

数字图象象质的评定*

金 光 磊

摘要

本文根据信息论的原理, 对数字图象中所包含的目标和白噪声进行了分析。利用目标的空间相关性, 提出了一种估算目标的信息量和白噪声的熵的方法。该方法在变焦图象的象质评定和卫星图象除去噪声方面取得了良好的应用效果。

【关键词】 数字图象, 白噪声, 熵

1 问题的提出

图象的象质一般包括几何特征和构象特性两个方面。几何特性是指图象经传输和处理之后与原景的相似程度。构象特性是指人或机器从图象中可获取信息的多少。本文主要针对构象特性进行讨论。

对于同一幅图象, 不同的使用对象所接收的信息可能不同, 但一幅图象所包容的信息量总是有限的。根据香农 (Shannon) 信息论, 一幅实际图象所携带的总信息量可由下式给出:

$$I = -n \sum_{i=1}^N P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (1)$$

式中, n 为图象的总象素数, N 为不同灰度值 x_i 的个数, x_i 为第 i 个灰度值, $P(x_i)$ 表示灰度为 x_i 的象素在图象中出现的频率。

在数字图象中, 不可避免地会出现一些杂乱无章的噪声。它们一般是由大气效应 (对卫星图象而言)、传感器的光电热噪声、传输和处理时的随机干扰 (量化噪声) 等引起, 都属于白噪声的范畴。数字图象中白噪声的存在不仅不能提供任何有用的信息, 而且它占用了有限的图象存贮空间和传输通道, 浪费了宝贵的机器处理时间。图象预处理中的滤波技术就是为了消除或削减这些白噪声。而香农公式计算出的总信息量 I 是该图象中目标和白噪声的总和, 其中仅有与目标有关的一部分是有意义的。因此, 一幅图象中白噪声的含量也是图象象质的一项十分重要的指标。

收稿日期: 1990-01-09

* 国家自然科学基金资助项目。

2 图象的空间相关性

数字图象中的目标一般是指在空间上按一定规律聚集在一起的具有某些相似特性的象素的集合。因此，图象中的目标是空间相关的。其相关性由目标的结构、组成、分布等因素所决定，是目标所固有的特性，数字图象只是这些特性的反映。如卫星图象中的水域、道路等地物，就是由一些灰度相等或相近的象素按一定的图形排列而成的。

图象中的白噪声属于一种叠加性噪声，它具有以下特性：

- (1) 在整个图象域中均匀地随机分布；
- (2) 瞬时值服从高斯(正态)分布(统计特征)；
- (3) 自相关函数具有 δ 函数的形状。

当然，图象中某些目标的纹理特征也有类似于白噪声的特征(统计特征，自相关特征)。如草地、云块的纹理特征。但它们属于一种目标纹理，而不能当作随机噪声。因为它们是区域性的，确切地反映了一个具有该纹理特征的目标。因此，白噪声特性中的(1)是至关重要的，它是区别图象噪声和具有噪声纹理的目标的出发点。

为了定量分析图象的相关性，我们先给出图象的数学描述。

设一幅 $m \times n$ 的数字图象 $\varphi(x, y)$ 由目标信号 $S(x, y)$ 和白噪声 $N(x, y)$ 构成。由于白噪声的叠加性，故有：

$$\varphi(x, y) = S(x, y) + N(x, y), \quad x \in [1, m], \quad y \in [1, n] \quad (2)$$

根据香农公式，此图象每个象素的平均信息量(以下简称信息量)为：

$$H = - \sum_{k=0}^{255} P_k \log_2 P_k \quad (3)$$

式中 P_k 为灰度等于 k 的象素在该图象中出现的频率。由于一般的数字图象每个象素都是8比特的，其灰度值的范围是 $[0, 255]$ ，所以式中 k 的取值范围直接写成 $[0, 255]$ 。对于非8比特的数字图象，只需重新选定 k 的取值范围，式(3)的形式仍适用。

为考察该图象的空间相关性，需构造一对比较序列 X, Y 。

设 X 由原图象 $\varphi(x, y)$ 除去最后一列构成：

$$X = \varphi(x, y), \quad x \in [1, m-1], \quad y \in [1, n] \quad (4)$$

Y 由原图象 $\varphi(x, y)$ 除去第一列构成：

$$Y = \varphi(x, y), \quad x \in [2, m], \quad y \in [1, n] \quad (5)$$

对 X, Y 按同样的行列顺序编号，则其中序号相同的对应点正好是原图象中左右相邻的一对点。而且 X, Y 序列的长度均为 $(m-1)n$ 。

根据香农信息论，可以估算 X, Y 之间的条件信息量：

$$H(X/Y) = - \sum_{i=0}^{255} \sum_{j=0}^{255} P_{i,j} \log_2 P_{i,j} \quad (6)$$

式中 $P_{i,j}$ 表示 X 序列中灰度值为 i 的象素与 Y 序列中灰度值为 j 的象素构成的点对的联合概率， $P_{i,j}$ 表示其条件概率。

信息论指出： X, Y 的相关性越强， $H(X/Y)$ 越小。 X, Y 完全相关时， $H(X/Y) = 0$ 为最小。 X, Y 完全无关时， $H(X/Y) = H(X)$ 为最大。因此，(6)式的 $H(X/Y)$ 恰好体现了原图象的左右相关性。

由于图象中目标特性的关系，其左右相关性和上下相关性可能有较大的差异。为综合评价图象的相关性，对上述X, Y序列加以扩展（仍称为X, Y序列）：

X, Y序列的第一部分同前。X的第二部分由原图象除去最后一行构成。Y的第二部分由原图象除去第一行构成。此时，X, Y序列的长度均扩展至： $(m-1)n+m(n-1)=2mn-m-n$ 。H(X/Y)则表现了原图象的上下，左右综合相关性。

由于X, Y序列都是原图象去掉一行和一列所构成的，所以当原图象的行列数均较大时，可近似认为X, Y序列都是原图象的再现。故有：

$$H(X)=H(Y)=H \quad (7)$$

式中H为原图象的信息量。

考虑到计算H(X, Y)比计算H(X/Y)更方便。故可先求H(X, Y)：

$$H(X, Y) = - \sum_{i=0}^{255} \sum_{j=0}^{255} P_{ij} \log P_{ij} \quad (8)$$

然后，H(X/Y)由下式导出：

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(X) = H(X, Y) - H \quad (9)$$

显然，由于白噪声的空间不相关性（自相关特性）和目标所固有的相关性。白噪声的熵全部蕴涵于H(X/Y)之中，而目标信息量由H(X/Y)的一部分（不相关部分）和H(X) - H(X/Y)（相关部分）叠加而成。因此，当图象所受白噪声干扰增强时，目标的固有相关性在图象中的反映被削弱，即，H(X) - H(X/Y)减少；同时白噪声增加，至使H(X/Y)中的白噪声分量增大，故H(X/Y)增大。当白噪声一定时，由于焦距变化或象素的空间分解力等引起的目标模糊，使其空间相关性变大，H(X) - H(X/Y)的值增大；而目标的独立信息量（不相关部分）将减少，H(X/Y)的值减少。此特性可用于对同一目标域的不同噪声干扰度和目标清晰度进行比较性测试。

按照上述原则对一组变焦图象进行实测。该组图象共6幅，每幅大小为256×256象素。由于焦距的连续变化，目标由不清晰——清晰——不清晰，有一系列微弱的变化，人眼很难分辨其清晰度的变化。测试结果见表1。表中N为图象的序号，其焦距变化是单调的。df为相邻两幅图象的焦距差。H(X)为该图象的信息量，H(X/Y)为其独立（不相关）信息量，H(X) - H(X/Y)为其相关信息量，S/N为相关信息量(H(X) - H(X/Y))与独立信息量(H(X/Y))的比值。

表 1

N	df μm	H(x) bit	H(x/y) bit	H(x) - H(x/y) bit	S/N
1	10	7.1068	5.0694	2.0374	0.4019
2	10	7.1131	5.0780	2.0351	0.4008
3	10	7.1144	5.0804	2.0340	0.4004
4	10	7.1013	5.0796	2.0217	0.3980
5	10	7.1014	5.0640	2.0374	0.4023
6	10	7.1015	5.0586	2.0429	0.4038

从表1中可以看出, 第4幅图象的S/N最小, 即图象最清晰。这是因为, 在相同的环境下获取的一组图象所受的白噪声干扰基本上是不变的。当目标变清晰时, 目标的细节表现得更充分, 变化更丰富, 目标的相关性减弱, 故而相关部分与不相关部分的比值S/N减小。

3 白噪声熵的估算和削减

前面分析了一幅图象的信息量H(X)的组成, 其中H(X/Y)既包含了白噪声的熵, 又包含了一部分目标的不相关信息量, 那么一幅图象中白噪声的熵到底有多少呢? 能否把其中的白噪声分离出来呢?

比特分割技术指出: 图象的低比特层往往由杂乱无章的噪声构成, 如bit0, bit1。从中无法分辨出任何有意义的目标, 可作为噪声, 整体切除之。

以bit0的比特分割图象为例, 该图象实际上是由原图象进行模2操作导出的:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y) &= \text{mod}(\varphi(x, y), 2) = \text{mod}(S(x, y) + N(x, y), 2) \\ &= \text{mod}(\text{mod}(S(x, y), 2) + \text{mod}(N(x, y), 2), 2)\end{aligned}\quad (10)$$

由于bit0的图象为噪声图象, 所以可以认为 $\text{mod}(S(x, y), 2)$ 淹没于 $\text{mod}(N(x, y), 2)$ 之中, 故有:

$$\varphi_2(x, y) = \text{mod}(N(x, y), 2) \quad (11)$$

推而广之, 可在图象上定义如下操作:

给定一个整数T, $T \geq 2$ 。对于一般的8bit图象, $T \leq 255$ 。

$$\begin{aligned}\varphi_T(x, y) &= \text{mod}(\varphi(x, y), T) \\ &= \text{mod}(\text{mod}(S(x, y), T) + \text{mod}(N(x, y), T), T)\end{aligned}\quad (12)$$

由白噪声的分布特性知, 当T较小时, φ_T 中 $\text{mod}(S(x, y), T)$ 的含量较小, 而 $\text{mod}(N(x, y), T)$ 的含量较大; 当T变大时, $\text{mod}(S(x, y), T)$ 在 φ_T 中的含量逐渐增大。因此, 对于较小的T, $\varphi_T(x, y)$ 中的噪声含量很大, 可分辨的目标很少; T增大时, 可分辨的目标逐渐变多。

为分析白噪声 $N(x, y)$ 的熵随T变化的特性, 设 $\varphi(x, y) = N(x, y)$, 即一幅纯白噪声图象。

白噪声 $N(x, y)$ 的瞬时值的分布函数 $f(x)$ 为高斯(正态)函数:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

由于高斯函数的特性, 其分布区域可近似认为是 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 。在实际的8比特图象中, 由于图象中目标分量的叠加作用, 图象的灰度值(包括噪声分量)的分布区域为 $[0, 255]$ 。由于这里是抽象地考察白噪声的特性, 故仍认为其分布域为 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 。

白噪声 $N(x, y)$ 经过模T操作之后, 其分布函数变为:

$$F(x) = u(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + KT) \quad (14)$$

式中K为任意整数, $u(x)$ 为 $[-T/2, T/2]$ 上的单位函数:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (15)$$

此时, $\varphi_T(x, y) = \text{mod}(N(x, y), T)$ 的熵为

$$\begin{aligned} H(\varphi_T) &= - \int_{-T/2}^{T/2} F(x) \log_2 F(x) dx \\ &= - \int_{-T/2}^{T/2} (u(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) \cdot \log_2 (u(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) dx \\ &= - \int_{-T/2}^{T/2} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) \log_2 (\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) dx \end{aligned}$$

显然, $H(\varphi_T)$ 是 T 和 σ 的函数, 故上式改记为:

$$\begin{aligned} H(T, \sigma) &= - \int_{-T/2}^{T/2} F(x) \log_2 F(x) dx \\ &= - \int_{-T/2}^{T/2} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) \log_2 (\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT)) dx \end{aligned} \quad (17)$$

当 $T \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{T \rightarrow 0} (f(x+KT) - f(T/2+KT)) = 0 \quad (18)$$

式中 K 为任意整数, $x \in [-T/2, T/2]$ 。因此, $F(x)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上为常数。由概率分布函数积分为 1 的特性知:

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(x) = \begin{cases} 1/T, & x \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (19)$$

故此时 $\varphi_T(x, y)$ 的熵为:

$$\lim_{T \rightarrow 0} H(T, \sigma) = - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \log_2 \frac{1}{T} dx = \log_2 T \quad (20)$$

实际上, 当 T 足够小时, 由于 $f(-T/2+KT)$ 与 $f(T/2+KT)$ 足够靠近, 所以在 $[-T/2, T/2]$ 上 $f(x+KT)$ 可用一条直线逼近之:

$$\begin{aligned} f(x+KT) &= T(f(T/2+KT) - f(-T/2+KT))(x - T/2 - KT) \\ &\quad + f(T/2+KT) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{当 } K = 0 \text{ 时, } f(x) = f(T/2) \quad (22)$$

设 N 为正整数,

$$f(x+NT) + f(x-NT) = f(T/2+NT) + f(-T/2+NT) \quad (23)$$

故有:

$$\begin{aligned} F(x) &= u(x) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+KT) \right) \\ &= u(x) \cdot \left(f(x) + \sum_{N=1}^{\infty} (f(x+NT) + f(x-NT)) \right) \\ &= u(x) \cdot \left(f(T/2) + \sum_{N=1}^{\infty} (f(T/2+NT) + f(-T/2+NT)) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

即 $F(x)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上为常数 $(1/T)$ 。则 $H(T, \sigma) = \log_2 T$ 。

因为 $\varphi_T(x, y)$ 的熵的上界为 $\log_2 T$, 所以此时 $\varphi_T(x, y)$ 全部被白噪声所占有, 不可能有任何目标信息表现出来。也就是说, 当 T 足够小 (实际并不很小) 时, $\varphi_T(x, y)$ 一定被白噪

声所充满。这使我们有可能选取一个适当的 T ，当 φ_T 的绝大部分为白噪声时，把它作为纯噪声切除，几乎不会损失任何的目标信息。

当 $T \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(x) = f(x) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} H(T, \sigma) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\ &= \log_2(\sqrt{2\pi e} \sigma) \end{aligned} \quad (26)$$

实际上，当 $T \geq 6\sigma$ 时，由高斯函数的性质知：

$$F(x) \approx f(x), \quad x \in [-T/2, T/2] \quad (27)$$

因此，当 $T \geq 6\sigma$ 时，即有：

$$H(T, \sigma) \approx \lim_{T \rightarrow \infty} H(T, \sigma) \approx \log_2(\sqrt{2\pi e} \sigma) \quad (28)$$

它表明白噪声的熵是有上界的。当 $T \geq 6\sigma$ (实际并不很大) 时，白噪声的熵已接近其上界 $\log_2(\sqrt{2\pi e} \sigma)$ ，其基本成为定值。

以上是对纯白噪声图象的分析，对于实际的数字图象，则有：

当 T 足够小时， φ_T 中绝大部分为白噪声所占据，其相关信息量很小，一般可以 $H(X/Y)/H(X) \geq 99\%$ 为评估标准。记此时的信息量 $H(X)$ 为 $H_{T_0}(X)$ 。

当 T 足够大时，由于图象的信息量和条件信息量是有界的，所以 $H(X)$ 和 $H(X/Y)$ 将趋于稳定。记此时的信息量和条件信息量为 $H_{\max}(X)$ ， $H_{\max}(X/Y)$ 。

于是有以下结论：

① 原图象 φ 中的白噪声熵界于 $H_{T_0}(X)$ 和 $H_{\max}(X/Y)$ 之间。即，白噪声的熵至少为 $H_{T_0}(X)$ ，而目标信息量至少为 $H_{\max}(X) - H_{\max}(X/Y)$ 。

② 理论上， φ_{T_0} 为纯噪声，直接截去不会丢失任何目标信息。但由于截尾后将引入新的量化噪声，为使新的量化噪声不至引起目标信息的过多损失，一般仅可截去 $\varphi_{T_0/2}$ 。也即，图象中 1bit 的量化噪声应该保留。

③ $H_{T_0}(x)$ 在很大程度上反映了图象的象质。 $H_{T_0}(x)$ 越大，原图象中的白噪声越多，对存储空间，传输通道，运算时间的浪费越大。

根据以上分析，对一幅武汉地区的 TM 卫星数字图象作了此项测试。该图象为 TM 卫星的第一波段传感器所获得，幅面为 500×500 象素。图 1 给出了当 T 增大时， $\varphi_T(x, y)$ 的一系列信息量参数的变化关系。其中包括：信息量 $H(x)$ ，相邻象素的独立（不相关）信息量 $H(X/Y)$ ，相邻象素的相关信息量 $H(X) - H(X/Y)$ ， φ_T 的熵的上界 $\log_2(T)$ ，以及 $\log_2(T) - H(X)$ ， $\log_2(T) - H(X/Y)$ 。

从图中可以看出，当 $T \in [2, 6]$ 时， $\log_2(T)$ ， $H(X)$ ， $H(X/Y)$ 几乎同步增长。它表明 φ_T 的熵 $H(X)$ 接近于其上限 $\log_2(T)$ ，而且 $H(X)$ 的绝大部分为 $H(X/Y)$ （大于 99%），相关信息量 $H(X) - H(X/Y)$ 很小（小于 1%，即其中可能包含的目标信息少于 1%）。也就是说， φ_T 中几乎没有目标出现，主要由噪声构成。因此，可以判定原图象 φ 中的白噪声熵至少为

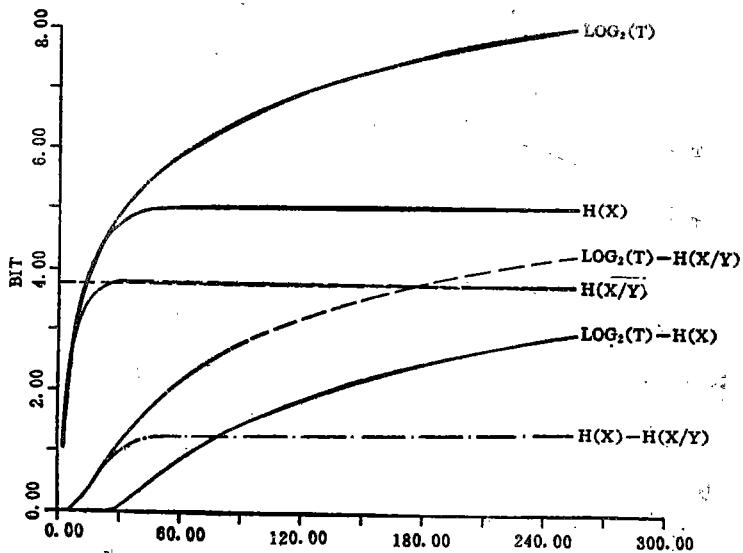


图 1 φ_T 的信息量参数与 T 的关系

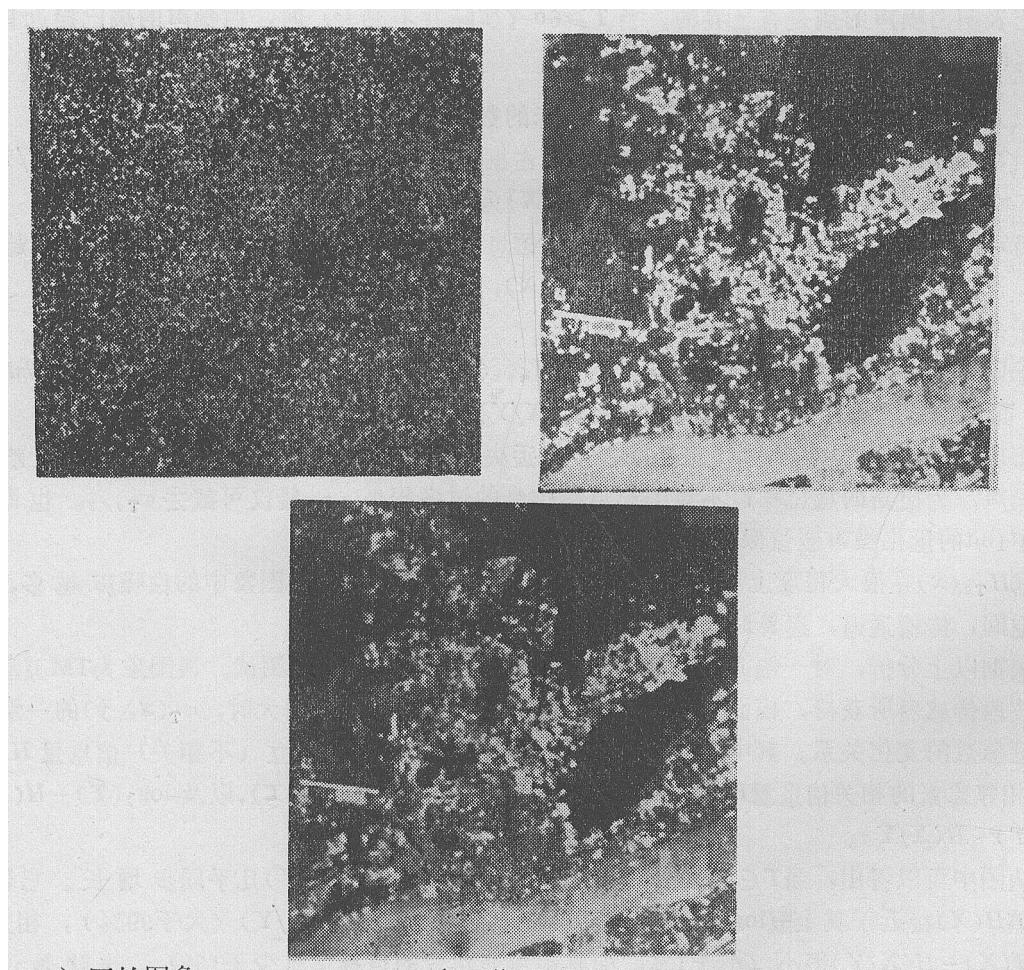


图 2 数字图象去噪声

$H(\varphi_0) = 2.584$ 比特。

当 $T \in [7, 60]$ 时, $H(X/Y)$ 的增长大大低于 $\log_2(T)$ 和 $H(X)$ 。这说明 $H(X/Y)$ 的主要成分白噪声的熵随 T 的增长明显趋缓。此时, 相关信息量 $H(X) - H(X/Y)$ 利用剩余的熵空间开始迅速增长。即目标开始在 φ_0 中表现出来。

当 $T \in [61, 255]$ 时, $H(X)$, $H(X/Y)$ 均趋向水平。即 φ_0 中的白噪声和目标都不再增长了。由于白噪声的熵全部蕴涵于 $H(X/Y)$ 之中, 所以可以判定: 原图象 φ 中的白噪声的熵不超过 ($T = 255$ 时) 3.745 比特。同时得出一个附带的结论: 原图象 φ 的灰度值主要分布在宽度为 60 的区间上。

从理论上讲, φ_0 中几乎不包含目标信息, 所以从 φ 中直接去掉 φ_0 将不会有目标信息的损失。也可以认为此时的 T 是无损截尾的上限。但是, 由于截尾后会产生新的量化误差, 为使新的量化误差不至引起对目标的过强干扰, 实际上仅能截去 φ_0 。原始图象 φ 截去 φ_0 的生成图象 φ' 为:

$$\varphi'(x, y) = [\varphi(x, y)]_T \quad (29)$$

图 2 给出了本例中的原终图象 φ , 截尾 φ_0 , 生成图象 φ' 。可以看出 φ_0 中几乎没有任何目标, 而 φ' 与 φ 基本相同。

表 2

	$H(x)$ bit	$H(x/y)$ bit	$H(x) - H(x/y)$ bit	S/N
φ	5.0443	3.7453	1.2989	0.3468
φ_0	1.5849	1.5847	0.0002	0.0002
φ'	3.4720	2.2865	1.1855	0.5185
φ'/φ	68.83%	61.05%	91.27%	149.50%

表 2 给出了以上三幅图象的信息量参数。可以看出截去噪声后, 图象的信息量 $H(X)$ 减少了 31.17%; 独立 (不相关) 信息量 $H(X/Y)$ 减少了 38.95%, 主要是因为白噪声部分的大量削减 (1.58 比特); 相关信息量 $H(X) - H(X/Y)$ 减少了 8.73%, 主要是新的量化噪声引入的干扰。所以去噪声的作用是十分显著的。

4 结 论

(1) 为评定图象的象质, 以计算该图象的信息量 $H(X)$ 和图象中相邻象素的条件信息量 $H(X/Y)$ (相关性)。

当图象中的白噪声干扰增大时, 目标的固有相关性在图象中的反映减弱, $H(X) - H(X/Y)$ 减少。同时白噪声的熵的增加重使 $H(X/Y)$ 增大。

当图象所受白噪声干扰一定时, 图象中的目标越模糊 (如: 焦距的变化所引起), 其空间相关性越大, $H(X) - H(X/Y)$ 越大。而目标的细节减少, 不相关信息量减少, 使得 $H(X/Y)$ 减少。

(2) 实际的数字图象中一般都有白噪声。为削减这些白噪声,首先选择一个适当的T对原图象作模T操作,得到导出图象 φ_T ,并计算其信息量 $H_T(X)$ 和相邻象素的条件信息量 $H_T(X/Y)$ 。以 $H_T(X/Y)/H_T(X) \geq 99\%$ 为阈值,使T足够大,并记之为 T_0 。此时,对原图象作除以 $T_0/2$ 的操作(即截去 $\varphi T_0/2$),可以削去原图象中的主要白噪声,而不会影响原图象中的目标信息。

参 考 文 献

- [1] 宣家斌, S A Hempenius. 航摄底片信息容量的确定。武汉测绘科技大学学报, 1986(4)。

Evaluating the Quality of a Digital Image

Jin Guanglei

Abstract

This paper applies information theory to analyze the objects and white noise on a digital image. Based on the spatial correlation of objects, a method is developed for estimating information content of objects and entropy of white noise. The method is used to appraise a group of different focus images and remove noise from satellitic image, which shows a good application efficiency.

【Key words】 digital image; white noise; entropy