{\mu}|^{p-4}(L_j-\hat{\mu})^2\left(1-\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}\right)$$

$$=-(p-1)\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}+(p-1)\omega_j^p|L_j-\mu|^{p-2}=0$$

所以，

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial L_j}=\frac{\omega_j^p|L_j-\mu|^{p-2}}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p|L_i-\mu|^{p-2}}=a_j$$

于是有：

$$\mathrm{d}\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}L_i$$

由误差传播律知：

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2=\hat{\sigma}_0^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\omega_i}\right)^2$$

应当指出，这里得到的$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2$是近似的，它忽略了参数$\hat{p}$的随机影响。

4 算　例

表1　拉普拉斯分布观测值

0.3744	0.0489	0.1225	−0.3862
−0.3566	0.5638	−2.5274	0.5211
0.7011	0.3828	−1.6972	−0.1334
0.9135	0.6150	−0.2062	1.8214
0.9604	−1.5451	1.6219	−0.2244
0.0361	0.5403	−1.5803	0.1446
−0.0457	−0.3655	0.1991	0.2478
−0.4522	−0.4117	0.7620	0.7407
0.1389	2.5330	1.2202	−0.5588
0.3498	2.2762	−0.5075	0.0496
−1.0944	4.7730	0.3072	−2.4471
0.1152	−1.1377	−1.1170	0.6440
−0.3988	−1.6925	−0.3712	−0.1903
−0.3589	1.6082	2.2701	−0.1554
−0.4144	−0.8038	−0.7933	0.2453
−0.1402	−0,1356	0.3919	−0.3020
0.2190	−0.6217	−0.6992	0.1290
−1.2895	−0.0621	1.1798	−0.4587
0.5975	−0.1961	−0.3860	1.2903
0.2163	0.2084	−0.1092	−1.1525
0.0921	0.3483	1.2424	0.7832
−2.1888	0.0641	1.2627	−0.1062
0.3111	0.0035	0.0197	−0.0544
−0.2452	−0.1493	−0.4364	−1.5532
−0.5078	2.2442	−1.4885	−0.1752

表2　正态分布观测值

−0.3091	−1.0777	−1.3820	−0.7543
−0.2291	0.6767	0.7367	0.0651
0.3269	−0.7621	1.2745	0.3733
0.4457	−0.5211	−0.1951	0.1988
1.6582	−1.7340	1.3508	−0.4431
−0.7193	−0.1133	0.9659	0.3375
−1.5257	0.3040	−0.6684	−0.6493
−0.1382	1.5911	0.2985	−0.5446
−0.1418	−0.0889	1.4599	−0.9141
−0.0679	−0.1892	0.0427	1.1195
0.0269	0.0212	−1.2895	−2.5778
−1.9107	−0.9763	0.5346	0.4041
−0.5341	2.4266	−0.3935	1.3303
−0.1023	0.3084	1.3404	−0.1708
−0.3381	1.8829	0.4863	0.7972
−1.1236	0.7123	−0.3473	−1.4560
−1.1879	−1.3167	0.4063	0.9554
1.0925	0.6070	1.3591	−0.9146
0.3057	−1.3592	−0.1011	0.3974
−0.6530	−0.7108	−1.9413	0.9366
−0.7919	−0.3195	0.5147	−0.3100
1.09345	0.1565	1.1227	−0.6529
−0.5132	−1.0551	−1.2364	−0.1070
−0.8140	1.0705	−0.2973	2.3856
0.0080	0.2055	1.2725	0.5123

表1所列的数据为来自拉普拉斯分布的子样($\mu=0,\sigma=1$),表2所列数据是来自标准正态分布 $N(0,1)$的子样。把这两组数据看作观测值(真值为零),用本文给出的方法,取前 n 个数分别进行平差。计算结果列于表3。

表3 一元 p-范极大似然平差结果

n	拉普拉斯分布				正态分布			
	$\hat{p}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}$	$\hat{p}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}$
10	3.619	−0.5243	0.9997	0.1788	1.2089	−0.2716	0.7715	0.1940
20	1.328	0.1637	1.0277	0.0892	3.2615	0.0058	0.8888	0.0755
30	1.214	0.0659	0.8925	0.0858	3.1215	−0.0044	0.8805	0.0466
40	1.222	0.1473	0.9612	0.1975	2.1585	0.0100	0.8316	0.0212
50	1.159	0.1146	1.1666	0.6011	1.5101	−0.0859	0.9676	0.0483
60	1.176	0.0490	1.1397	0.7448	1.5737	0.0023	0.9617	0.0218
70	1.155	−0.0081	1.0622	0.0033	1.9577	−0.0052	0.9664	0.0138
80	1.165	0.0018	1.0267	0.0272	2.0693	−0.0374	0.9723	0.0122
90	1.161	0.0489	1.0101	0.8354	2.1133	−0.0400	0.9484	0.0107
100	1.157	0.0078	1.0079	0.0323	2.0076	−0.0075	0.9600	0.0096

从表3可看出,当子样比较大时,未知参数的估值$\hat{p}$、$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}_0$与其理论值是比较接近的。

本文是在於宗俦教授、张方仁教授、于正林教授的指导下完成的,在此谨致谢意。

参 考 文 献

1 孙海燕. 误差分布的一般形式. 武汉测绘科技大学学报,1993,18(3):49~56

2 孙海燕,张方仁. p-范分布与 p-范最小平差. 武汉测绘科技大学学报,1991,16(4):38~55

The Monadic p-th Norm the Maximum Likelihood Adjustment

Sun Haiyan

(Insititute of Earth Science and Engineering, WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

Abstract The calculating formulas of the monadic p-th norm maximum likelihood adjustment is derived. Under the assumption that the distribution of observations is unimodal and symmetrical, this method can give the estimated values of μ, σ_0, p simultaneously. A formula is also given to calculate $D_{\hat{\mu}}$. Two examples are presented finally. When the size of the sample is large, the estimated values are near to their theoretical ones.

Key words p-th norm distribution; maximum likelihood adjustment; unit power variance factor