DOI:10.13203/j.whugis1991.04.010

第16卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.16 No.4
1991年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1991

从黎曼流形的观点看非线性最小二乘平差

白亿同

摘　要

本文从黎曼流形的观点出发研究了非线性最小二乘平差，并以张量作为工具导出了非线性最小二乘中的一些公式。

【关键词】 黎曼流形；黎曼度量；张量；切空间；余切空间

1　黎曼流形简介

在三维欧氏空间里，直角坐标分别为 (x,y,z) 和 $(x+\mathrm{d}x,\ y+\mathrm{d}y,\ z+\mathrm{d}z)$ 的非常接近两点间的距离是

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 \tag{1}$$

如果采用球坐标

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

时，则

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2+r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta^2 \tag{2}$$

三维欧氏空间E^3中给定二维曲面$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$，则对应于参数值分别为$(u,v)$与 $(u+\mathrm{d}u,\ v+\mathrm{d}v)$的曲面上非常接近的两点之间的距离是

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2 \tag{3}$$

它也是曲面的第一基本齐式，其中

$$E=(\partial\mathbf{r}/\partial u,\ \partial\mathbf{r}/\partial u),\quad F=(\partial\mathbf{r}/\partial u,\ \partial\mathbf{r}/\partial v),\quad G=(\partial\mathbf{r}/\partial v,\ \partial\mathbf{r}/\partial v) \tag{4}$$

式中圆括号表示内积。

式（1）、（2）、（3）中的$\mathrm{d}s^2$都是坐标的微分的二次形式，它们分别是三维欧氏空间和二维曲面在相应坐标系下的度量。把上面的概念加以抽象，概括和推广就可给出黎曼流形概念。

收稿日期：1990—04—14

给定n维微分流形（简称流形）M，若其坐标邻域里坐标分别为(x^k)和(x^k+dx^k)的两点间的无穷小距离ds由坐标的微分的二次形式

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j * \qquad (g_{ij}=g_{ji}) \tag{5}$$

给出，且在M上每一点处它是非退化的，则我们称这个二次形式为流形M上的黎曼度量，记作g，它是M上的二阶协变张量场。流形M与其上的黎曼度量一起就构成了黎曼流形。式(5)中的g_{ij}是定义在坐标邻域U中的C^∞函数，在U中各点处（g_{ij}）是$n\times n$型非退化矩阵。

如果这个二次形式在M上每一点处都是正定的，则称这个黎曼流形为真的，在其它情况下的流形称为拟黎曼的或称具有不定度量。

上面各例都是黎曼流形的特例，且由式（1）、（2）、（3）分别给出了流形上的黎曼度量。我们再举几个例子来说明

例 1　在n维仿射空间R^n中可以定义黎曼度量g为

$$ds^2=p_{ij}dx^idx^j \tag{6}$$

其中（p_{ij}）是所有元素均为常数的$n\times n$型正定对称矩阵，这时R^n就成为n维欧氏空间，记作E^n。可以看出（p_{ij}）给出了E^n上的内积，故黎曼度量是内积概念的推广。若取（p_{ij}）为单位矩阵，则

$$ds^2=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$$

E^n是真黎曼流形。E^n的对偶空间$(E^n)^*$也是n维欧氏空间，其上的内积由（p_{ij}）的逆矩阵（p^{ij}）定义，即$p^{ij}p_{jk}=\delta^i_k$。

例 2　物理学中最重要的流形之一：闵可夫斯基时空中取黎曼度量为

$$ds^2=(dt)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$$

它是拟黎曼流形。

ds是两点间的距离，与坐标系的选择无关，故式（5）是不变量，g_{ij}是二阶协变张量的分量，称为黎曼度量的协变分量，设在坐标邻域U与$\overline{U}$中其分量分别为g_{ij}和$\overline{g}_{kl}$，则在U $\cap$ $\overline{U}$中有变换式

$$g_{ij}=(\partial\overline{x}^k/\partial x^i)(\partial\overline{x}^l/\partial x^j)\overline{g}_{kl} \tag{7}$$

在坐标邻域U中设矩阵（g_{ij}）的逆矩阵为(g^{ij})即$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$，则g^{ij}称为黎曼度量的逆变分量。在坐标变换下，它满足关系式

$$g^{ij}=(\partial x^i/\partial\overline{x}^k)(\partial x^j/\partial\overline{x}^l)\overline{g}^{kl} \tag{8}$$

由此可见g_{ij}满足逆变规律，而g^{ij}满足逆变规律。

利用协变张量g_{ij}和逆变张量g^{ij}，按如下方法，可以从一个逆变向量v^k，作出协变向量v_j，从一个协变向量v_j作出逆变向量v^k，即

$$v_j=v^ig_{ij}, \qquad v^k=v_jg^{jk}$$

流形M在点x处的切空间T_xM中任意二向量u和v的内积，由

$$(u,\ v)\ =g_{ij}u^iv^j \tag{9}$$

来定义，其中u^i为逆变向量u的分量。余切空间T^*_xM中任意u^*和v^*的内积，由

$$(u^*,\ v^*)\ =g^{ij}u_iv_j$$

来定义，其中u_i为协变向量u^*的分量。切空间或余切空间中任意两向量的正交性均可利用

* 这里使用了哑指标，即爱因斯坦求和规定，以后我们经常采用这一规定。

相应空间中的内积来定义。

若N为流形M的子流形，对于N上的任一点x处有，$T_xN \subset T_xM$，$T_x^*N \subset T_x^*M$。T_xN在T_xM中的正交补空间记作$(T_xN)^\perp$，我们把它称作N在点x处的法空间。类似$(T_x^*N)^\perp$称作N在点x处的余法空间。

2 欧氏空间的超曲面

由于非线性最小二乘平差中的数学模型绝大多数均可看作欧氏空间中的超曲面，为利用黎曼流形研究非线性平差问题，我们首先讨论超曲面上的黎曼度量。

2.1 用参数方程表示的超曲面

若m维欧氏空间E^m中的超曲面M由

$$y^\mu = f^\mu(x^i) \tag{10}$$

表示，其中$\mu = 1, \cdots, m$，$i = 1, \cdots n$，$n < m$，$\mathrm{rank}(\partial f^\mu/\partial x^i) = n$。这时超曲面$\mathbf{M}$是$E^m$的$n$维子流形。令$\mathbf{f} = [f^1 f^2 \cdots f^m]$，$\mathbf{x} = (x^1 x^2 \cdots x^n)$，则$\partial \mathbf{f}/\partial x^i$为流形$\mathbf{M}$在点$\mathbf{x}_0$处的切空间$T_{x_0}M$的基底。若$E^m$中的内积（即黎曼度量$g$）由式（9）给出，即$E^m$中任意二向量$u$，$\mathbf{v}$的内积为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = p_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda \tag{11}$$

其中u^μ为$\mathbf{u}$的逆变分量E^m。在点$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$处的切空间记作$T_{x_0}E^n$，它是m维欧氏空间，坐标原点移至了$\mathbf{f}(x_0)$，$T_{x_0}M$是$T_{x_0}E^n$的子空间。由E^m的内积可诱导出$T_{x_0}E^m$的内积和M的黎曼度量，$T_{x_0}E^m$的内积与E^m的内积相同，仿效式（4）可诱导出流形M的黎曼度量g

$$g_{ij} = (\partial \mathbf{f}/\partial x^i,\ \partial \mathbf{f}/\partial x^j) = p_{\mu\lambda} \partial f^\mu/\partial x^i \partial f^\lambda/\partial x^j \tag{12}$$

于是M成为一个黎曼流形，这样M上任意点处的切空间$T_{x_0}M$上也就有了内积，因而切空间是n维欧氏空间。

注意在2.1中，我们使用希腊字母μ、λ等表示向量$\mathbf{f}$的分量的指标，其取值为1，…，m，用英文字母i、j等表示参数向量$\mathbf{x}$的分量的指标，其取值为1，…，n。在后面3.1中仍然这样使用指标。

2.2 用方程组表示的超曲面

若n维欧氏空间E^n中的超曲面N由

$$F^\mu(x^i) = 0 \tag{13}$$

表示，其中$i = 1, \cdots, n$，$\mu = 1, \cdots, m$，$m < n$，$\mathrm{rank}(\partial F^\mu/\partial x^i) = m$，这时超曲面$N$为$E^n$的$n-m$维子流形。由$\mathbf{E}^n$的黎曼度量诱导出流形$N$的黎曼度量是有困难的。现利用流形$N$的余切空间和余法空间来研究流形本身。令$F = (F^1 \cdots F^m)$，$\mathbf{x} = (x^1 \cdots x^n)$，流形$N$在$\mathbf{x}_0$处的余切空间$T_{x_0}^*N$为

$$(\partial F^\mu/\partial x^i \mathrm{d})x^i = 0$$

它是E^n在点$\mathbf{x}_0$处的余切空间$T_{x_0}^*E^n$的子空间。$T_{x_0}^*E^n$是n维欧氏空间，坐标原点位于$\mathbf{x}_0$，它与E^n的对偶空间$(E^n)^*$同构且等距。若E^n的内积由正定对称矩阵(p_{ij})给出，则$(E^n)^*$与$T_{x_0}^*E_n$的内积都由(p_{ij})的逆矩阵(P^{ij})来定义。

$T^*_{x_0}E^n$的基底为dx^i，而$dF^\mu=(\partial F^\mu/\partial x^i)dx^i$为余切空间$T^*_{x_0}N$的正交补空间（$T^*_{x_0}N)^\perp$（即余法空间）的基底。根据$(E^n)^*$的内积（$p^{ij}$)可诱导出$(T^*_{x_0}N)^\perp$的内积为

$$g^{\mu\lambda}=(dF^\mu,\ dF^\lambda)=p^{ij}\partial F^\mu/\partial x^i\partial F^\lambda/\partial x^j \tag{14}$$

这里用i，j，k等表示E^n中向量$\mathbf{x}$的分量的指标，取值为1，…，n，用μ，λ等表示向量F的分量的指标，取值为1，…，m。在后面的3．2中仍然这样使用指标。

综上所述，可知由（10）式给出的流形M是黎曼流形，在M上任意点处的切空间$T_{x_0}M$上都定义了内积。可以证明由（13）式给出的流形N上也可定义黎曼度量，但由E^n的内积来诱导出它则有困难。在上面2．2中我们在N上任意点处的余法空间上都定义了内积。这对研究条件平差是很有用处的。式（12）和式（14）可以分别看作式（7）和式（8）的推广。式（7）反映了黎曼度量的不变性，所有指标取值均与流形维数相同，式（12）则为由大流形的黎曼度量诱导子流形黎曼度量的关系式，希腊字母指标取值与大空间的维数相同，英文字母指标取值则与子流形维数相同。

3 非线性最小二乘平差问题

3.1 间接平差

设误差方程为

$$v^\mu=f^\mu(\mathbf{x})-L^\mu \tag{15}$$

式中L^μ表示观测值，v^μ表示改正数，$\mathbf{x}$表示未知参数向量，其分量为x^i，$\mu=1$，…，m，$i=1$，…，n，$n<m$，$\mathrm{rank}(\partial f^\mu/\partial x^i)=n$，权阵$(p_{ij})$为$m\times m$型对称正定矩阵。

将（15）式在$\mathbf{x}_0$附近局部线性化

$$v^\mu=(\partial f^\mu/\partial x^i)_0(x^i-x^i_0)-(L^\mu-f^\mu(\mathbf{x}_0)) \tag{16}$$

这里$\mathbf{x}^i_0$为向量$\mathbf{x}_0$的逆变分量。令$x^i-x^i_0=\delta x^i$，$l^\mu=L^\mu-f^\mu(\mathbf{x}_0)$，（16）式变为

$$v^\mu=(\partial f^\mu/\partial x^i)_0\delta x^i-l^\mu \tag{17}$$

设$y^\mu_i=f^\mu(\mathbf{x})$，它就是（10）式表示的$n$维流形$M$，而且还是$E^m$的子流形，由前面所述可知$(\partial f/\partial \mathbf{x}^i)_0$张成流形$M$在点$\mathbf{x}_0$处的切空间$T_{x_0}M$，而$T_{x_0}M$是$T_{x_0}E^m$的子空间，以$l^\mu$为逆变分量的向量$l$在$T_{x_0}E^m$中（参看图1）。

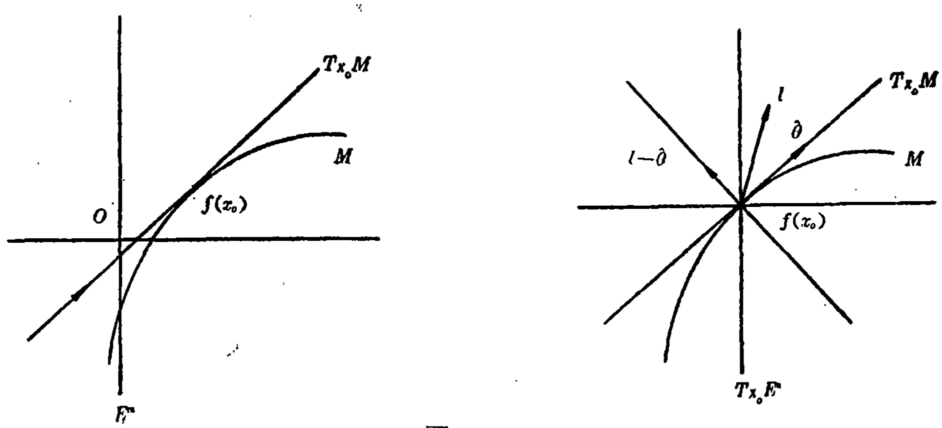

图 1

设E^m的内积由权阵$(p_{\mu\lambda})$给出。根据正交投影定理，并注意到(17)式，可知在$T_{x_0}M$中存在唯一一个$\hat{\theta}$，使得$\| l-\hat{\theta} \| = \| \mathbf{v} \|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = p_{\mu\mu}\nu^\mu\nu^\mu$最小，且$l-\hat{\theta}$正交于$T_{x_0}M$

设$\hat{\theta} = \delta\hat{x}^j \partial \mathbf{f}/\partial x^j$（这里把下标"0"省略，以下同），则有

$$(l-\delta\hat{x}^j\partial \mathbf{f}/\partial x^j,\ \partial \mathbf{f}/\partial x^i) = 0$$

即

$$(\partial \mathbf{f}/\partial x^i,\ \partial \mathbf{f}/\partial x^j)\hat{\delta}x^j = (\partial \mathbf{f}/\partial x^i,\ l) \tag{18}$$

这就是法方程，其系数$(\partial \mathbf{f}/\partial x^i, \partial \mathbf{f}/\partial x^j) = g_{ij} = p_{\mu\lambda}\partial f^\mu/\partial x^i \partial f^\lambda/\partial x^j$是$M$上的黎曼度量，在点$\mathbf{x}_0$处则为切空间$T_{x_0}M$的内积，常数项$(\partial \mathbf{f}/\partial x^i, l) = (p_{\mu\lambda}\partial f^\mu/\partial x^i)l^\lambda$。由于$(g_{ij})$是正定的，故方程组(18)存在唯一解。

[4]中引入虚拟观测值，并假定其权取负数，这时权阵(p_{ij})是非退化的，但不是正定的，由$p_{\mu\lambda}$诱导出来的g_{ij}也是如此，故相应流形M是拟黎曼流形。由此可见拟黎曼流形对我们来说也是有用的。

3.2 条件平差

设条件方程为

$$F^\mu(\mathbf{x}) = 0, \qquad (\mu = 1, \cdots m) \tag{19}$$

其中$\mathbf{x}$为未知参数向量，其分量为x^i $(i=1, \cdots, n)$，$m<n$，$\mathrm{rank}(\partial F^\mu/\partial x^i) = m$，权阵$(p_{ij})$为$n\times n$型正定矩阵。设$l$和$\mathbf{v}$分别为$x$的观测值向量和改正数向量，且其分量分别为$l^i$和$\nu^i$，它们之间有关系$x^i = l^i + \nu^i$。

将(19)式在l附近局部线性化

$$F^\mu(l) + (\partial F^\mu/\partial x^i)_l \nu^i = 0$$

记$w^\mu = -F^\mu(l)$，$\partial F^\mu/\partial l^i = (\partial F^\mu/\partial x^i)_l$，可得

$$(\partial F^\mu/\partial l^i)\nu^i = w^\mu \tag{20}$$

设$G^\mu(\mathbf{x}) = F^\mu(\mathbf{x}) - F^\mu(l)$，这时$G^\mu(\mathbf{x}) = 0$表示$E^n$的$n-m$维子流形$N$，且$l$在流形$N$上。

$$(\partial F^\mu/\partial l^i)\nu^i = 0$$

表示流形N在点l处的余切空间T_l^*N。又知余法空间$(T_l^*N)^\perp$的基底为$dF^\mu = (\partial F^\mu/\partial l^1, \cdots, \partial F^\mu/\partial l^n)$。$T_l^*N$和$(T_l^*N)^\perp$都是$T_l^*E^n$的子空间（参看图2）。若$E^n$的内积由权阵$(p_{ij})$给出，则$(E^n)^*$和$T_l^*E^n$的内积都由$(p_{ij})$的逆矩阵$(p^{ij})$来定义。

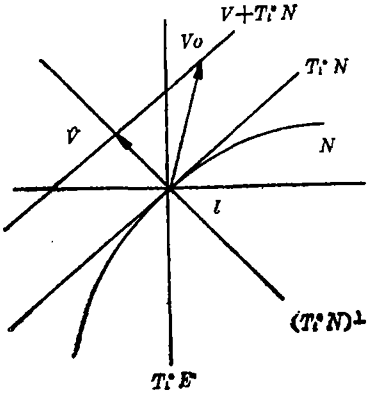

图 2

设$\mathbf{v}_0 = (\nu_0^1, \cdots \nu_0^n)$适合方程(20)，按照[3]中的提法，(20)式表示过点$\mathbf{v}_0$，且平行于T_l^*N的线性子流形$\mathbf{v}_0 + T_l^*N$。

因为我们现在是在余切空间$T_l^*E^n$中讨论，又$T_l^*E^n$是协变空间，故应将$\mathbf{v}$的逆变分量变换为协变分量。为此，将$\nu^i = \nu_j g^{ji}$代入(20)式得

$$(\partial F^\mu/\partial x^i)\nu_j g^{ji} = w^\mu$$

即

$$(\mathrm{d}F^{\mu},\ \mathbf{v})=w^{\mu} \tag{21}$$

根据［3］中的新投影定理，在$\mathbf{v}_0+T^*_lN$中存在唯一向量$\hat{\mathbf{v}}$，使$\|\hat{\mathbf{v}}\|^2=(\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}})=p_{ij}\hat{v}_i\hat{v}_j$最小，且$\hat{\mathbf{v}}\in(T^*_lN)^{\perp}$于是$\hat{\mathbf{v}}$可由$(T^*_lN)^{\perp}$的基底$\mathrm{d}F^{\mu}$线性表示，即

$$\hat{\mathbf{v}}=t_{\mu}\mathrm{d}F^{\mu}$$

又因$\hat{\mathbf{v}}\in\mathbf{v}_0+T^*_lM$，故它满足方程（21），于是有

$$(\mathrm{d}F^{\mu},\ t_{\lambda}\mathrm{d}F^{\lambda})=w^{\mu}$$

即

$$(\mathrm{d}F^{\mu},\ \mathrm{d}F^{\lambda})t_{\lambda}=w^{\mu} \tag{22}$$

（22）式就是联系数的法方程，而方程的系数$(\mathrm{d}F^{\mu},\ \mathrm{d}F^{\lambda})=g^{\mu\lambda}=p^{ij}\partial F^{\mu}/\partial x^i\partial F^{\lambda}/\partial x^j$是流形$N$在点$l$处的余法空间（$T^*_lN)^{\perp}$的内积。

由上面讨论可以看出间接平差是在切空间$T_{x_0}E^n$中进行的，而条件平差则是在余切空间$T^*_lE^n$中进行的。间接平差是用流形M的切空间$T_{x_0}M$来近似代替流形本身，而条件平差是用流形N的余切空间T^*_lN来近似代替流形本身的。切空间与余切空间是互为对偶的空间，间接平差与条件平差也是互为对偶的问题。使用类似于张量中的指标法能够很好地体现这种对偶关系。

4 结束语

黎曼流形为非线性最小二乘平差提供了“直观的”几何模型，实现了分析方法、几何方法与概率统计方法的三结合，使我们对非线性最小二乘平差有了更加深入地理解。［3］中从几何角度出发找出了两种平差方法的共同本质，现在我们又从几何角度严格地区分了它们的不同之处，深刻地揭示了它们之间的联系与区别。流形理论中的一些概念为非线性最小二乘平差的研究建立起一种图象思维的新方法，开辟了一条新的途径，对推动科研工作会大有裨益。

参考文献

［1］ Choquet Bruhat Y, Dewitt Morette C, Dillard Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics. Amsterdam: North-Holland, 1977.

［2］ 白亿同. 微分流形及其在测绘科学中的应用初探. 武汉测绘科技大学学报，1990（1）

［3］ 白亿同. 新投影定理及其在测量平差中的应用。武汉测绘科技大学学报，1986(1).

［4］ 陈晓勇. 虚拟负权的应用. 武汉测绘科技大学学报，1986（1）

On Nonlinear Least Squares Adjustment from Riemannian Maniflod Viewpoint

Bai Yitong

Abstract

From the point of view of Riemannian maniflod, this paper investigates the problem on nonlinear least squares adjustment, and derives some formulas using tensor as a tool.

【Key words】 Riemannian maniflod; Riemannian measure; tensor; tangent space; cotangent space.