

动态大地测量反演及其在地震非均匀破裂研究中的应用

赵 少 荣

(武汉测绘科技大学大地测量系, 武汉珞瑜路 39 号, 430070)

摘要 本文从固体力学基本方程出发, 提出了一类反问题, 将其定义为动态大地测量反问题, 运用有限元法和正则化方法研究了动态大地测量反问题的解和性质, 提出了动态大地测量反演的正则化方法; 最后, 讨论了动态大地测量反演在地震非均匀破裂研究中的应用, 利用地大测量资料反演获得了唐山地震的非均匀破裂图像。

关键词 动态大地测量, 反演, 地震非均匀破裂

分类号 P315.02 P227

0 引言

由于大地测量方法当今仍然是能够在全球大范围内提供观测约束的唯一手段, 将地球动力学研究与大地测量学相结合, 能够对地球动力学研究的进一步发展起到促进作用。但是, 这种结合工作, 目前仅停留在实践活动的状态。为了将动态大地测量工作与地球动力学研究从理论上结合起来, 本文从固体力学基本方程出发, 提出了动态大地测量反问题, 研究了动态大地测量反演的基本方法, 并讨论它在地震非均匀破裂研究中的应用。

1 动态大地测量反演

1.1 动态大地测量反问题

根据固体力学的基本方程和假设, 对任一具有边界 S 的变形体 V , 可列出其运动方程和变形协调方程, 不妨设任意介质的本构方程(应力应变关系)为:

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (1)$$

可给出固体力学边值问题的一般方程为:

$$\begin{cases} \epsilon = Lu \\ L^T\sigma + p = 0 & (\text{在 } V \text{ 内}) \\ L_1^T\sigma = q & (\text{在 } S \text{ 上}) \\ \sigma = f(\epsilon) \\ u = u_0 & (x, y, z) \in S \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 1992-12-29. 赵少荣, 男, 31 岁, 博士, 讲师, 现从事大地测量反演问题的研究。

式中, $\varepsilon = [e_x \ e_y \ e_z \ 2e_{xy} \ 2e_{xz} \ 2e_{yz}]^T$, $u = [u \ v \ w]^T$,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad L_1 = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix}^T$$

在地球动力学和地震学等学科的许多研究中都是以固体力学基本方程为基础的,所采用的基本方法,都是在一定的假定条件下,求解上述边值问题,即已知载荷作用,变形体的本构方程,求解变形体内各点的位移及应力和应变。如果在地球表面进行了动态大地测量工作,例如,在整个(或局部)地球表面上获得了某一时间段内的动态大地测量结果(包括应变,倾斜,位移及其函数,以及重力变化的观测结果),那么,我们需要讨论的问题是如何根据获得的观测结果来求解上述边值问题,这就产生了边值问题反问题。

定义:对于由变形体外部(或部分内部)的动态大地测量结果来推测变化发生原因的一类问题,称为动态大地测量反问题。由于所讨论的反问题是用微分方程的形式表示的,它也称为微分方程反问题。

1.2 动态大地测量反问题的解与性质

由于微分方程反问题的解算困难,要获得其解析解通常是不可能的,因此须采用数值计算法。

设具有边界 S 的空间域 V 被离散成无重叠的单元, S_e, V^e 表示其中第 e 个单元, 相应的边界总节点数为 $N = \{N_e\}$, X_e 表示第 e 个节点的位置向量, $N_e = \{n \in N | X_n \in S\}$ 为边界上已知位移的节点标号子集; 设与第 e 个节点有关的形函数为 N_e , 由此可得区域内任意点位移的第 u 个分量为: $U_e = \sum_{n \in N_e} N_{e,n} U_n$, 及: $g_e = \sum_{n \in N_e} N_{e,n} g_n$, 式中 U_n 为第 n 个节点位移的第 u 个分量, $g_n = g(X_n)$ 为边界上第 n 个已知位移节点上的第 u 个分量, 将上述方程聚集起来得:

$$KU = F \quad (3)$$

式中, K 是整体刚度系数矩阵, U 是节点位移, F 是节点力。

可将 K 和 F 进一步表示成: $K = \sum_{e=1}^{M_s} K^e$, $F = \sum_{e=1}^{M_s} F^e$, 其中, M_s 是单元总数, K^e 和 F^e 分别为单元刚度矩阵和单元载荷向量, 且有: $K^e = \{K_{pq}^e\}$, $F^e = \{F_p^e\}$, $1 \leq p, q \leq M_e$, 其中, $M_e = M_{ne} \cdot M_e$, M_{ne} 为第 e 个单元中的节点数目, M_e 为 e 单元中节点自由度数目, M_s 为 e 单元的自由度总数目; 对应的单元载荷向量为:

$$F^e = \int_{V^e} N_e^* f dv + \int_{S^e} N_e^* h ds$$

这样, 我们利用有限元法已将讨论的边值问题转化成为一组由系统节点位移表示的泛函方程组, 寻求微分方程反问题(2)的解, 就可转化为求泛函方程式(3)的解。尽管(3)式与目前国内采用的固体力学有限元方程的形式是相同的, 但二者已有本质的区别。目前国内外学者^[1,2,3]采用有限元法研究固体力学一些基本问题时, 都是采用给定介质的力学参数及边界条件, 求解节点位移的方法, 即为求解微分方程(边值问题)正问题。这时, (3)式是线性方程组; 但对于上述动态大地测量反问题来说, (3)式已不是线性方程组, 它是一个泛函方程组, 并且, 因为由动态大地测量手段获得的观测结果, 相当于无穷维空间中的一个有限采样子集, 其数据空

间是不完备的,因此,泛函方程(3)的解一般不唯一,一般来说,它是一个不适定问题。下面研究利用正则化方法寻求动态大地测量反问题的解。

1)第一类动态大地测量反问题

定义 1:设需求解的模型参数为 X, B_1 和 B_2 是距离空间, $U \in B_1, X \in B_2$, 算子 $K: B_1 \rightarrow B_2$, 考虑泛函方程式:

$$KU = X \quad (4)$$

若设 K 的逆算子存在,记为 $A=K^{-1}$,则可得:

$$AX - U = 0 \quad (5)$$

将由(4)或(5)式表示的一类动态大地测量反问题,称为第一类动态大地测量反问题。

设算子方程(5)的可能解集为 $G, \Omega(X)$ 是在集合 $G_1 \subset G$ 上定义的稳定泛函^[4],且 $X \in G, U \in B_1$,则可得如下定理:

定理 1. 对于第一类动态大地测量反问题(5),设 A 为由 G 到 B_1 的连续算子,对任意 $U \in B_1$ 和参数 $a > 0$,都有元素 $X_0 \in G_1$,使泛函: $\Phi(X, U) = \| AX - U \|^2 + a \cdot \Omega(X)$ 在 X_0 处达到下确界,即: $\inf_{X \in G_1} \Phi(X, U) = \Phi(X_0, U)$.

证明:由于对于所有 $X \in G_1$,有 $\Phi \geq 0$,故下确界 $\inf \Phi = \Phi_0$ 存在,可取 G_1 中元素的一种极小化序列 $\{X_n\}$,使: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \Phi_0$,式中 $\Phi_n = \Phi(X_n, U)$,则对所有 n 来说: $\Phi_{n+1} \leq \Phi_n \leq \Phi_0$,而对于任意的 n 和任一确定的 $a > 0$,有: $\Omega(X_n) \leq \frac{1}{a} \Phi_0 = Q$,即序列 $\{X_n\}$ 属于 G_1 中使 $\Omega(X) \leq Q$ 的元素的集合。由于该集合是 G_1 中的紧集,则由序列 $\{X_n\}$ 中可以选出收敛于 G_1 中某元素 X_0 的子序列 $\{X_{n_k}\}$,再由算子 A 的连续性,可得:

$$\begin{aligned} \inf_{X \in G_1} \Phi(X, U) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(X_n, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(X_{n_k}, U) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \| AX_{n_k} - U \|^2 + a \cdot \Omega(X_{n_k}) \} = \| AX_0 - U \|^2 + a \cdot \Omega(X_0) \end{aligned}$$

证毕。

推论 1 对于动态大地测量第一类反问题(4),在定理 1 的条件下,对任意 $U \in B_1$ 和参数 $a > 0$,都存在元素 $X_0 \in G_1$,使泛函: $R(X, U) = \| KU - X \|^2 + a \cdot \Omega(X)$ 在 X_0 处达到下确界,即: $\inf_{X \in G_1} R(X, U) = R(X_0, U)$.

2)第二类动态大地测量反问题

定义 2:设待求模型参数为 Y ,考虑泛函方程式:

$$K(Y) \cdot U = F \quad (6)$$

其中 $K(Y)$ 关于 Y 是连续的。设 B_1 和 B_2 是距离空间, $Y \in B_1, F \in B_2$, 算子 $D: B_1 \rightarrow B_2$, 且满足: $DY = K(Y)U = F$, 可得如下算子方程:

$$DY = F \quad (7)$$

将形如(6)或(7)式的一类动态大地测量反问题,称为第二类动态大地测量反问题。

若设(6)式的可能解集为 $G, \Omega(X)$ 是在集合 $G_1 \subset G$ 上定义的稳定泛函,且 $Y \in G$,我们可得如下定理:

定理 2. 对于动态大地测量反问题(6),设 D 为由 G 到 B_2 的连续算子,对任意 $F \in B_2$ 和参数 $a > 0$,都有元素 $Y_0 \in G_1$,使泛函: $\Phi(Y, F) = \| K(Y) \cdot U - F \|^2 + a \cdot \Omega(Y)$ 在 Y_0 处达到下确界,

即： $\inf_{Y \in \Omega_1} \Omega(Y, F) = \Phi(Y_0, F)$.

3) 第三类动态大地测量反问题

定义3：考虑问题(3)，待求参数 X, Y 同时包含在 K 和 F 项中，可得：

$$K(X) \cdot U = F(Y) \quad (8)$$

式中， $K(X), F(Y)$ 分别关于 X, Y 是连续的。将(8)式表示的一类动态大地测量反问题，称为第三类动态大地测量反问题。

设在所讨论的空间域中，参数 X, Y 互不相关，即对于二个子空间 E_1, E_2 ，满足 $E_1 \cap E_2 = 0$ ，且 $X \in E_1, Y \in E_2$ 。再设(8)式可作如下分解：

$$K(X) = \begin{bmatrix} K_1(X) & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad F(Y) = \begin{bmatrix} F_1 \\ Y \end{bmatrix}$$

由(8)式得：

$$\begin{cases} K_1 \cdot U_1 + K_2 \cdot U_2 = Y \\ K_3 \cdot U_1 + K_4 \cdot U_2 = F_1 \end{cases} \quad (9)$$

对于问题(8)或(9)，设 B_1, B_2, D_1, D_2 是距离空间， $U \in B_1, Y \in B_2$ ，算子 $T_1: B_1 \rightarrow B_2$ ，且满足： $T_1 U = K_3 U_1 + K_4 U_2 = Y$ ； $X \in D_1, F_1 \in D_2$ ，算子 $T_2: D_1 \rightarrow D_2$ ，且有： $T_2 X = K_1(X) \cdot U_1 + K_2 U_2 = F_1$ ，由此得算子方程：

$$\begin{cases} T_1 \cdot U = Y \\ T_2 X = F_1 \end{cases} \quad (10)$$

由(4)和(7)式可知，(10)式中第一式和第二式分别是第一类和第二类动态大地测量反问题，因此，在上述假设下，第三类动态大地测量反问题可以等价地分解成为第一和第二类动态大地测量反问题，这样就可以得到如下定理：

定理3. 对于第三类动态大地测量反问题(8)，如果可以等价地变换为(10)式的形式，且 T_1, T_2 分别是由 B_1 到 B_2 和 D_1 到 D_2 的连续算子， $G_1 \subset D_1$ 和 $G_2 \subset B_2$ 分别是 X 和 Y 的可能解集，那么对于任意 $U \in B_1$ 和参数 $\alpha > 0$ ，都有元素 $X_0 \in G_1, Y_0 \in G_2$ ，使泛函： $\Phi(X, Y, U) = \|K(X) \cdot U - Y\|^2 + \alpha \cdot \Omega(X, Y)$ 在 X_0, Y_0 处达到下界，即： $\inf_{\substack{X \in G_1 \\ Y \in G_2}} \Phi(X, Y, U) = \Phi(X_0, Y_0, U)$ 。

由上述研究，可将动态大地测量反问题归结为下列泛函极值问题：

$$\Phi(X) = \|KU - F\|^2 + \alpha \cdot \Omega(X) = \min \quad (11)$$

其中 $\alpha > 0$ 。不妨取 $\alpha < 1$ ，这时上式第二项实质上已变成约束条件，选取稳定泛函^[3]： $\Omega(X) = |\varphi(x)|$ ，这时问题(11)变为：

$$\begin{cases} \Phi(X) = \|KU - F\|^2 = \min \\ \text{s. t. } |\varphi(X)| \leq E \end{cases} \quad (12)$$

式中， E 是正常数向量。上式即为数学规划问题，约束 $|\varphi(X)| \leq E$ 的数学意义是将 X 的允许解集限制在紧集内，从而达到将不适定问题转化成适定问题的目的，其物理意义是要求我们对物理模型参数的性质有一定程度的了解，它也是一种顾及先验信息的非线性反演方法^[5]，其解可由一般的非线性最优化算法获得^[6]。

2 动态大地测量反演在地震非均匀破裂研究中的应用

在以往利用大地测量资料反演震源参数时,对震源区地壳介质的变化研究较少^[7,8],其中一个主要原因是由于目前的弹性位错理论公式中,采用了均匀介质和常位错分布假设,因此,采用目前的弹性位错理论就难以进行介质特性和地震非均匀破裂的反演研究。作为本文理论结果的一个应用,下面利用地震前后的水平位移资料反演研究唐山地震的非均匀破裂特征。

2.1 模型与结果

如图1所示,取长宽各为180公里的地块,厚度为15公里,根据文献[8]获得的断层位错模式的反演结果,取唐山地震断层长63公里,断层走向为北东30°,由于唐山地震断层是一条走滑断层,为简化计算,忽略其断层倾滑和张裂分量,只考虑断层的剪切破裂效应,采用二维弹性平面应力有限元模型作为断层力学模型,设由大地测量方法获得的地震位移场为 U_L 。

1) 为了与弹性位错理论的反演结果^[8,9]相比较,首先假定地块是均匀各向同性体,且设地震断层上各点的剪切破裂(错动)值相等,设为 Δu_0 ,根据(5)式可构成第一类动态大地测量反问题:

$$\begin{cases} \Phi(\Delta u_0) = \| U_L - U \|^2 = \min \\ \text{s. t. } a \leq \Delta u_0 \leq b \end{cases} \quad (13)$$

式中, $U = K^{-1} \cdot G \cdot \Delta u_0$, K 为刚度矩阵, G 为系数矩阵, b 和 a 为 Δu_0 的上下限,取 $a=0.28m$, $b=8.5m$,利用惩罚函数法^[6]解算模型(13),将由大地测量数据反演获得的断层剪切破裂结果列入表1。

表1 唐山地震均匀破裂反演结果

参数	初值	下限	上限	反演值	$\sum V_i^2$ (m^2)	N	σ (m)
$\Delta u_0(m)$	4.24	0.28	8.5	3.050	6.954	80	0.422

表中 $\sum V_i^2$ 为大地测量观测值与反演值的拟合残差平方和, σ 为拟合中误差,N为反演计算的迭代次数。

将上述均匀破裂假设下的反演结果,与文献[8]中由弹性位错理论反演获得的唐山地震断层走滑位错量 $U_1=3.16m$ 相比较,可知二种结果是一致的。

2) 考虑介质的非均匀性,将图1所示的地壳介质划分成断层附近与外围二个子区域,设各区域对应的岩石弹性模量分别为 E 和 E_0 ,固定震源区外围区域岩石弹性模量为 $E_0=5.0 \times 10^9 kg/m^2$,设地震断层的均匀破裂(错动)值为 Δu_0 ,下面利用大地测量数据同时反演断层的均

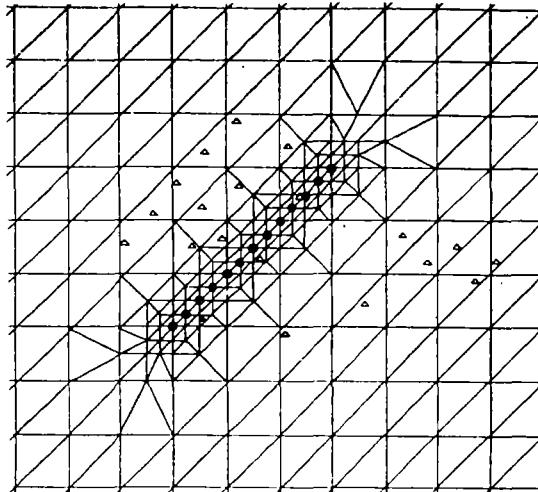


图1 唐山地震非均匀破裂有限元网格
(圆圈为破裂点,小三角形为大地测量点)

匀破裂参数 Δu_0 及断层周围岩石的弹性模量 E ,由前面的讨论,构成第三类动态大地测量反问题为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\Delta u_0, E) = \| U_L - U \| = \min \\ \text{s. t. } a_1 \leq \Delta u_0 \leq b_1 \\ a_2 \leq E \leq b_2 \end{array} \right. \quad (14)$$

式中, $U = K^{-1}G \cdot \Delta U_0$, $K = K(E)$, b_1, a_1, b_2, a_2 分别为 ΔU_0 和 E 的上下限, 解算模型(14), 将由大地测量数据反演获得的断层均匀破裂结果和断层附近的岩石弹性模量列入表 2。

表 2 唐山地震均匀破裂和岩石弹性模量反演结果

参数	初值	下限	上限	反演值	$\sum n_i^2$ (m ²)	σ (m)	N
Δu_0 (m)	3.050	0.566	8.487	4.959			
E (kg/m ²)	3×10^9	5×10^7	2×10^{10}	0.8868×10^9	4.15	0.336	52

上述研究表明,利用大地测量数据,结合断层力学模式,能够反演出断层周围的岩石力学参数,但是,上面反演获得的真正结果是断层周围二个区域内岩石弹性模量的相对值,而不是其绝对值本身。

3) 仍设图 1 所示区域划分成断层附近与外围二个区域, 对应的岩石弹性模量分别为 E 和 E_0 , 固定外围 $E_0 = 5 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$, 并取地震断层上 13 个破裂点的剪切位移 $\Delta u = [\Delta u_1 \Delta u_2 \dots \Delta u_{13}]^T$, 以及断层附近岩石弹性模量 E 作为反演参数, 构成下列第三类动态大地测量反问题:

$$\begin{cases} \Phi(\Delta u, E) = \|U_L - U\|^2 = \min \\ \text{s. t.} \quad a \leq \Delta u \leq b \\ \quad \quad \quad E_1 \leq E \leq E_2 \end{cases} \quad (15)$$

式中, b, a, E_1, E_2 分别为 Δu 和 E 的上下限, 解算模型(15), 将由大地测量数据反演获得的唐山地震断层非均匀破裂(错动)值和断层附近的岩石弹性模量值列入表 3, 表中 $\bar{\Delta u}$ 为反演的剪切位移平均值, \bar{E} 为断层附近岩石弹性模量的反演值, 图 2 为上述模型对应的地震水平位移矢量图。

表 3 非均匀介质假设下唐山地震非均匀破裂反演结果

表4 唐山地震非均匀破裂反演结果之比较

编 号	模 型	反 演 参数 数	$\Delta \bar{u}$	E (kg/m^2)	$\sum u_i^2$ (m^2)	σ (m)	备 注
A	弹性位错模型	20	3.16		3.01	0.388	均匀介质均匀破裂
B	断层力学模型	1	3.05		6.95	0.422	均匀介质均匀破裂
C	断层力学模型	2	4.96	0.887×10^9	4.15	0.336	非均匀介质均匀破裂
D	断层力学模型	14	4.04	0.606×10^9	2.97	0.338	非均匀介质非均匀破裂

最后,将各种模型的反演结果综合列入表4。

2.2 讨 论

(1) 表4中考虑震源区地壳介质非均匀性的模型(C)和(D)对应的反演拟合中误差最小,因此,在震源机制研究中,考虑震源区介质的非均匀性是必要的,它能够对观测资料作出更合理的物理解释;由位移矢量图(图2)可知,模型D对应的反演值与观测值吻合较好。

(2) 表4中结果显示,模型A与模型B的反演结果相差不大,这表明在均匀介质和均匀破裂假设下,采用弹性位错理论的反演结果与断层力学有限元模型的反演结果是一致的,从理论上来看,前者是后者的一种特殊形式。

(3) 唐山地震非均匀破裂反演结果,揭示了唐山地震震源的几何特征,由反演得到的非均匀破裂图像(图3)可知,断层左端(西南段)破裂程度最大,其次为右端(北东段),断层中部破裂程度相对较小;将反演获得的非均匀破裂图像与地表实测断层位移(图4,取自[10])相比较,可知它们

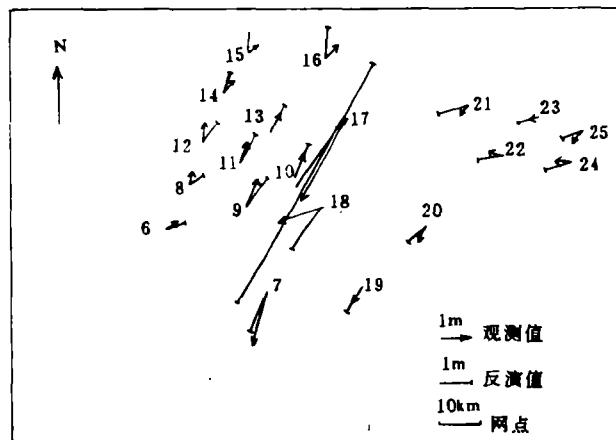


图2 唐山地震水平位移场(模型D)

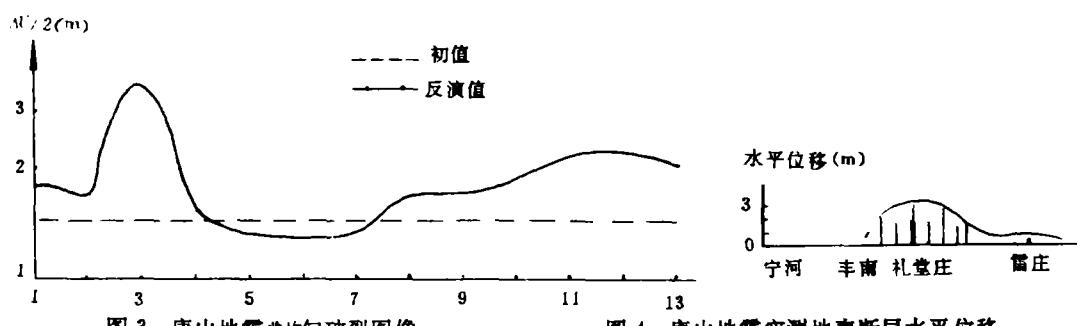


图3 唐山地震非均匀破裂图像

图4 唐山地震实测地表断层水平位移

的基本形态是一致的,这也验证了反演结果的正确性。

(4) 上述反演获得的岩石弹性模量,并不是初始破裂时地壳岩石弹性模量,由于唐山地震前后的二期(1971~1976)大地测量结果中包含了多次余震的影响,因此,上述由大地测量数据反演获得的岩石弹性模量仅仅是一种等效弹性模量,它是地震破裂后,震源区断层周围介质强度变化的一种表征。

3 结束语

传统的大地测量反演是属于地球物理反演中的一项内容,它是以地球物理学理论的一些解析公式为基础的,因而受到地球物理学理论发展的限制;本文从固体力学基本方程出发,提出的动态大地测量反问题,具有更为广泛的应用前景。

上述方法原则上可适用于一般力学模式下的大地测量资料反演,但在实际应用中,随着问题的数学物理性质不同,需作相应的变换。另外,在研究利用大地测量资料反演唐山地震的非均匀破裂时,只采用了线弹性模式,从断层力学的角度来看,若采用弹塑性模式,获得的结果将更为完善,这一工作有待于今后进行。

致谢:本文得到於宗伟、陶本藻、晁定波和黄立人等同志的指导和帮助,表示感谢!

参 考 文 献

- 1 宋惠珍等. 地应力场综合研究. 北京:石油工业出版社,1990.
- 2 Richardson R M. Finite element modelling of stress in the Nazca plate; driving forces and plate boundary earthquake. *Tectonophysics*, 1978, 50, 223~248
- 3 王仁等. 华北地震构造应力场的模拟. 中国科学, B辑, 1982(4), 337~344
- 4 Tikhonov A M, and Arsenin V Y. Solution of illposed problems. New York, John Wiley, 1977.
- 5 赵少荣等. 论变形测量数据的反演. 测绘学报, 1992(3), 161~172
- 6 薛嘉庆编. 最优化原理和方法. 北京:冶金工业出版社, 1983.
- 7 陈运泰等. 用大地测量资料反演的 1976 年唐山地震位错模式. 地球物理学报, 1979(3), 201~217.
- 8 赵少荣. 动态大地测量反演及物理解释的理论与应用:[学位论文]. 武汉, 武汉测绘科技大学大地测量系, 1991.
- 9 黄立人. 唐山地震的水平位移场及无震蠕滑. 地震科学, 1983(5), 1~11
- 10 吴章明. 地震断层的位移分布与发震断层破裂状态之关系初探. 地震学报, 1990(3), 235~241

Inversion of Dynamic Geodetic Data and Its Application in the Research of Seismic Non-uniform Rupture

Zhao Shaorong

(Dept. of Geodesy, WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

Abstract Starting from the equations of Solid Mechanics, one type of inverse problem in the form of the differential equation is proposed and defined as the inverse problem of Dynamic Geodesy. The properties and solutions of the inverse problem are investigated by the finite element method and regularization method, and a regularization method for inversion of dynamic geodetic data is given. Finally, the application of the inversion method in the research of the non-uniform rupture of earthquakes is discussed, and the pattern of the coseismic non-uniform rupture of the Tangshan earthquake of 1976 is determined by inversion of geodetic data.

Key words dynamic geodesy; inversion; seismic non-uniform rupture