DOI:10.13203/j.whugis1991.04.008

第16卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.16 No.4
1191年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dce. 1991

论卫星网与地面网在高斯平面坐标系统中的联合平差问题

周忠谟 晁定波

摘 要

因为我国一些地区性平面控制网（例如城市平面控制网和矿山控制网等）的点位，一般均在高斯平面直角坐标系统中表示，所以本文研究了卫星精密定位成果在高斯平面坐标系统中应用的理论和方法，推荐了卫星网与地面网的联合平差模型，并在模型中考虑了地面网归算面高程变化而生产的影响。

【关键词】 卫星网；地面网；高斯平面坐标系统；联合平差。

大家知道，在我国一些低等级的控制网和区域性的平面控制网中，其点位通常都是在高斯平面直角坐标系统中表示的，因此研究一下在高斯平面坐标系统中，应用卫星精密定位成果来改善地面网的理论和方法，是一个具有重要现实意义的问题。

1 空间基线向量网的位置基准与转换模型

在空间直角坐标系统中，如果通过卫星精密相对定位，所得空间基线向量为 $\Delta\underline{X}_S$，相应的方差一协方差阵为 $\underline{D}_{\Delta X}$，而通过网的平差已知该网的空间直角坐标及其方差一协方差分别为 $\underline{X}_S$ 和 $\underline{D}_S$，同时若以 $\delta\hat{\underline{X}}$ 表示联合平差后空间直角坐标的改正数向量，并以下标“S”和“T”分别表示卫星网与地面网相应的量(以下同)，则对任一 i 点已知有转换关系[1,2]：

$$\hat{\underline{X}}_{Si} = \hat{\underline{X}}_{Ti} + \Delta\underline{X}_0 + (\underline{R}_i - \underline{R}_0)\underline{Y} \tag{1}$$

其中

$$\hat{\underline{X}}_{Si} = X_{Si} + \delta\hat{\underline{X}}_{Si}$$

收稿日期：1990—08—27

$$\underline{\hat{X}}_{Ti} = \underline{X}_{Ti} + \delta\underline{\hat{X}}_{Ti}$$

$$\Delta\underline{X}_0 = \left\{\Delta X_0 \ \ \Delta Y_0 \ \ \Delta Z_0\right\}^T$$，平移参数向量

$$\underline{Y} = \left\{w_X \ \ w_Y \ \ w_Z \ \ m\right\}^T$$，于转参数及尺度参数向量

$\underline{R}_i$ $\underline{R}_0$ ，为相应于i点和参考点P_0的转换系数矩阵，其一般形式：

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & X \\ -Z & 0 & X & Y \\ Y & -X & 0 & Z \end{pmatrix}$$

在联合平差时，除应建立表达上述两网转换关系的函数模型外，还要确定描述两网点位方差与协方差分布的随机模型。而点位的随机模型是与网的位置基准密切相关的。

一般来说，网的位置基准可采用自由网平差（或自由网拟稳平差）的方法，或采用经典平差的方法来确定。在两网的位置基准不相一致的情况下，为了使其随机模型具有相同的参考点，应将两网的基准点化为一致。

在以下的讨论中我们均假设地面网的基准点保持不变。这时，在卫星网中可取与地面网基准点同名的P_0为参考点或原点，并设其空间直角坐标为$\underline{X}_{S0}$，则在空间直角坐标系统中，卫星网的位置基准可转换如下：

$$\underline{X}_S = \underline{X}_{S0} + (\underline{I} - \underline{J})\underline{X}_S \qquad (2)$$

其中，$\underline{X}_S$ 为与地面网位置基准相异的卫星网坐标，

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} \underline{E} & & \\ & \underline{E} & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{E} \end{pmatrix}$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underline{E} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \underline{E} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \underline{E} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{E}$ 为三维单位阵，在 $\underline{J}$ 阵中$\underline{E}$ 出现在与所选参考点相应的列。而相应卫星网点的随机模型：

$$\underline{P}_{XS}^{-1} = (\underline{I} - \underline{J})\,\underline{P}_S^{-1}\,(-\underline{J})^T \qquad (3)$$

$$\underline{P}_S = \sigma_0^2 \underline{D}_S^{-1}$$

这时在原点上若取$\underline{\hat{X}}_{S0} = \underline{X}_{S0}$和$\underline{\hat{X}}_{T0} = \underline{X}_{T0}$，同时进一步假设：

$$\underline{X}_{S0} = \underline{X}_{T0} \tag{4}$$

则由式（1）可得：

$$\underline{\hat{X}}_{Si} = \underline{\hat{X}}_{Ti} + (\underline{R}_i - \underline{R}_0)\underline{Y} \tag{5}$$

显然，在式（4）的条件下，两网所属空间直角坐标系统的原点是相重合的，即$\Delta\underline{X}_0 = \underline{O}$。因此，在卫星网与地面网的位置基准相一致的情况下，上式描述了在三维直角坐标系统中其间的转换关系。

现在若将式（1）或（5）应用于网中任意 i，j 两点，则可得其间空间直角坐标差的转换关系：

$$\Delta\underline{\hat{X}}_{Sij} = \Delta\underline{\hat{X}}_{Tij} + (\underline{R}_i - \underline{R}_j)\underline{Y} \tag{6}$$

或一般地写为：

$$\underline{F}\,\underline{\hat{X}}_S = \underline{F}\,\underline{\hat{X}}_T + \underline{F}\,\underline{R}\,\underline{Y} \tag{7}$$

$$\underline{P}_{\Delta X}^{-1} = \underline{F}\,\underline{P}_X^{-1}\,\underline{F}^T \tag{8}$$

其中，$\underline{F}$为构成坐标差的系数阵，

$$\underline{R} = (\underline{R}_1 \;\; \underline{R}_2 \;\; \cdots \underline{R}_n)^T$$

在大地坐标系统中，若以$\underline{\hat{B}} = (\hat{B} \;\; \hat{L} \;\; \hat{H})^T$ 表示联合平差后点的大地坐标向量，则与式（5）相应的转换关系类似可得：

$$\underline{\hat{B}}_{Si} = \underline{\hat{B}}_{Ti} + \underline{T}_i(\underline{R}_i - \underline{R}_0)\underline{Y} \tag{9}$$

$$\underline{T}_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{M}\sin B\cos L, & -\frac{1}{M}\sin B\,\mathrm{si}L, & \frac{1}{M}\cos B \\ -\frac{\sin L}{N\cos B} & \frac{\cos L}{N\cos B} & 0 \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{pmatrix}_i$$

这时与式（4）等价的条件为：

$$\underline{B}_{S0} = \underline{B}_{T0} \tag{10}$$

当上述两网的位置基准相同时，式（9）表达了在大地坐标系统中卫星网与地面网坐标之间的转换关系。若以$\underline{P}_{BS}$表示卫星网大地坐标的权阵，则有随机模型：

$$\underline{P}_{BS}^{-1} = \underline{T}(\underline{I} - \underline{J})\underline{P}_S^{-1}(\underline{I} - \underline{J})^T\underline{T}^T \tag{11}$$

同样，如果将式（9）应用于任意 i，j两点，则其间大地坐标差的转换关系可得：

$$\Delta\underline{\hat{B}}_{Sij} = \Delta\underline{\hat{B}}_{Tij} + (\underline{G}_i - \underline{G}_j)\underline{Y} \tag{12}$$

其中

$$\underline{G}_k = \underline{T}_k(\underline{R}_k - R_0) \qquad k = i, j$$

考虑到式(11)，则有：

$$\underline{P}_{\Delta B}^{-1}=\underline{F}\,\underline{T}\,(\underline{I}-\underline{J})\underline{P}_{S}^{-1}(\underline{I}-\underline{J})^{T}\underline{T}^{T}\underline{F}^{T} \tag{13}$$

现在利用上述关系式来讨论一下，在高斯平面直角坐标系统中，卫星网与地面网的联合平差问题。

2 两网在高斯平面坐标系统中的联合平差模型

在高斯平面直角坐标系统中，若取联合平差后点的坐标为$\underline{\hat{x}}=[\hat{x}\ \hat{y}]^{T}$，则卫星网与地面网之间的转换关系可一般地写为：

$$\underline{\hat{x}}_{S}=\underline{\hat{x}}_{T}+\underline{a}\,\underline{\Delta X}_{0}+\underline{b}\,\underline{Y} \tag{14}$$

其中$\underline{a}$，$\underline{b}$为转换系数阵，其元素参见文献[6]。

如果这时两网具有相同的参考点，则由此可写出联合平差的模型如下：

$$\begin{pmatrix}\underline{p}_{S}\\ \underline{p}_{T}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\underline{v}_{S}\\ \underline{v}_{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\underline{\hat{x}}_{T}+\underline{a}\,\Delta\underline{X}_{0}+\underline{b}\,\underline{Y}+\underline{l}_{S}\\ \delta\underline{\hat{x}}_{T}\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\underline{l}_{S}=[\underline{x}_{T}-\underline{x}_{S}]$$

以及

$$\begin{pmatrix}(\underline{p}_{S}+\underline{p}_{T}) & \underline{p}_{S}\underline{a} & \underline{p}_{S}\underline{b}\\ \underline{a}^{T}\underline{p}_{S} & \underline{a}^{T}\underline{p}_{S}\underline{a} & \underline{a}^{T}\underline{p}_{S}\underline{b}\\ \underline{b}^{T}\underline{p}_{S} & \underline{b}^{T}\underline{p}_{S}\underline{a} & \underline{b}^{T}\underline{p}_{S}\underline{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\underline{\hat{x}}_{T}\\ \Delta\underline{X}_{0}\\ \underline{Y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{p}_{S}\underline{l}_{S}\\ \underline{a}^{T}\underline{p}_{S}\underline{l}_{S}\\ \underline{b}^{T}\underline{p}_{S}\underline{l}_{S}\end{pmatrix}=0 \tag{16}$$

对于地面网来说，网点相对原点的权阵（或方差与协方差）一般应为已知，而对于卫星网其随机模型按式（11）可写为：[6]

$$\underline{p}_{S}^{-1}=\underline{C}\,\underline{T}\,(\underline{I}-\underline{J})\,\underline{P}_{S}^{-1}\,(\underline{I}-\underline{J})^{T}\underline{T}^{T}\underline{C}^{T} \tag{17}$$

其中

$$\underline{C}=\mathrm{d}\,iag[\underline{C}_{1}\ \ \underline{C}_{2}\cdots\underline{C}_{n}]$$

$$\underline{C}_{i}=\begin{pmatrix}X_{b} & X_{l} & 0\\ Y_{b} & Y_{l} & 0\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$X_{b}=M[1+\tfrac{1}{2}(1-2\sin^{2}B)l^{2}]$$

$$X_{l}=N\sin B\cos B\cdot l$$

$$Y_{b}=-M\sin B\cdot l$$

$$Y_{l}=N[1+\tfrac{1}{2}(1-2\sin^{2}B)l^{2}]\cos B$$

$l=L-L_{0}$，L_{0}为轴子午线的经度

在实用上，为方便起见，所述区域性地面网的参考系，一般或采用与国家大地基准相一

致的参考系统，或采用独立的地区性参考系统，而是否采用地心坐标系统并不重要。考虑到这种情况，同时为了简化计算工作，所以在两网的基准点不同的情况下，将其化为一致对联合平差（以网点坐标为具有先验精度息信的观测量）是重要的。

这时，在高斯平面坐标系统中根据条件（4）应有：

$$\underline{x}_{S0}=\underline{x}_{T0} \tag{19}$$

于是与式（5）和（9）相类似可得：

$$\underline{\hat{x}}_{Si}=\underline{\hat{x}}_{Ti}+\underline{C}_i\,\underline{T}_i\,(\underline{R}_i-\underline{R}_0)\,\underline{y} \tag{20}$$

在卫星网与地面网位置基准相一致时，该式表达了在高斯平面坐标系统中两网之间的转换关系。

由此，可写出两网联合平差的模型为：

$$\begin{pmatrix}\underline{p}_S\\ \underline{p}_T\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\underline{v}_S\\ \underline{v}_T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\,\underline{\hat{x}}_T\;\;\underline{s}\,\underline{y}+\underline{l}_S\\ \delta\,\underline{\hat{x}}_T\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\underline{p}_S+\underline{p}_T & \underline{p}_S\,\underline{s}\\ \underline{s}^T\,\underline{p}_S & \underline{s}^T\underline{p}_S\underline{s}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\delta\,\underline{\hat{x}}_T\\ \underline{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{p}_S\,\underline{l}_S\\ \underline{s}^T\underline{p}_S\underline{l}_S\end{pmatrix}=0 \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}\underline{s}&=[\underline{s}_1\;\;\underline{s}_2\;\cdots\;\underline{s}_n]^T\\ \underline{s}_i&=\underline{C}_i\;\;\underline{T}_i(\underline{R}_i-\underline{R}_0)\\ \underline{p}_S^{-1}&=\underline{C}\,\underline{T}\,(\underline{I}-\underline{J})^T\underline{P}_S^{-1}(I-J)^T\underline{T}^T\underline{C}^T\end{aligned} \tag{23}$$

在以上讨论中，联合平差的数学模型都是以网中参考点（原点）为依据而建立的，但是在实际上为改善地面网，以具有先验精度信息的任意两点之间的基线向量为观测量进行网的配合将是更为适宜的。

为此，在两网位置基准相同的情况下，假设网中任意两点i，j间的坐标差为$\Delta\hat{x}_{ij}=\hat{x}_j-\hat{x}_i$，则根据式（12）类似可得：

$$\Delta\underline{\hat{x}}_{Sij}=\Delta\underline{\hat{x}}_{Tij}+(\underline{S}_i-\underline{S}_j)\,\underline{y} \tag{24}$$

或一般地改写为：

$$\underline{F}\;\underline{\hat{x}}_S=\underline{F}\;\underline{\hat{x}}_T+\underline{F}\,\underline{S}\;\underline{Y} \tag{25}$$

当按经典方法平差时，应有$\underline{\hat{x}}_{T0}=\underline{x}_{T0}$，由此可得联合平差的模型为：

$$\begin{pmatrix}\underline{p}_{\Delta S}\\ \underline{p}_{\Delta T}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\underline{v}_{\Delta XS}\\ \underline{v}_{\Delta XT}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{f}\,\delta\,\underline{\hat{x}}_T+\underline{F}\;\underline{S}\;\underline{y}+\underline{w}\\ \underline{f}\,\delta\,\underline{\hat{x}}_T\end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\underline{w}=\underline{F}(\underline{x}_T-\underline{x}_S)$$

而

$$\begin{pmatrix} \underline{f}^{T}(\underline{p}_{\Delta S}+\underline{p}_{\Delta T})\underline{f} & \underline{f}^{T}\underline{p}_{\Delta S}\underline{F}\ \underline{S} \\ \underline{S}^{T}\underline{F}^{T}\underline{p}_{\Delta S}\underline{f} & \underline{S}^{T}\underline{F}^{T}\underline{p}_{\Delta S}\underline{F}\underline{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\underline{\hat{x}}_{T} \\ \underline{y} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \underline{f}^{T}\underline{p}_{\Delta S}\underline{w} \\ \underline{S}^{T}\underline{F}^{T}\underline{p}_{\Delta S}\underline{w} \end{pmatrix}=\underline{0} \tag{27}$$

$$\underline{p}_{\Delta S}^{-1}=\underline{F}\ \underline{C}\ \underline{T}\ (\underline{I}-\underline{J})\ \underline{p}_{S}^{-1}\ (\underline{I}-\underline{J})^{T}\underline{T}^{T}\underline{C}^{T}\underline{F}^{T} \tag{28}$$

其中

$\underline{f}$为由矩阵$\underline{F}$去掉与原点有关的列而得。

应当指出，上述关于联合平差的基本原理，在三维直坐标系或大地坐标系统中同样也是适用的。

3 关于归算面高程的变化对高斯平面坐标的影响问题

在区域性的平面控制网中，为了实用上的方便，往往不仅采用独立的平面坐标系统，而且有时还采用与地区配合比较适宜的水准面作为高程的起算面和观测成果的归算面。这样，在卫星网与地面网联合平差时，必须顾及归算面高程的变化对地面观测成果和地面网高斯平面坐标的影响。

假设上述归算面高程的变化为ΔH，而由此对距离D归算值的影响为δD，则根据已知距离归算公式[7]近似可得：

$$\delta D=-\frac{\Delta H}{N}D \tag{29}$$

另外，若以δT表示照准点高程变化对观测方向归算值的影响，则按已知归算公式可得：

$$\delta T=\frac{e^{2}}{2N}\cos^{2}B\sin 2A\Delta H \tag{30}$$

其中，e为椭球第一偏心率，A为归算方向的大地方位角。

由此可得上述高程变化对高斯平面坐标差的影响为：

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta x_{ij} \\ \delta\Delta y_{ij} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta x_{ij} & -\Delta y_{ij} \\ \Delta y_{ij} & \Delta x_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta D/D \\ \delta T \end{pmatrix} \tag{31}$$

若将式（29）、（30）代入上式，并考虑到式：

$$\sin 2A\approx 2\frac{\Delta x_{ij}\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}^{2}+\Delta y_{ij}^{2}}$$

便得归算面高程变化对平面坐标差的影响如下：

$$\delta\Delta x_{ij}=-\frac{\Delta H}{N}[1+\frac{\Delta y_{ij}^{2}}{\Delta x_{ij}^{2}+\Delta y_{ij}^{2}}e^{2}\cos^{2}B]\Delta x_{ij} \tag{32}$$

$$\delta\Delta y_{ij}=-\frac{\Delta H}{N}[1+\frac{\Delta x^{2}_{ij}}{\Delta x_{ij}^{2}+\Delta y_{ij}}e^{2}\cos^{2}B]\Delta y_{ij} \tag{32}$$

如果略去e^{2}项，上式便可简化为：

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta x_{ij} \\ \delta\Delta y_{ij} \end{pmatrix} = -\frac{\Delta H}{N}\begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{pmatrix} \tag{33}$$

数字分析表明，上式由于略去e^2而产生的模型误差，在$\Delta H=500\text{m}, D\leqslant 20\text{km}$时，将不会超过3mm。

在联合平差时，为了考虑上述归算面高程变化的影响有以下两种方法。

其一，根据已知的高程差值 ΔH，应用式（32）或（33）将卫星网（或地面网）的平面坐标加以改正，以将两网的归算面高程系统化为统一。

其二，是在两网的转换模型中引入一附加项，来描述由于归算面高程变化而产生的影响。

由式（33）可见，归算面高程变化对高斯平面坐标的影响，其实质可归结为网的尺度变化的影响。式中 $\Delta H/N$即为表达这种影响的尺度因子的变化，当忽略二次微小量时，其定义与式（20）中的m 相同。因此在联合平差时，可以在转换模型的有关尺度因子的系数中按式（33）引入一附加项，以顾及归算面高程变化而产生的影响。

这样一来，通过联合平差所确定的尺度因子，显然将反映两网之间的尺度变化以及由于地面网归算面高程变化而产生的共同影响。

参 考 文 献

〔1〕 Thomson D B, Krakiwsky E J. Concepts of geodetic Networks. DMA editor Vol2, 1976

〔2〕周忠谟．地面网与卫星网之间转换的数字模型．测绘出版社，1984

〔3〕朱华统．大地坐标系的建立．测绘出版社，1986

〔4〕陶本藻．自由网平差与变形分析．测绘出版社，1984

〔5〕周忠谟　晁定波．GPS 空间基线向量网与地面控制网的联合平差模型．武汉测绘科技大学学报，1987（2）

〔6〕围忠谟　晁定波　刘乃岑．卫星网与地面网在高斯平面坐标系统中的转换模型．武汉测绘科技大学学报，1989

〔7〕陈健　晁定波．椭球大地测量学．测绘出版社，1989

On The Combined Adjustment of Terrestrial and Satellite Networks in Gauss Plane Coordinate System

Zhou Zhongmo　Chao Dingbo

Abstract

This paper discusses the theory and method for applying results of high accuracy positioning by Satellite observations to Gauss plane Coordinate system, and gives a proper model for the combined adjustment of terrestrial and satellite networks in the system. The influence of hight varying in the reduction surface of terrestrial network in the model is considered.

[Key Words] Satellite network, terrestrial network, Gauss plane coordinete system, combined adjustment