

# 附加约束条件的模糊度函数法 及其在 GPS 相位差分动态定位中的应用

韩 绍 伟

(武汉测绘科技大学,大地测量系,武汉珞喻路 39 号,430070)

**摘要** 在分析动态定位模式下的 Kalman 滤波法和模糊度函数法各自局限性的基础上,提出了一种充分利用所有观测值信息的新方法——附加约束条件的模糊度函数法。该法对 GPS 动态定位实测数据的处理表明:在一般的地面车辆动态噪声水平上,只要有三颗卫星保持锁相,则可完全修复周跳并确定出运动天线的位置。实例验证了该法的有效性。

**关键词** 模糊度函数法;GPS 动态定位;约束条件

**分类号** P228 O241.3

## 0 引 言

在动态或伪动态模式下进行 GPS 定位处理,一般都要求运动过程中至少保持四颗卫星不出现周跳,因为只有在这种情况下才有成熟的算法。然而在实际生产中,要求接收机在运动过程中不发生周跳是相当困难的。尽管 GPS 和 INS 利用其互补性对精密动态定位比较有效,但因 INS 设备昂贵也使其实用性受到限制。为此,很多学者还是从 GPS 系统本身寻求办法。从软件处理上考虑,一般可认为有两个途径:一是利用 Kalman 滤波技术来组合伪距和相位观<sup>测</sup>值并有限度地进行大周跳的检测,得到的精度为 1 米级<sup>[1]</sup>。另一种是利用模糊度函数法来处理。该法与周跳无关。我们知道,GPS 相位观<sup>测</sup>值即便出现了周跳,观<sup>测</sup>值的小数部分仍然有效,因此,使用 Kalman 滤波的方法没有充分利用出现周跳的观<sup>测</sup>值的小数部分;而模糊度函数法因只利用观<sup>测</sup>值的小数部分而无整数部分的确定性信息,产生定位解的多值性困难。基于以上原因,本文试图提出一种能充分利用观<sup>测</sup>值所有信息的方法——附加约束条件的模糊度函数法,即采用模糊度函数法对所有观<sup>测</sup>值中有效的小数部分信息进行处理;通过约束条件充分利用没有出现周跳的观<sup>测</sup>值的整周数信息。

## 1 动态定位的 Kalman 滤波法

进行 GPS 动态定位的 Kalman 滤波模型<sup>[1]</sup>可写成

$$X_{t+1} = \varphi_{t+1/t} X_t + \Gamma_t q_t \quad (1)$$

收稿日期:1993-04-15. 韩绍伟,男,28岁,副教授,现从事 GPS 定位理论与应用的研究

\* 武汉测绘科技大学测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目

$$Y_t = H_t X_t + e_t \quad (2)$$

式中,  $q_t$  和  $e_t$  假设为高斯白噪声, 且互不相关。它们的方差分别为  $Q_t, R_t$ , 在这种条件下, 状态向量  $X_{t+1}$  和它的协方差阵的最优估值可由下式给出。

预报

$$\hat{X}_{t+1}^{(-)} = \varphi_{t+1/t} \hat{X}_t^{(+)} \quad (3)$$

$$P_{t+1}^{(-)} = \varphi_{t+1/t} P_t^{(+)} \varphi_{t+1/t}^T + T_t Q_t T_t^T \quad (4)$$

更新

$$\hat{X}_{t+1}^{(+)} = \hat{X}_{t+1}^{(-)} + k_{t+1} [Y_{t+1} - H_{t+1} \hat{X}_{t+1}^{(-)}] \quad (5)$$

$$P_{t+1}^{(+)} = (I - k_{t+1} H_{t+1}) P_{t+1}^{(-)} \quad (6)$$

式中:

$$k_{t+1} = P_{t+1}^{(-)} H_{t+1}^T [H_{t+1} P_{t+1}^{(-)} H_{t+1}^T + R_{t+1}]^{-1} \quad (7)$$

而  $X_{t+1}$  是状态向量,  $\varphi_{t+1/t}$  是状态转移矩阵,  $P_{t+1}$  是状态协方差阵,  $k_{t+1}$  是 Kalman 滤波增益矩阵,  $Q_t$  是系统过程噪声协方差矩阵,  $R_t$  是观测值噪声协方差阵,  $H_t$  是观测值方程的设计矩阵,  $Y_t$  是用于更新的观测值向量。符号<sup>(-)</sup>表示更新前的预报值, <sup>(+)</sup>表示更新后的滤波值。

采用以上模型, 在载波相位观测值没有周跳或至少有四颗卫星不出现周跳时, 处理定位结果可靠。如果只有三颗或两颗卫星保持锁相, 则结果将会不可靠, 甚至出错。因为此时该法能利用的观测信息只有保持锁相的卫星的观测值, 它不足以确定该时刻的位置。所以结果在很大程度上取决于预报值  $X_{t+1}^{(-)}$  的精度, 而预报值的精度又与运动的平稳程度关系很大, 即与动态噪声  $q_t$  关系很大。如果动态噪声大, 则预报精度低; 动态噪声小, 则预报精度高。对状态向量为位置、速度的模型而言, 预报值的精度主要取决于加速度的大小; 而对状态向量为位置、速度和加速度的模型而言, 预报值的精度主要取决于加速度的变化。如图 1 和图 2 给出预报值偏差与动态噪声变化曲线, 它们具有明显的相关性。

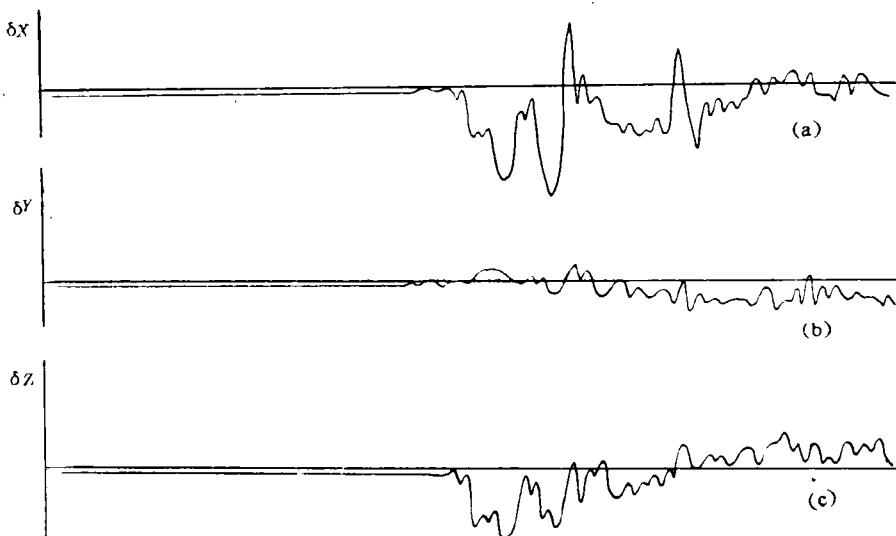


图 1 (a) 预报值 X 分量曲线 (b) 预报值 Y 分量曲线 (c) 预报值 Z 分量曲线

上图例是取位置和速度为状态向量, 实际上动态噪声相当于加速度。数据是 1 秒钟采样情况。若提高采样率, 则预报值更可靠, 采样率降低, 则预报值精度也降低。

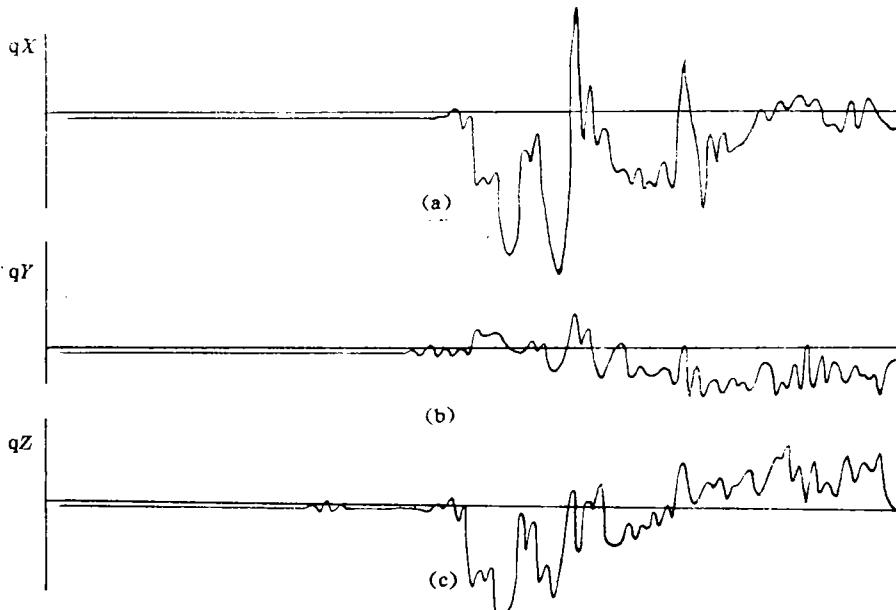


图 2 (a) 动态噪声 X 分量曲线 (b) 动态噪声 Y 分量曲线 (c) 动态噪声 Z 分量曲线

## 2 动态定位的模糊度函数法

模糊度函数法由于它与周跳无关, 显然在处理动态环境下的观测数据十分有利。

模糊度函数法(AMF)的定义<sup>[2]</sup>如下:

$$A(X) = \sum_{i=1}^m A_i(X) \quad (8)$$

式中

$$A_i(X) = \left| \sum_{j=1}^{m_i} \exp[iL_i(X)] \right| \quad (9)$$

$$L_i = \Delta\varphi_{obs}^i(k) - \Delta\varphi_{calc}^i(k, X) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{calc}^i(k, X) = & \frac{2\pi f}{c} [\rho_1^i(k) - \rho_2^i(k, X)] + 2\pi [f\delta_i - (f_{k_1}^i - f_{k_2}^i)\zeta_i + N^i] \\ & + \frac{2\pi f}{c} [\rho_1^i(k) - \rho_2^i(k, X)]\zeta_i - \frac{\pi f}{c} [\rho_1^i(k) + \rho_2^i(k, X)]\delta_i \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $m$  为历元数;  $m_i$  是第  $k$  个历元观测的卫星数,  $X$  为测站 2 的位置矢量,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Delta\varphi_{obs}^i(k)$  是历元  $k$  卫星  $i$  的相位观测值站际差分值,  $\Delta\varphi_{calc}^i(k, X)$  是利用已知的测站 1 坐标, 测站 2 坐标  $X$  和接收机时钟偏差计算得到(第二项不需计算);  $\rho_1^i(k), \rho_2^i(k, X)$  是测站 1、测站 2 到卫星  $i$  在历元  $k$  时刻的距离,  $\zeta_i, \delta_i$  是两接收机在历元  $k$  时的偏差的均值和差值,  $f_{k_1}, f_{k_2}$  为两接收机之振荡频率,  $f$  为卫星载波的频率。

方程(8)称为模糊度函数, 使其值为最大值来确定最优估值  $\hat{X}$  的方法称为模糊度函数法。

模糊度函数法处理的单位权中误差可表达为

$$m_o = \sqrt{2 \left[ \sum_{i=1}^m m_i \cdots A(\hat{X}) \right] / \left[ \sum_{i=1}^m m_i - (m + 3) \right]} \quad (12)$$

我们还可以给出一种改进的模糊度函数法。改进的模糊度函数定义为

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} A_i^2(X) \quad (13)$$

而  $A_i(X)$  的定义同(9)式。使方程(13)值为最大而得最优估值  $\hat{X}$  的方法称为改进的模糊度函数法(IAFM), 该法的单位权中误差估计公式可表达为

$$m_0 = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n m_i - \tilde{A}(\hat{X}) \right] / \left[ \sum_{i=1}^n m_i - (m + 3) \right]} \quad (14)$$

IAFM 法与 AFM 法具有相同的最优解, 但 IAFM 法具有更好的极值特性, 对搜索最优解很有利。后续讨论的模糊度函数模型均采用 IAFM。

采用 IAFM 法进行动态定位, 为了研究该法对其初值的要求, 利用一个历元的观测值, 在其最优估值的  $\pm 0.4m$  范围内, 以  $0.02m$  为步长, 以期望值的  $90\%$  为极值点判定条件得到的极值状态列于表 1。对其他历元也有类似的结果。

表 1 IAFM 法在  $\pm 0.4m$  范围内搜索的极值状态

极值点	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta Z$	$A$	1	2	3	4
1	-0.268	0.188	-0.196	5.899				
2	-0.220	0.176	-0.218	5.780	0.447			
3	-0.004	0.008	0.068	5.917	0.379	0.364		
4	0.188	0.308	0.332	5.601	0.708	0.437	0.481	
5	0.272	-0.196	0.188	5.621	0.766	0.620	0.388	0.531

从表 1 不难看出, 采用 IAFM 法, 对该时刻位置的预估值应在期望值的  $\pm 10\text{cm}$  范围左右。如果采用 Kalman 滤波预报其估值, 则预报中误差应小于  $5\text{cm}$ 。这在实际动态定位中是很难得到的。另一方面, 还可以看出, AFM 和 IAFM 法都只利用观测值的小数部分信息, 而对保持锁相的卫星观测值的整数部分没有利用。

### 3 附加约束条件的模糊度函数法

附加约束条件的模糊度函数法是基于充分利用观测值信息的思想提出来的<sup>[3]</sup>。该法以模糊度函数法为基础, 但对其试验值增加约束条件。这个约束条件就是利用没有周跳的观测值的整数部分来实现的。

顾及方程(10), (11), (12), 可以得到

$$L_i(\hat{X}) = V_i(\hat{X}) - V_i + 2\pi[f\delta_i - (f_{k_1}^i - f_{k_2}^i)\zeta_i + N'] \quad (15)$$

式中  $V_i(\hat{X})$  为站际单差观测值的改正数。如果再对卫星间取互差, 则得

$$L_i^{i+1}(\hat{X}) - L_i(\hat{X}) = V_i^{i+1}(\hat{X}) + 2\pi[N^{i+1} - N'] \quad (16)$$

不难看出, 对最优估值  $(\hat{X})$  来讲,  $V_i^{i+1}(\hat{X}) - V_i(\hat{X})$  即为站际星际双差观测值的残差。其量一般在  $0.02m$  范围内, 那么就应有

$$|L_i(\hat{X}) - L_i(\hat{X}) - 2\pi[N^{i+1} - N']| \leq EPS \quad (17)$$

式中,  $EPS$  为一小正数。上式经整理变换, 再把  $\rho^{i+1}(k, \hat{X})$  和  $\rho^i(k, \hat{X})$  分离出来, 其余与  $\hat{X}$  无关项合并计算出常值  $C_i$ , 则(17)式可改写为:

$$|\rho^{i+1}(k, \hat{X}) - \rho^i(k, \hat{X}) - C_i| \leq EPS \quad (18)$$

因此, 可以将搜索中的试验值  $X$  加条件

$$|\rho^{i+1}(k, X) - \rho^i(k, X) - C| \leq EPS \quad (19)$$

或

$$C - EPS \leq \rho^{i+1}(k, X) - \rho^i(k, X) \leq C + EPS \quad (20)$$

由(20)式可以看出,测站2的试验值X被限制在由

$$\rho^{i+1}(k, X) - \rho^i(k, X) = C - EPS$$

和

$$\rho^{i+1}(k, X) - \rho^i(k, X) = C + EPS$$

两式所确定的两个双曲面之间。在较小的范围内,这两个双曲面可认为是平面。如果有两个(20)式的条件,则试验值X将被限制在截面为 $2EPS \times 2EPS$ 的平行四边形的柱体内。如果有三个(20)式条件,则试验值X将被限制在 $2EPS \times 2EPS \times 2EPS$ 的平行四边体内,此时解将可唯一确定。

如何选择EPS是非常重要的问题。因EPS选择过大,则失去约束条件的作用;EPS选择过小,将可能使X不能满足条件而弃真。因最优试验值与最佳估值之间的差异造成的偏差影响,使EPS的选择除与双差观测值的精度有关外,也与搜索的步长有关。因此,应对步长做如下要求:以最优估值为中心,步长为边长的立方体内所有位置X都应满足(20)式条件。表2和表3是针对该条件所做的试验。利用某一历元的观测值,取最优估值的 $\pm 10\text{mm}$ , $\pm 8\text{mm}$ , $\pm 6\text{mm}$ , $\pm 4\text{mm}$ 范围内,以步长 $2\text{mm}$ 计算所有点,模糊度函数值满足期望值90%的点数列于90%列中“取”栏内,不满足的点数列于“舍”栏内。其它各列,如(17,16)列是指17,16号卫星不失锁,即其整周数正确而加入一个约束条件,阀值EPS取0.1倍步长,且模糊度函数值满足大于期望值90%条件的点数列于“取”栏,不满足以上两个条件之一的点数列于“舍”栏内。表3中的(17,16,3)及相应各列是指3颗卫星(17,16,3)保持锁相,其整周数正确而加入两个约束条件得到的结果。

表2 附加一个约束条件且阀值为 $0.1\lambda$ 的取舍状态

范围 (mm)	90%		(17, 16)		(16, 3)		(3, 6)		(6, 23)		(23, 12)	
	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍
$\pm 10$	1318	13	1259	36	1214	117	1207	124	1273	58	1225	105
$\pm 8$	729	0	728	1	702	27	702	27	725	5	717	12
$\pm 6$	343	0	343	0	341	2	341	2	343	0	343	0
$\pm 4$	125	0	125	0	125	0	125	0	125	0	125	0

表3 附加两个约束条件且阀值为 $0.1\lambda$ 的取舍状态

范围 (mm)	90%		(17, 16, 3)		(16, 3, 6)		(3, 6, 23)		(6, 23, 12)		(23, 12, 17)	
	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍	取	舍
$\pm 10$	1318	13	1191	140	1177	154	1171	160	1172	159	1216	115
$\pm 8$	729	0	699	30	694	35	699	30	714	15	717	12
$\pm 6$	343	0	341	2	340	3	341	2	343	0	343	0
$\pm 4$	125	0	125	0	125	0	125	0	125	0	125	0

从表2和表3不难看出,在 $\pm 6\text{mm}$ 范围内舍掉的点数只有0~3个,故取步长 $1.2\text{cm}$ 是可靠的。因此可以得出结论:期望值的90%为模糊度函数值的阀值, $0.1\lambda$ 为约束条件的阀值的情况下,搜索的步长不能大于 $1.2\text{cm}$ ,且取EPS为 $0.1\lambda$ 是合理的。

按前面讨论的EPS的选择和步长的选择,分别对附加一个约束条件和两个约束条件作类

似于表 1 所给的试验。首先对某条基线的观测数据和较好的先验值搜索出最优估值, 然后以该估值为近似值搜索, 设卫星 16, 3 不失锁, 则存在一个约束条件。在  $\pm 0.8m$  范围内进行搜索并以期望值的 90% 为极值点判定条件, 则产生 4 个极值点如表 4。很明显, 这 4 个极值点几乎在一个平面内, 与几何意义中分析的结论相符合。与表 1 相比, 极值点明显减少, 因为对表 1 若在  $\pm 0.8m$  范围内搜索将有 54 个极值点。但因极值点的间距没有明显增大, 对减少多值性益处仍然是有限的。

表 4 附加一个约束条件下  $\pm 0.8m$  范围内搜索的极值状态

极值点	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta Z$	A	1	2	3
1	-0.536	0.388	-0.380	5.559			
2	-0.272	0.196	-0.188	5.919	0.379		
3	0.004	-0.008	-0.008	5.918	0.766	0.388	
4	0.268	-0.188	0.196	5.602	1.145	0.766	0.379

如前同样条件下, 设卫星 16, 3, 6 不失锁, 则存在两个约束条件, 在  $\pm 0.2m$  范围搜索, 并以期望值的 90% 为极值点判定条件, 则产生三个极值点, 如表 5。很明显, 这三个极值点几乎在一条直线上, 这与从几何意义中分析的结论相符合。同时也可以看出最近极值点间距增大为 1.6m 左右的水平。这为抑制估值的多值性将具有极其重要的意义。前面的例子都是用一个历元的观测数据计算得到的。所以所得结论对动态定位同样有效。因此, 决定了附加约束条件的模糊度函数法对动态定位有重要意义。

表 5 附加两个约束条件下  $\pm 0.2m$  范围内搜索的极值状态

极值点	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta Z$	A	1	2
1	-0.680	1.156	0.856	5.814		
2	0.004	-0.008	-0.008	5.918	1.603	
3	0.676	-1.148	-0.848	5.917	3.170	1.567

#### 4 在 GPS 相位差分动态定位中的应用

附加约束条件的模糊度函数法在 GPS 相位差分动态定位中的应用, 采用如下步骤实施:

(1) 在运动前确定初始整周未知数。如采用交换天线, 快速静态整周未知数确定法或从已知点出发来确定。在运动过程中由接收机或其它方法给出周跳出现的位置。

(2) 没有周跳情况下, 利用 Kalman 滤波来确定运动天线的位置。出现周跳时, 则利用 Kalman 滤波先预报出现周跳时刻运动天线的位置和精度。

(3) 利用(2)预报的位置和中误差, 确定搜索的范围。取 3 倍中误差, 则置信度为 99.7%; 取 2 倍中误差, 则置信度为 95%。将没有失锁的观测值的整周值形成约束条件。如果有三颗卫星保持锁相, 则有两个条件; 有两颗卫星保持锁相, 则有一个约束条件; 如果没有卫星或只有一颗卫星保持锁相, 则无约束条件。利用附加约束条件的模糊度函数法进行搜索求解, 并重新确定整周未知数。

(4) 利用重新确定的整周未知数, 再进行 Kalman 滤波估计运动天线的位置。

利用本文方法, 对某一次车载动态试验的实测数据进行处理。首先利用 Kalman 滤波处理, 双差观测值的中误差取 3cm, 状态向量取位置和速度, X 方向的动态噪声  $q_x$  的中误差取  $0.3m/s^2$ , Y 和 Z 方向的动态噪声  $(q_y, q_z)$  的中误差都取  $0.2m/s^2$ 。从图 2 可以看出这样的选择是

合理的。假设17,23和3号卫星在历元71,78,79,80,82,89,101,110处出现周跳,而6,12,16号卫星在这些时刻保持锁相,则有两个附加条件,利用前述方法进行解算。如表6“附加两个条件”,所列出的全部周跳均可修复。也就是说,利用前面时刻的状态预报的天线位置和中误差所确定的搜索范围(三倍中误差或两倍中误差)内,附加约束条件的模糊度函数解唯一。假设16,17,23,3号卫星在71,78,79,80,89,101,110历元处出现周跳,而6,12号卫星在这些历元处保持锁相,则有一个约束条件。如表6“附加一个条件”,取三倍中误差来确定搜索范围,附加约束条件的模糊度函数法解不唯一,即无法确定所列周跳的大小;取两倍中误差来确定搜索范围,则模糊度函数法解只有在历元110处不唯一,其它处的周跳可以修复。假设全部卫星都在71,78,79,80,82,89,101,110历元处出现周跳,如表6“不附加条件”,在两倍或三倍中误差所确定的搜索范围内,模糊度函数法解不唯一,即无法修复这些历元上的周跳。

表6 利用附加约束条件的模糊度函数法修复周跳时的极值个数表

历元号	坐标分量	基线向量预报值		附加两个条件		附加一个条件		不附加条件		基线向量估值 $X_t^{(+)}$	状态扰动量 $g_t$
		基线向量	中误差	±3m。	±2m。	±3m。	±2m。	±3m。	±2m。		
71	X	-138.163	0.208							-138.459	-0.456
	Y	79.650	0.155	1	1	2	1	14	5	79.688	0.071
	Z	-217.229	0.148							-217.495	-0.397
78	X	-157.318	0.208							-157.621	-0.480
	Y	82.081	0.154	1	1	3	1	17	4	82.032	-0.070
	Z	-234.067	0.147							-234.230	-0.236
79	X	-161.494	0.208							-161.903	-0.648
	Y	82.337	0.155	1	1	2	1	17	5	82.265	-0.098
	Z	-237.345	0.148							-237.581	-0.339
80	X	-166.440	0.208							-166.789	-0.550
	Y	82.470	0.155	1	1	3	1	16	4	82.424	-0.061
	Z	-241.042	0.148							-241.231	-0.274
82	X	-177.254	0.208							-176.956	0.468
	Y	82.668	0.155	1	1	3	1	15	3	82.746	0.130
	Z	-248.851	0.148							-248.802	0.067
89	X	-211.004	0.208							-211.142	-0.209
	Y	84.536	0.154	1	1	3	1	12	5	84.561	0.036
	Z	-275.234	0.147							-275.324	-0.318
101	X	-292.800	0.208							-293.041	-0.381
	Y	81.034	0.154	1	1	3	1	15	4	80.933	-0.170
	Z	-327.315	0.148							-327.284	-0.057
110	X	-367.185	0.208							-367.153	0.043
	Y	67.296	0.154	1	1	3	2	16	5	67.259	-0.056
	Z	-359.423	0.148							-359.384	0.063

在这次车辆试验的动态噪声水平上,只要任一历元有三颗卫星保持锁相(共观测六颗卫星),则可正确地修复周跳;而对两颗卫星保持锁相的情况,大部分周跳可以得到修复,个别地方周跳无法修复。对船舶或飞机等动态噪声比地面车辆好的情况,可望两颗卫星保持锁相可以完全修复周跳。

## 5 结 论

本文提出的附加约束条件的模糊度函数法,它能充分地利用所有观测值信息,并大大地减少模糊度函数法的多值性。经试验验证了在一定噪声水平上,部分卫星失锁时修复周跳的有效性和可行性。

利用附加约束条件的模糊度函数法进行动态定位,在一般地面车辆的动态噪声水平下,只要有三颗卫星(六颗卫星被观测)不出现周跳,该历元的其它卫星出现的周跳完全可以修复并确定出运动天线的位置;而在只有两颗卫星不出现周跳时,则有少部分历元的周跳无法修复。对船舶或飞机的动态噪声比地面车辆低的情况,可望两颗卫星保持锁相时可以完全修复周跳。

## 参 考 文 献

- 1 Schwarz K P, Cannon M E, Wong R V C. A Comparison of GPS Kinematic Models for the Determination of Position and Velocity along a Trajectory. *Manuscripta Geodaetica*, 1989(14): 345~353
- 2 Remondi B W. Using the Global Positioning System(GPS)Phase Observable for Relative Geodesy: Modeling, Processing and Results, NOAA, Rockville, MD 20852 Reprint of Doctoral Dissertation, Center for Space Research, University of Texas, Austin, 1984.
- 3 Mader G. Ambiguity Function Techniques for GPS Phase Initialization and Kinematic Solutions. Proceedings of the Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Ottawa, Canada; Sept, 1990.

## Ambiguity Function Method with Constrained Conditions and Its Application in GPS Kinematic Positioning

Han Shaowei

(Dept. of Geodesy, WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

**Abstract** Analyzing the limits of the Kalman filtering method and ambiguity function method in kinematic mode, we give a new method—ambiguity function method with constrained conditions which can make use of all observation information. The results obtained from the data processing of the vehicle borne GPS test have proved that of there are three satellite signals locked, the cycle slips on other satellites can be removed completely.

**Key words** ambiguity function method; GPS kinematic positioning; constrained condition