DOI:10.13203/j.whugis1991.02.002

第16卷 第2期 武汉测绘科技大学学报 Vol.16 No.2
1991年 6月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Jun. 1991

Helmert型方差—协方差分量估计的通用公式*

於 宗 俦

摘 要

本文在概括函数模型和它的通用公式的基础上，导出了一个适用于所有平差方法的方差—协方差分量估计的通用公式，并由此给出方差分量估计的通用公式和简化的通用公式。

【关键词】 方差—协方差分量估计；概括函数模型；通用公式

1 引 言

由于当前在数据处理中，经常会遇到不同类型或不同精度的多种观测数据的测量平差问题，如何进行方差、协方差的验后估计已成为国内外测量学者十分关注的课题。

在国内外文献中，已经给出了仅适用于间接平差的 Helmert 型方差—协方差分量估计公式，此外，还分别给出了适用于部分平差方法（如条件平差、间接平差）的 Helmert 型方差分量估计公式以及若干简的化方差分量估计公式（如 Förstmer、Ebner 公式）和近似估计公式（如Helmert和Welsch公式）。本文将以概括函数模型及其通用公式为基础，导出一个适用于各种平差方法的方差—协方差分量估计公式，并由此给出方差分量估计的通用公式和简化的通用公式。

关于概括函数模型及其通用公式详见《测量平差原理》[1]。在下面的公式推导中将直接引用该书中的符号系统，不再作过多的说明。

概括函数模型为

$$\underset{c,n}{A}\ \underset{n,1}{V} + \underset{c,u}{B}\ \underset{u,1}{\hat{x}} - \underset{c,1}{f} = 0 \tag{1a}$$

$$\underset{s,u}{C}\ \underset{u,1}{\hat{x}} - \underset{s,1}{f_x} = 0 \tag{1b}$$

收稿日期：1990－12－10
* 国家自然科学基金资助项目

式中 $$c+s=r+u \tag{2}$$

c和s分别表示（含有观测值的）条件方程个数和限制条件方程个数；r和u分别表示多余观测数和未知参数的个数。

由〔1〕知，在“$V^TPV=\min$”准则下，可得解向量（参见〔1〕(2-4-70)$_c$和(2-4-70)$_d$式）：

$$\underset{u,1}{\hat{x}}=Q_{\hat{x}}B^TN_{aa}^{-1}f+N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}f_x \tag{3a}$$

$$\underset{n,1}{V}=QA^TN_{aa}^{-1}(f-B\hat{x}) \tag{3b}$$

将（3a）代入（3b）得：

$$\begin{aligned}V&=QA^T(N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^TN_{aa}^{-1})f-QA^TN_{aa}^{-1}BN_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}f_x\\&=QA^TQ_kf-QA^TN_{aa}^{-1}BN_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}f_x\end{aligned} \tag{4}$$

在以上各式中（参阅〔1〕表2-4-2）：

$$\underset{c,c}{Q_k}=N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^TN_{aa}^{-1} \tag{5a}$$

$$\underset{u,u}{Q_{\hat{x}}}=N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1} \tag{5b}$$

其中：

$$\underset{c,c}{N_{aa}}=AQA^T,\quad \underset{u,u}{N_{bb}}=B^TN_{aa}^{-1}B,\quad \underset{s,s}{N_{cc}}=CN_{bb}^{-1}C^T \tag{6}$$

应用协方差传播律，并顾及$f_x=-\Phi(x^0)$为非随机量，由（4）式得：

$$D_v=QA^TQ_kD_fQ_kAQ$$

根据V^TPV的期望公式，顾及$E(V)=0$和$AQA^T=N_{aa}$，则有：

$$E(V^TPV)=\mathrm{tr}(PD_v)=\mathrm{tr}(Q_kN_{aa}Q_kD_f) \tag{7}$$

D_f为（1a）式中常数项f的方差阵。由〔1〕的表2-4-2知，$Q_f=N_{aa}$，而

$$D_f=Q_f\sigma_0^2=N_{aa}\sigma_0^2 \tag{8}$$

所以（7）式也可写成

$$E(V^TPV)=\mathrm{tr}(Q_kN_{aa}Q_kN_{aa})\sigma_0^2 \tag{9}$$

σ_0^2为单位权方差。

假设在观测向量L中含有m种不同类型或不同精度的观测向量L_1，L_2，…，L_m，且L_i与L_j（$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，m）彼此相关。为了推导简明起见，只假设L中包含两种不同类型或不同精度的观测向量L_1和L_2，即设

$$\underset{n,1}{L}=\begin{pmatrix}\underset{n_1,1}{L_1}\\ \underset{n_2,1}{L_2}\end{pmatrix},\quad \underset{n,1}{V}=\begin{pmatrix}\underset{n_1,1}{V_1}\\ \underset{n_2,1}{V_2}\end{pmatrix},\quad \underset{c,n}{A}=[\underset{c,n_1}{A_1}\quad \underset{c,n_2}{A_2}] \tag{10}$$

则（1）式可写成

$$\underset{c,n_1}{A_1}\underset{n_1,1}{V_1}+\underset{c,n_2}{A_2}\underset{n_2,1}{V_2}+\underset{c,u}{B}\underset{u,1}{\hat{x}}-\underset{c,1}{f}=0 \tag{11a}$$

$$\underset{s,u}{C}\underset{u,1}{\hat{x}}-\underset{s,1}{f_x}=0 \tag{11b}$$

设已知两类（或不同精度）观测向量的初始协因数阵和权阵为：

$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \qquad P=Q^{-1}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{12}$$

若上述所给定的初始协因数阵（或权阵）的比例恰当，或者说它们将所对应的单位权方差都是σ_0^2，则观测向量 L的相应方差阵应为：

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\sigma_0^2 \tag{13}$$

2 L_1 与L_2 相关时方差—协方差分量估计的通用公式

在实际工作中，初始的协因数阵（或权阵）往往难以精确给定，或者说，各类观测值所对应的单位权方差不相一致，在此情况下，（13）式变成

$$D=\begin{bmatrix} Q_{11}\sigma_{01}^2 & Q_{12}\sigma_{012}^2 \\ Q_{21}\sigma_{012}^2 & Q_{22}\sigma_{02}^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

进行方差一协方差分量估计的目的，就在于如何利用验后信息（如改正数V）来估计 各类观测所对应的方差、协方差，进而重新定权以达到改善平差结果的精度。若令

$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & Q_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{bmatrix}=\widetilde{Q}_1+\widetilde{Q}_2+\widetilde{Q}_3=\sum_{i=1}^{3}\widetilde{Q}_i \tag{15a}$$

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{bmatrix}=\widetilde{P}_1+\widetilde{P}_2+\widetilde{P}_3=\sum_{i=1}^{3}\widetilde{P}_i \tag{15b}$$

$$\sigma^2=[\delta_{0\ 1}^2\ \sigma_{02}^2\ \ \sigma_{012}^2]^T=[\sigma_1^2\ \ \sigma_2^2\ \ \sigma_3^2]^T \tag{15c}$$

则（14）式可以写成

$$D=\widetilde{Q}_1\sigma_1^2+\widetilde{Q}_2\sigma_2^2+\widetilde{Q}_3\sigma_3^2=\sum_{j=1}^{3}\widetilde{Q}_j\sigma_j^2 \tag{16}$$

同时 $$N_{aa}=AQA^T=A\widetilde{Q}_1A^T+A\widetilde{Q}_2A^T+A\widetilde{Q}_3A^T=\sum_{i=1}^{3}A\widetilde{Q}_iA^T \tag{17}$$

顾及（10）式和（15a）式，则上式也可写成：

$$N_{aa}=A_1Q_{11}A_1^T+A_2Q_{22}A_2^T+(A_1Q_{12}A_2^T+A_2Q_{21}A_1^T) \tag{18}$$

现令

$$\left.\begin{aligned} &A\widetilde{Q}_1A^T=A_1Q_{11}A_1^T=N_{a1}, \qquad A\widetilde{Q}_2A^T=A_2Q_{22}A_2^T=N_{a2} \\ &A\widetilde{Q}_3A^T=A_1Q_{12}A_2^T+A_2Q_{21}A_1^T=N_{a3} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

则（8）式和（17）式可以分别写成：

$$D_l=\sum_{j=1}^{3}N_{aj}\sigma_j^2 \quad 和 \quad N_{aa}=\sum_{i=1}^{3}N_{ai} \tag{20}$$

顾及（15b）式又有

$$\begin{aligned} E(V^TPV)&=E(V^T\widetilde{P}_1V)+E(V^T\widetilde{P}_2V)+E(V^T\widetilde{P}_3V) \\ &=\sum_{i=1}^{3}E(V^T\widetilde{P}_iV) \end{aligned} \tag{21}$$

将(20)、(21)式代入（7)式，则有

$$\sum_{i=1}^{3} E(V^T\widetilde{P}_i V = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{tr}(Q_k N_{ai} Q_k N_{aj})\sigma_j^2 \tag{22}$$

将（10）式中的V和（15b）式中的$\widetilde{P}_i$代入上式的左端，有

$$\left.\begin{array}{l} E(V^T\widetilde{P}_1 V)=E(V_1^T P_{11} V_1),\ E(V^T\widetilde{P}_2 V)=E(V_2^T P_{22} V_2) \\ E(V^T\widetilde{P}_3 V)=E(V_1^T P_{12} V_2+V_2^T P_{21} V_1)=2E(V_1^T P_{12} V_2) \end{array}\right\} \tag{23}$$

将（22）式展开，去掉左端的期望符号，并将σ_j^2分别写成其估值$\hat{\sigma}_{01}^2$，$\hat{\sigma}_{02}^2$，$\hat{\sigma}_{012}^2$，即可写出方差、协方差分量估计的通用公式为：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Q_k N_{a1})^2 & \mathrm{tr}(Q_k N_{a1} Q_k N_{a2}) & \mathrm{tr}(Q_k N_{a1} Q_k N_{a3}) \\ & \mathrm{tr}(Q_k N_{a2})^2 & \mathrm{tr}(Q_k N_{a2} Q_k N_{a3}) \\ (\text{对称}) & & \mathrm{tr}(Q_k N_a^3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \\ \hat{\sigma}_{012}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^T P_{11} V_1 \\ V_2^T P_{22} V_2 \\ 2V_1^T P_{12} V_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

上式可以应用于所有的平差方法，不同之处仅仅在于：对于不同的平差方法，在按（5）式计算Q_k(包括$Q_{\hat{x}}$)时，某些系数阵等于“0”或“$-I$”而已。例如：

① 当(1)式中的$C=0$或$B=0$，$C=0$时，即分别相应于附有未知数的条件平差或条件平差的函数模型。由(5)式知，对于附有未知数的条件平差而言($C=0$)：

$$\left.\begin{array}{l} Q_k=N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1} \\ Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1} \end{array}\right\} \tag{25}$$

对于条件平差而言($B=0$，$C=0$)：

$$Q_k=N_{aa}^{-1}\quad(Q_{\hat{x}}=0) \tag{26}$$

② 当(1)式中的$A=-I$或$A=-I$，$C=0$时，即分别相应于附有限制条件的间接平差或间接平差的函数模型。由于$A=-I$，$N_{aa}=AQA^T=Q$，$N_{aa}^{-1}=Q^{-1}=P$，$N_{bb}=B^T N_{aa}^{-1}B=B^T PB$。由（5）式知，对于附有限制条件的间接平差而言：

$$\left.\begin{array}{l} Q_k=P-PBQ_{\hat{x}}B^T P \\ Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}\quad(N_{bb}=B^T PB) \end{array}\right\} \tag{27}$$

对于间接平差而言：

$$\left.\begin{array}{l} Q_k=P-PBQ_{\hat{x}}B^T P \\ Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}=(B^T PB)^{-1} \end{array}\right\} \tag{28}$$

同时（24）式中的$N_{ai}=A\widetilde{Q}_i A^T=\widetilde{Q}_i$（$i=1，2，3$），故（24）式又可简写为：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_1)^2 & \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_1 Q_k\widetilde{Q}_2) & \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_1 Q_k\widetilde{Q}_3) \\ & \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_2)^2 & \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_2 Q_k\widetilde{Q}_3) \\ & & \mathrm{tr}(Q_k\widetilde{Q}_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \\ \hat{\sigma}_{012}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1^T P_{11} V_1 \\ V_2^T P_{22} V_2 \\ 2V_1^T P_{12} V_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

事实上，当$A = -\underset{n,n}{I} = \begin{pmatrix} -\underset{n_1,n_1}{I_1} & 0 \\ 0 & -\underset{n_2,n_2}{I_2} \end{pmatrix}$时，（1）式变成：

$$\left.\begin{aligned} \underset{n_1,1}{V_1} &= B_1 \hat{x} - f_1 \\ \underset{n_2,1}{V_2} &= B_2 \hat{x} - f_2 \\ C\hat{x} - f_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

即
$$\underset{n,u}{B} = \begin{pmatrix} \underset{n_1,u}{B_1} \\ \underset{n_2,u}{B_2} \end{pmatrix},\quad f = \begin{pmatrix} \underset{n_1,1}{f_1} \\ \underset{n_2,1}{f_2} \end{pmatrix},\qquad n_1 + n_2 = n \tag{30b}$$

在此情况下，我们还可以由（9）式导出另一种形式的估计公式。因$N_{aa} = Q$，(9)式变成：

$$E(V^T PV) = \mathrm{tr}(Q_k Q Q_k Q)\sigma_0^2 \tag{31}$$

顾及（27）或（28）式的第一个式子，则有

$$Q_k Q Q_k Q = PQ - 2PBQ_{\hat{x}}B^T + PBQ_{\hat{x}}B^T PB\,Q_{\hat{x}}B^T$$

上式代入（31）式，并按上述类似的推导过程，可以将（31）式写成：

$$\sum_{i=1}^{3} E(V^T \widetilde{P}_i V) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{tr}(\widetilde{P}_i Q - 2Q_{\hat{x}}B^T \widetilde{P}_i B + Q_{\hat{x}} B^T \widetilde{P}_i\, B\, Q_{\hat{x}} \widetilde{P}_j B)\sigma_j^2 \tag{32}$$

顾及（15b）和（30b）式，则有：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{tr}(\widetilde{P}_1 Q) = P_{11}Q_{11},\quad \mathrm{tr}(\widetilde{P}_2 Q) = P_{22}Q_{22},\quad \mathrm{tr}(\widetilde{P}_3 Q) = P_{12}Q_{21} + P_{21}Q_{12} \\ &B^T \widetilde{P}_1 B = B_1^T P_{11} B_1,\quad B^T \widetilde{P}_2 B = B_2^T P_{22} B_2,\quad B^T \widetilde{P}_3 B = B_1^T P_{12} B_2 + B_1^T P_{21} B_1 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

若进一步令：

$$\left.\begin{aligned} &N_{b1} = B^T \widetilde{P}_1 B = B_1^T P_{11} B_1,\quad N_{b2} = B^T \widetilde{P}_2 B = B_2^T P_{22} B_2 \\ &N_{b3} = B^T \widetilde{P}_3 B = B_1^T P_{12} B_2 + B_2^T P_{21} B_1 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

将（32）式展开，并将其左端的期望符号去掉，右端的σ_i^2换成其估值$\hat{\sigma}_{01}^2$，$\hat{\sigma}_{02}^2$和$\hat{\sigma}_{012}^2$，即可得到如下方程：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(P_{11}Q_{11}) - 2\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b1}) + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b1})^2 & \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b1}Q_{\hat{x}}N_{b2}) & \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b1}Q_{\hat{x}}N_{b3}) \\ & \mathrm{tr}(P_{22}Q_{22}) - 2\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b2}) + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b2})^2 & \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b2}Q_{\hat{x}}N_{b3} \\ \text{（对　　称）} & & \mathrm{tr}(P_{12}Q_{21} + P_{21}Q_{12}) - 2\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b3} + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{b3})^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \\ \\ \hat{\sigma}_{012}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^T P_{11} V_1 \\ \\ V_2^T P_{22} V_2 \\ \\ 2V_1^T P_{12} V_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(公式转行部分)} \tag{35}$$

显然，无论是(29)式或(35)式，都是通用公式(24)式在$A=-I$情况下的另一种书写形式而已。

3 L_1 与L_2 不相关时方差分量估计的通用公式

当L_1与L_2不相关时，不存在协方差因子 $\hat{\sigma}_{012}^2$，因此，只须将(24)式中的有关方程和系数去掉，即得方差分量估计的通用公式，显然，它同样可以应用于所有的平差方法。此时有

$$\begin{bmatrix} \mathrm{tr}(Q_k N_{a1}) & \mathrm{tr}(Q_k N_{a1} Q_k N_{a2}) \\ (\text{对称}) & \mathrm{tr}(Q_k N_{a2})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T P_1 V_1 \\ V_2^T P_2 V_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

对于各种不同的平差方法，其中Q_k(和$Q_{\hat{x}}$)的表达式仍与(25)、(26)、(27)、(28)诸式相同。特别是在$A=-I$的情况下，还可由(29)式写出：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Q_k \tilde{Q}_1)^2 & \mathrm{tr}(Q_k \tilde{Q} Q_k \tilde{Q}_2) \\ (\text{对称}) & \mathrm{tr}(Q_k \tilde{Q}_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^T P_1 V_1 \\ V_2^T P_2 V_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

当L_1与L_2不相关时，$\mathrm{tr}(P_{11}Q_{11}) = \mathrm{tr}(\underset{n_1, n_1}{I_1}) = n_1$，$\mathrm{tr}(P_{22}Q_{22}) = \mathrm{tr}(\underset{n_2, n_2}{I_2}) = n_2$，因此，由(35)式可以写出：

$$\begin{pmatrix} n_1 - 2\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_{b1}) + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_{b1})^2 & \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_{b1} \; Q_{\hat{x}} N_{b2}) \\ (\text{对称}) & n_2 - 2\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_{b2}) + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_{b2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \\ \hat{\sigma}_{02}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^T P_1 V_1 \\ V_2^T P_2 V_2 \end{pmatrix} \tag{38}$$

以上是假设在观测向量中只包含两类(或不同精度)观测值。由于所有公式中的系数阵具有较明显的规律性，我们不难将其推广到m类观测的情况。为了节省篇幅，这里不再一一写出。

4 方差分量估计的简化通用公式

仍以观测向量中只包含两类(或不同精度)观测值为例。若L_1与L_2不相关，且假设

$$\hat{\sigma}_{01}^2 = \hat{\sigma}_{02}^2 = \hat{\sigma}_{0i}^2 \quad (\neq \hat{\sigma}_0) \tag{39}$$

则由(36)式得

$$V_i^T P_i V_i = \mathrm{tr}\left(Q_k N_{ai} Q_k \sum_{i=1}^{2} N_{ai}\right) \hat{\sigma}_{0i}^2 = \mathrm{tr}(Q_k N_{ai} Q_k N_{aa}) \hat{\sigma}_{0i}^2$$

$$=\mathrm{tr}(Q_k N_{aa} Q_k N_{ai})\hat{\sigma}^2_{0i} \qquad (i=1,\ 2) \tag{40}$$

其中(参见(5a)式:

$$Q_k N_{aa} Q_k=(N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}B\,Q_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1})N_{aa}(N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1})$$

$$=N_{aa}^{-1}-2N_{aa}^{-1}B\,Q_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1}+N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1}B\,Q_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1} \tag{41}$$

在上式右端的最后一项中,因为$B^T N_{aa}^{-1}B=N_{bb}$(见(6)式),而(见(5b)式)

$$Q_{\hat{x}}N_{bb}Q_{\hat{x}}=(N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})N_{bb}(N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})$$

$$=N_{bb}^{-1}-2N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}+N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$$

又因$CN_{bb}^{-1}C^T=N_{cc}$(见(6)式),故由上式知

于是由(41)式知 $\quad Q_x N_{db}^{-1}Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^T N_{c0}^{-1}CN_{bb}^{-1}=Q_{\hat{x}}$

$$Q_k N_{aa} Q_k=N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^T N_{aa}^{-1}=Q_k$$

这样,(40)式即可简化成

$$V_i^T P_i V_i=\mathrm{tr}(Q_k N_{ai})\hat{\sigma}^2_{0i} \tag{42}$$

或

$$\hat{\sigma}^2_{0i}=V_i^T P_i V_i/\mathrm{tr}(Q_k N_{ai}) \tag{43}$$

(42)式和(43)式就是方差分量估计的简化通用公式,它同样可以应用于所有的平差方法。对于不同的平差方法,其中Q_k仍按(25)、(26)、(27)、(28)诸式计算。

特别是当$A=-I$时,因为$Q_k=P-PBQ_{\hat{x}}B^T P$, $N_{ai}=A\tilde{Q}_i A^T=\tilde{Q}_i$,于是有

$\mathrm{tr}(Q_k N_{ai})=\mathrm{tr}(I_i-P_i B_i Q_{\hat{x}}B_i^T)=n_i-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bi})$,

因此,(42)和(43)式也可分别写成:

$$V_i^T P_i V_i=(n_i-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bi}))\hat{\sigma}^2_{0i} \tag{44}$$

$$\hat{\sigma}^2_{0i}=V_i^T P_i V_i/(n_i-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bi})) \tag{45}$$

由(44)式知:

$$V_i^T P_i V_i=n_i\hat{\sigma}^2_{0i}-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bi})\hat{\sigma}^2_{0i}=n_i\hat{\sigma}^2_{0i}-\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}N_{bi}) \tag{46}$$

于是有

$$\hat{\sigma}^2_{0i}=\frac{V_i^T P_i V_i+\mathrm{tr}(D_{\hat{x}}N_{bi})}{n_i} \tag{47a}$$

式中 $\quad D_{\hat{x}}=Q_{\hat{x}}\hat{\sigma}^2_{0i} \qquad$ (47b)

对于附有限制条件的间接平差而言,由(27)式知

$$Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1} \quad (N_{bb}=B^T PB) \tag{48}$$

对于间接平差而言($C=0$),则为

$$Q_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}=(B^T PB)^{-1} \tag{49}$$

(45)和(47)式实际上是简化通公代式(43)式在$A=-I$时的一些不同书写形式而已。

当L_1与L_2不相关时，由（14）式知

$$D=\begin{bmatrix} Q_{11}\sigma_{01}^2 & 0 \\ 0 & Q_{22}\sigma_{02}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1^{-1}\sigma_{01}^2 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}\sigma_{02}^2 \end{bmatrix} \tag{50}$$

如果各类观测值的初始权阵均取为单位阵，则有

$$D=\begin{bmatrix} I_1\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & I_2\sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

σ_1^2和σ_2^2分别表示两类观测的初始权阵改为单位阵时所对应的方差。比较（50）和（51）式知

$$\sigma_i^2=P_i^{-1}\sigma_{0i}^2, \quad 或 \quad P_i=\frac{\sigma_{0i}^2}{\sigma_i^2} \tag{52}$$

在（47a）式中，因为

$$\mathrm{tr}(D_{\hat{x}}N_{bi})=\mathrm{tr}(D_{\hat{x}}B_i^{\mathrm{T}}P_iB_i)=\mathrm{tr}(P_iB_iD_{\hat{x}}B_i^{\mathrm{T}})$$

现将（47a）式中的P_i均代以σ_{0i}^2/σ_i^2，经整理即得：

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{V_i^{\mathrm{T}}V_i+\mathrm{tr}(B_iD_{\hat{x}}B_i^{\mathrm{T}})}{n_i} \tag{53}$$

上式可应用于初始权阵均为单位阵时的情况。当应用于间接平差时，由（47b）和（49）两式知，$D_{\hat{x}}=Q_{\hat{x}}\hat{\sigma}_i^2=N_{bb}^{-1}\hat{\sigma}_i^2$，若令

$$D_{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}\hat{\sigma}_1^2=N_{bb}^{-1} \tag{54}$$

则（53）式可写成：

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{V_i^{\mathrm{T}}V_i+\mathrm{tr}(B_iN_{bb}^{-1}B_i^{\mathrm{T}})}{n_i} \tag{55}$$

上式也就是大家所熟知的Ebner方差分量估计式。

顾及（47b）、（49）和（52）诸式，又由（53）式可得

$$V_i^{\mathrm{T}}V_i=n_i\hat{\sigma}_i^2-\mathrm{tr}(\hat{\sigma}_{0i}^2B_iN_{bb}^{-1}B_i^{\mathrm{T}})$$
$$=n_i\hat{\sigma}_i^2-\hat{\sigma}_i^2P_i\mathrm{tr}(B_iN_{bb}^{-1}B_i^{\mathrm{T}})$$

于是有

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{V_i^{\mathrm{T}}V_i}{n_i-P_i\mathrm{tr}(B_iN_{bb}^{-1}B_i^{\mathrm{T}})} \tag{56}$$

这就是大家所熟知的Förstner方差分量估计式。

若略去（47a）式中的求迹部分，则有

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{V_i^{\mathrm{T}}P_iV_i}{n_i} \tag{57}$$

这就是Helmert（还有welsch）所给出的方差分量近似估计式。

顺便指出，如果各类（或不同精度）观测值的初始协因数阵（或权阵）取得恰当，或者说，它们所对应的方差均为σ_0^2，则由（42）式求和可得：

$$V^{T}PV=\sum V_{i}^{T}P_{i}V_{i}=\mathrm{tr}(Q_{k}\sum N_{i})\hat{\sigma}_{0}^{2}$$

$$=\mathrm{tr}(Q_{k}N)\hat{\sigma}_{0}^{2} \tag{58}$$

因为

$$\underset{c,c}{Q_{k}}\ \underset{c,c}{N}=(N^{-1}-N_{aa}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^{T}N^{-1})N=(\underset{c,c}{I}-N^{-1}BQ_{\hat{x}}B^{T})$$

于是（顾及(6)式）：

$$\mathrm{tr}(Q_{k}N_{aa})=\mathrm{tr}(\underset{c,c}{I}-Q_{\hat{x}}B^{T}N^{-1}B)=c-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bb}) \tag{59}$$

再顾及（5b）和（6）式知

$$\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}N_{bb})=\mathrm{tr}(\underset{u,u}{I}-N_{bb}^{-1}C^{T}N_{cc}^{-1}C)=u-\mathrm{tr}(N_{cc}^{-1}N_{cc})$$

$$=u-\mathrm{tr}(\underset{s,s}{I})=u-s$$

代入（59）式，最后得

$$\mathrm{tr}(Q_{k}N_{aa})=c-u+s \tag{60}$$

这样，由（58）式得

$$\hat{\sigma}_{0}^{2}=V^{T}PV/(c-u+s) \tag{61}$$

这就是通常所应用的单位权方差估计的通用公式。在〔1〕§2.10中已经证明，$\hat{\sigma}_{0}^{2}$是σ_{0}^{2}的无偏估计。因此，利用（42）式（或(43)式）进行迭代计算，其最后结果是无偏估计。显然，(57)式则是有偏估计。

5 结束语

从以上讨论可见，方差—协方差分量估计的通用公式（24）可以适用于所有平差方法，而在国内外文献中只给出了仅适用于间接平差和附有未知数的条件平差的Helmert型方差—协方差估计公式。（29）和（35）两式，只是（24）式在$A=-I$情况下的两种不同的书写形式。

方差分量估计的通用公式（36），则是由（24）式去掉与协方差分量有关的方程而得，它同样适用于所有的平差方法，而在国内外文献中只分别给出适用于条件平差和间接平差的Helmert型方差分量估计公式。（37）和（38）两式则是（36）式在$A=-I$情况下的两种不同的书写形式。

方差分量估计的简化通用公式（43），是在一定的假设条件下由（36）式直接引出，它同样适用于各种平差方法。（45）和（47）两式，只是在（43）式中$A=-I$情况下的两种特殊形式。而国外已有的Ebner、Förstner公式以及Helmert（还有Welsch）的近似公式只是它的一些特例而已。

参 考 文 献

〔1〕 於宗俦，于正林．测量平差原理．武汉测绘科技大学出版社，1990．

〔2〕 周江文．误差理论．测绘出版社，1979．

〔3〕 陈永奇。变形观测数据处理。测绘出版社，1988.
〔4〕 张正禄编译。现代工程测量控制网的理论和应用。测绘出版社，1989.
〔5〕 崔希章等。广义测量平差，测绘出版社，1982.
〔6〕 W We lsch。对变形和控制网进行监视和分析的若干技术问题。武汉测绘学院译。1981.
〔7〕 李德仁。误差处理和可靠性理论。测绘出版社，1988.
〔8〕 刘大杰，于正林。广义平差原理。武汉测绘学院教材科，1985.

The Goneral Formulas of Helmert type for Estimating Variance and Covarince Caomponents

Yu Zongchou

Abstract

The estimates of variance components of Helmert type for both condition and parameter adjastmeat methods have been given in many geodetic literatures and corresponding simplified fofmulas have been respectively derived under some assumptions (e. g. the simplified formulas from Förstner, Ebner, Helmert, and Welsch, etc.) 。 but the estimation formula of variance-covariance compnents of Helmert type is only given for the parameter adjustment. Based on a general functional model 〔1〕, a general formula of Helmert type for estimating variance-covariance components which is applicable to all adjustment methods has been derived in this paper, and directly from it a general formula and corresponding simplified formula for estimating variance components are also given.

【Key words】 estimation of variance-covariance components; general functional model; general formulas