第16卷 第2期 武汉测绘科技大学学报 Vol.16 No.2
1991年 6月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Jun. 1991

顾及精度与可靠性的测量*控制网优化设计

李德仁 周勇前

摘 要

本文从两个准则矩阵——精度准则矩阵与可靠性准则矩阵出发，导出了一种新的测量控制网优化设计方法。利用它不仅能实现同时顾及精度与可靠性的二类优化设计，还可进行以准则矩阵为基础的一类优化设计。另外，这种方法可将一类、二类设计问题同时解决，从而为测量控制网的混合设计开辟了新路。

【关键词】 优化设计；测量控制网；精度准则矩阵；可靠性准则矩阵

1 引 言

长期以来，测量控制网的优化设计一直是测量学者感兴趣的研究课题。到目前，这些理论研究和实践经验已形成了一套经典的优化设计理论和方法[1]。经典的优化设计方法主要以精度准则作为优化目标。随着对系统可靠性问题的深入研究，目前已有一些学者开始在控制网的优化设计中提出可靠性标准[6]。然而所提出的标准仅仅局限于在二类优化设计中顾及系统的内、外部可靠性。一方面，相对于系统整体的可靠性而言，它不够完善；另一方面，它没有顾及到影响系统可靠性的另一个因素，即一类设计矩阵的结构。文献〔2〕所提出的可靠性准则矩阵不仅包含有系统的内、外部可靠性，而且有粗差的可区分性，因此是一种较完善的可靠性准则。本文从两个准则矩阵——精度准则矩阵与可靠性准则矩阵出发，导出了一种同时顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计方法。

另外，经典的优化设计理论被人为地分成四类，自成体系。实际上，要设计出一个高质量的控制网，不仅要有一个完善的观测纲要，还要有一个好的图形。因此有必要将图形设计（一类设计）与观测纲要设计（二类设计）结合起来，实现一、二类混合设计。本文导出的优化设计方法可将一类、二类设计问题融为一体，从而为测量控制网的混合设计开辟了新路。

收稿日期：1990—06—23
*本研究项目得到国家自然科学基金资助。

2 高斯一馬尔可夫模型及其解

线性的高斯—马尔可夫模型

$$E(l)=A\tilde{X},\ D(l)=\sigma_0{}^2Q_{ll}=\sigma_0{}^2P^{-1} \tag{1}$$

通过矩阵分解

$$P=G^{\mathrm{T}}\cdot G$$

及矩阵变换

$$\left.\begin{aligned}\overline{A}&=G\cdot A\\ \overline{l}&=G\cdot l\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

可变成

$$E(\overline{l})=\overline{A}\tilde{X},\ D(\overline{l})=\sigma_0{}^2\cdot I,\ P_{\overline{l}\,\overline{l}}=I \tag{4}$$

其中，G是一个可逆的上三角矩阵。

很显然，模型（1）与模型（4）是等价的。模型（4）的最小二乘解为：

$$\hat{X}=(\overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{A})^{-1}\overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{l} \tag{5}$$

及

$$Q_{\hat{X}\hat{X}}=(\overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{A})^{-1},\ D_{\hat{X}\hat{X}}=\sigma_0{}^2Q_{\hat{X}\hat{X}} \tag{6}$$

$$Q_{\overline{V}\,\overline{V}}=I-\overline{A}\,Q_{\hat{X}\hat{X}}\overline{A}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

此处，$Q_{\hat{X}\hat{X}}$为未知参数估值的协因数阵，$Q_{\overline{V}\,\overline{V}}$为残差$\overline{V}$的协因数阵。

3 精度准则矩阵和可靠性准则矩阵

协因数阵 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$描述了未知参数的精度特征。根据对控制网的精度要求建立$Q_{\hat{X}\hat{X}}$矩阵，则得到精度准则矩阵（在以下讨论中用C_A表示）。如何设定精度准则矩阵已有很多文献讨论过，本文倾向于选择具有T—K结构的精度准则矩阵。

残差$\overline{V}$的协因数阵$Q_{\overline{V}\,\overline{V}}$是一个半正定的对称幂等阵，其迹等于它的秩，也等于多余观测数，即

$$\mathrm{tr}(Q_{\overline{V}\,\overline{V}})=\mathrm{rg}(Q_{\overline{V}\,\overline{V}})=n-u=\mathrm{r} \tag{8}$$

该矩阵的对角线元素

$$\mathrm{r}_i=(Q_{\overline{V}\,\overline{V}})_{ii} \tag{9}$$

直接反映了系统的内、外部可靠性；非对角线元素 $Q_{\overline{V}_i\overline{V}_j}$ 反映了观测值$\overline{l}_i$，$\overline{l}_j$间粗差的可区分性，因此矩阵 $Q_{\overline{V}\,\overline{V}}$被称为可靠性矩阵 [2]。若矩阵 $Q_{\overline{V}\,\overline{V}}$具有较好的可靠性性质，则可作为可靠性准则矩阵（在以下讨论中用C_R表示）。

可靠性准则矩阵是一个较特殊的矩阵，要设定一个可靠性准则矩阵必需满足：

（1）该矩阵是一个半正定的对称幂等阵；

（2）该矩阵具有较好的可靠性性质，即

a₁、该矩阵中各对角线元素 r_i 相等，或

$$\sum\left[r_i-\frac{r}{n}\right]^2 \rightarrow \text{MIN}，且 r_i > r_{限}；$$

b₁、$\rho_{ij} \leqslant 75‰$（粗差可区分性大于95%）。

因此完全利用数学手段构造可靠性准则矩阵是困难的。

但是我们可以从一个初始的 $Q^0_{\bar{V}\bar{V}}$ 矩阵出发，采用适当的方法修改 $Q^0_{\bar{V}\bar{V}}$ 矩阵中的元素，使得它具有较好的可靠性性质，但同时又保证它是一个半正定的对称幂等阵。作者已在另一篇文章中详细讨论了这个问题，此处从略。

4 顾及精度与可靠性的优化设计方法

所谓顾及精度与可靠性的优化设计，就是根据给定的精度准则矩阵 C_A 及可靠性准则矩阵 C_R 求解一类和二类设计矩阵A和P。其解法如下：

第一步：将精度准则矩阵C_A按乔里斯基分解法分解：

$$C_A = L^T \cdot L \tag{10}$$

式中，L为上三角形矩阵，且$\text{rg}(L)=u$。

第二步：对称半正定的幂等矩阵（$I—C_R$）按奇异值分解法分解：

$$(I-C_R)=\underset{n\times u}{D} \cdot \underset{u\times n}{D^T} \tag{11}$$

式中，$\text{rg}(D)=\text{rg}(I-C_R)=u$，且

$$D^T \cdot D = \underset{u\times u}{I} \tag{12}$$

第三步：计算变换之后的一类设计矩阵$\overline{A}$。

根据矩阵正交三角分解的理论，可以证明矩阵$\overline{A}$可由上述分解结果计算得到[2]，即：

$$\overline{A} = D \cdot (L^{-1})^T$$

第四步：计算一类设计矩阵A（即一类设计）。

根据式（13）及式（3），可以得到

$$A = G^{-1} \cdot \overline{A} = G^{-1} \cdot D(L^{-1})^T \tag{14}$$

式中，矩阵G是由矩阵P分解而来，即：

$$P = G^T \cdot G$$

通常，初始的权矩阵 $P^0 = I$。

第五步：根据客观条件修改矩阵A。

有时候，由式（14）所计算出的矩阵A在生产中无法实现，因此我们必须根据客观条件修正它，然后得到一个修正后的一类设计矩阵A，即：

$$A + \Delta A \Longrightarrow A$$

第六步：计算权矩阵P（即二类设计）。

根据式（2）、式（3），可以得到：

$$\overline{A}^{T}\overline{A}=A^{T}G^{T}GA=A^{T}PA \tag{15}$$

令　$N=\overline{A}^{T}\overline{A}$，代入式（15）中得到

$$A^{T}PA=N \tag{16}$$

式中，矩阵N可由第三步中计算出的$\overline{A}$矩阵计算得到。矩阵A是第五步中修正后的一类设计矩阵。因此式（16）实际上是经典的二类优化设计模型，可以利用传统的二类设计方法[1]计算出权矩阵P。

第七步：根据客观条件修改矩阵P。

众所周知，根据准则矩阵的无约束最小二乘逼近法所计算出的权阵P中，可能出现负权，零权或过大的权。这反映出所设计的观测方案无法实现。因此有必要根据实际情况修改权阵P，从而得到修改后的权阵，即：

$$P+\Delta P\Longrightarrow P$$

重复第四步到第七步，直到计算出的矩阵A及P均可实现为止（即$\Delta A=0$，$\Delta P=0$）。此时我们不仅得到了一个良好的网形，而且得到了一个好的观测方案。

5 数　　例

下面用一个平面交会的例子来验证上述方法的正确性。

从六个已知点交会一个待定点B的平面坐标X和Y。观测值为方位角，边长以km为单位。

首先，选择精度准则矩阵C_A与可靠性准则矩阵C_R如下：

$$C_A=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$C_R=\begin{pmatrix}2/3 & -1/6 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & -1/6\\ -1/6 & 2/3 & -1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6\\ 1/6 & -1/6 & 2/3 & -1/6 & 1/6 & 1/3\\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 2/3 & -1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & 2/3 & -1/6\\ -1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & 2/3\end{pmatrix}$$

这意味着待定点B的误差椭圆将是一个圆，未知参数X和Y的方差为：

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_0^2/3$$

各观测值的多余观测分量，内、外部可靠性数值分别为：

$$r_i=r/n=2/3$$

$$\nabla_0\overline{l}_i=5.06\sigma_0$$

$$\overline{\sigma}_{0,i}=2.92$$

由于此时改正数间最大相关系数为

$$|\rho|_{max}=50\%$$

两个相差的可区分性[4]将是

$$(1-r_{ij})\geqslant 99\% \qquad (k_\alpha=3.29,\ \delta_0=4.13)$$

因此平差结果将取得最好的精度与可靠性。

现在我们根据所给定的C_A及C_R来计算矩阵A及P。

第一步：将矩阵C_A按乔里斯基法分解，并得到矩阵$(L^{-1})^T$。

$$C_A=L^T\cdot L=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

分解后可得：

$$L=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\qquad (L^{-1})^T\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

第二步：将矩阵（$I-C_R$）按奇异值分解。

$$(I-C_R)=D\cdot D^T=\begin{pmatrix}1/3 & 1/6 & -1/6 & 1/3 & -1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & -1/3 & -1/6\\ -1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & -1/3\\ 1/3 & -1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6\\ -1/6 & -1/3 & -1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6\\ 1/6 & -1/6 & -1/3 & -1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$$

分解后可得：

$$D=(1/\sqrt{3})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 0 & -1\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix},\ 且D^TD=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

第三步：计算矩阵$\overline{A}$。

根据式（13），利用上述分解结果，可得到

$$\overline{A}=D\cdot(L^{-1})^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 0 & -1\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

第四步：计算一类设计矩阵A^0。

首先，选择一个初始的权矩阵P^0，一般

$$P^0 = I,$$

将其按乔里斯基法分解后可得出矩阵G^0。

$$P^0 = G^{0T} \cdot G^0 = \underset{6\times 6}{I}$$

则

$$G^0 = \underset{6\times 6}{I}$$

由式（14）可求解

$$A^0 = G^{0-1}\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

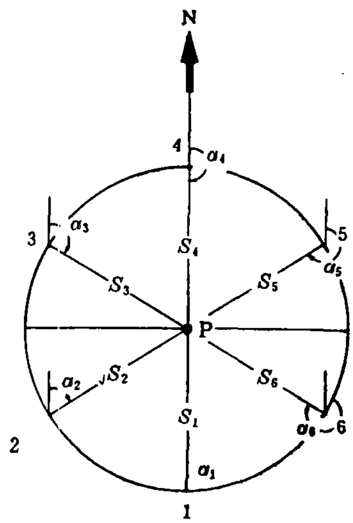

图 1

根据此交会问题误差方程式的系数计算式：

$$\left.\begin{aligned} a_i &= -\sin\alpha_i / s_i \\ b_i &= \cos\alpha_i / s_i \end{aligned}\right\}$$

对照矩阵A^0可得到：

$$s_i = 1\,\text{km}$$

$$\alpha_i = 0°,\ 60°,\ 120°,\ 180°,\ 240°,\ 300°$$

参照图 1 可看出，六个已知点应均匀分布在半径为 1 km长的圆周上，待定点B为圆心。

第五步：修改矩阵A^0。

实际上，矩阵 A^0 所对应的交会图形是很难实现的。特别是六个已知点均匀分布在一个圆周上（即各段距离彼此相等）非常困难。例如，假设某方向上有障碍物（一个池塘或者一棵大树），使得我们不得不延长或缩短这个方向的距离长度。现设各方向的方位角保持不变，距离发生了如下变化：

$$\alpha_i = 0°,\ 60°,\ 120°,\ 180°,\ 240°,\ 300°$$

$$s_i = 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1.5$$

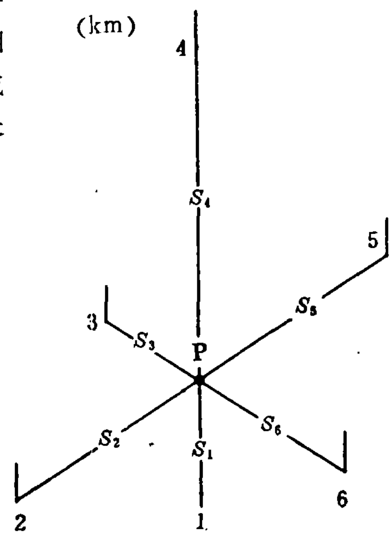

图 2

此时的图形见图 2，修改后的一类设计矩阵

$$A^{①} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & -1/3 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

第六步：计算权矩阵P（二类设计）。

对应于修改后的一类设计矩阵$A^{①}$，如果权矩阵P仍然是一个单位阵，那么平差的结果不会最好。为了得到最好的平差结果，我们必须根据矩阵$A^{①}$设计权矩阵$P^{①}$。

在此数例中，我们仅仅由式（14）便可以计算出矩阵$G^{①}$：

$$G^{①}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 3 & & \\ & 0 & & & 2 & \\ & & & & & 1.5 \end{pmatrix}$$

又根据式（2）就可以得到权矩阵$P^{①}$

$$P^{①}=G^{①T}\cdot G^{①}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 4 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 9 & & \\ & 0 & & & 4 & \\ & & & & & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

如果根据矩阵$A^{①}$与$P^{①}$进行平差计算，结果将同样具有最佳精度与最佳可靠性。因此矩阵$A^{①}$与$P^{①}$是所设计出的最后结果。

6 结　　语

本文提出了一个新的测量控制网的优化设计方法，并且在理论上证明了这种同时顾及精度准则矩阵与可靠性准则矩阵的优化设计是可行的，而且是有利的。如果同时从两个准则矩阵出发，优化设计工作不仅没有复杂化，而且更加简单，特别是一类优化设计的计算更加方便。当然，应用这个方法的前提是必须先构造出两个准则矩阵，这是很重要又是很困难的。为此，因限于篇幅，笔者将在另文中介绍一种构造可靠性准则矩阵的方法，从而使得本文中的优化设计方法确实可行。当然，如何利用这种方法进行实际的测量控制网设计仍然需要进一步的深入研究与探讨。

参 考 文 献

〔1〕Grafarend E and Sanso F. Optimization and Design of Geodetic Networks. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New Tork-Tokyo, 1985.

〔2〕李德仁．顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计的设想．测绘学报，Vol. 18, No. 4, 1989.
〔3〕李德仁．误差处理和可靠性理论．测绘出版社，1988. 6.
〔4〕Förstner W. Reliablity and Discernability of Extended Guass-Markov-Models. DGK, Reihe A, Helf 18, Munchen, 1983.
〔5〕王之卓．摄影测量原理续编．测绘出版社，1986. 7.
〔6〕Müller H. Zur Beiücksichtigung der zurverlässigkeit bei der Gewichtoptimirung Geodätischer Netze, "Zfv", Heft. 4, 1986.

Optimization and Design of Geodetic Networks in Consideration of Accuracy and Reliability

Li Deren   Zhou Yongqian

Abstact

Starting from both of accuracy and reliability criterion matrices, a new method of optimiyation and design of geodetic networks has been derived in this paper. Using this method, we can realize not only the second order design in considerration of accuracy and reliability, but also the first order design based on two criterion matrices. In addition, because this method combines first order and second order design together, if helps us to find a new way for the combined design of geodetic networks.

[Key words] optimization design; geodetic networks; accuracy criterion matrix; reliability criterion matrix