DOI:10.13203/j.whugis1991.01.010

第16卷 第1期 武汉测绘科技大学学报 Vol.16 No.1
1991年3月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Mar. 1991

GPS载波相位观测值处理方法的等价性*

韩 绍 伟

摘 要

利用GPS载波相位观测值进行定位有多种方法，这些方法之间是相互联系的。本文改进了多余参数消除理论的等价条件，使之不仅适合于差分法，也适合于中心化非差法；并根据这一等价条件从理论上严格地证明了差分法、中心化非差法及Goad非差法同基本相位法的等价性；而由此出发进行的方法综述，则对实际应用具有一定的指导意义。

【关键词】 GPS载波相位观测值；数据处理；等价性

引 言

GPS技术用于测地，常用的观测量有伪距和载波相位观测值。在这两种观测量中，以载波相位观测值更为精确，应用更为广泛。而对载波相位观测值的处理方法也有很多，较常见的方法有：基本相位法[6]，差分法[4]，中心化非差法[5-8]，Goad非差法[1]，模糊函数法[4]。随差这些方法的运用，其间的相互关系也就成为人们研究的重点。Lindlor W等人(1985)，Wells D E等人(1987)给出了对连续偏差消除的讨论；Grafarend E W和Schaffin B(1986)给出了多余参数消除的理论，并对无相互作用的三项分类模型进行了多余参数的消除；魏子卿(1988)给出了差分法的等价性及等价条件，并举例给予说明。本文对多余参数消除的等价条件进行了改进，使之不仅适合于差分法，也适合于中心化非差法，并根据这一等价条件从理论上严格地证明了差分法、中心化非差法和Goad非差法同基本相位法的等价性。对不便从理论上证明其等价性的模糊函数法进行分析，实践表明了求解的一致性。最后，从这些等价关系出发，对GPS载波相位观测值处理实践中采用方法的选取原则给出了讨论，这对实际应用会有一定的价值。

1 基本相位法

基本相位观测方程可以写成如下形式[6]

收稿日期： 1990—01—20

* 本文研究得到国家教委博士学科点专项科研基金资助，同时本文也是硕士论文的一部分，指导教师为施品浩副教授。

$$\Phi_r^s(t) = P_r^s(t) + \alpha_r(t) + \beta^s(t) + \gamma_r^s \tag{1}$$

式中，$P_r^s(t) = f/c \cdot \| \vec{X}^s(t) - \vec{X}_r(t) \|$；下标变量 $r = 1,2,\cdots,R$ 表示地面测站接收机；上标变量 $S = 1,2,\cdots,S$ 表示卫星；变量 $t = 1,2,\cdots T$ 表示观测历元；$\vec{X}^s(t)$，$\vec{X}_r(t)$ 表示 t 时刻卫星 S 和测站 r 的位置矢量；f 为载波频率；c 为光速；$\alpha_r(t)$，$\beta^s(t)$，γ_r^s 表示在观测值中包含的接收机、卫星、接收机——卫星对特性偏差。对这三种偏差项作最一般的假定：$\alpha_r(t)$ 对每台接收机和每个观测历元取不同值且独立；$\beta^s(t)$ 对每颗卫星和每个观测历元取不同值且独立；在每个观测时段内，γ_r^s 对每一接收机——卫星对取不同值且独立。

为了便于讨论，又不影响结论的一般性，作如下几点假定：没有未解决的数据同步问题；观测期间没有卫星的升起和降落；没有不观测的接收机，也就是在每个观测历元，所有接收机都能获得每颗卫星的数据；观测值经预处理后已消除周跳，在一定程度上消除了电离层和对流层的影响。

由以上假定，对于同历元，可以将观测方程排成如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_1^2 & \cdots & \Phi_1^S \\ \Phi_2^1 & \Phi_2^2 & \cdots & \Phi_2^S \\ \vdots & & & \\ \Phi_R^1 & \Phi_R^2 & \cdots & \Phi_R^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 & P_1^2 & \cdots & P_1^S \\ P_2^1 & P_2^2 & \cdots & P_2^S \\ \vdots & & & \\ P_R^1 & P_R^2 & \cdots & P_R^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_R & \alpha_R & \cdots & \alpha_R \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \beta^1 & \beta^2 & \cdots & \beta^S \\ \beta^1 & \beta^2 & \cdots & \beta^S \\ \vdots & & & \\ \beta^1 & \beta^2 & \cdots & \beta^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^S \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \cdots & \gamma_2^S \\ \vdots & & & \\ \gamma_R^1 & \gamma_R^2 & \cdots & \gamma_R^S \end{bmatrix} \tag{2}$$

令 $1_\alpha, 1_\beta, 1_\gamma$ 为由 1 组成的 S 维、R 维、T 维向量，$I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ 为 $S \times S, R \times R, T \times T$ 维的单位阵；$\underset{R\times 1}{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_R]^T$；$\underset{S\times 1}{\beta} = [\beta^1 \beta^2 \cdots \beta^S]^T$，(2)式可写成：

$$\underset{R\times S}{\Phi} = \underset{R\times S}{P} + \underset{R\times 1}{\alpha} \cdot 1_\alpha^T + 1_\beta \cdot (\underset{S\times 1}{\beta})^T + \underset{R\times S}{\gamma} \tag{3}$$

对(3)式中进行向量化，并令 $\underset{RS\times 1}{\Phi} = \mathrm{Vec}(\underset{R\times S}{\Phi})$，$\underset{RS\times 1}{P} = \mathrm{Vec}(\underset{R\times S}{P})$，$\gamma = \mathrm{Vec}(\underset{R\times S}{\gamma})$，则得：

$$\underset{RS\times 1}{\Phi} = \underset{RS\times 1}{P} + (1_\alpha \otimes I_\beta) \underset{R\times 1}{\alpha} + (I_\alpha \otimes 1_\beta) \underset{S\times 1}{\beta} + \gamma \tag{4}$$

其中，Vec 是矩阵向量化算子，它把矩阵按列向量依次排成向量，例如矩阵 $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$，则 $\mathrm{Vec}(A) = (a_1^T a_2^T \cdots a_n^T)^T$；$\otimes$表示矩阵的 Kronecker 乘积，例如设 $A = (a_{ij})$ 和 B 分别为 $m\times n, p\times q$ 维矩阵，则 $A\otimes B = (a_{ij}B)$ 为 $mp\times nq$ 维矩阵。

对于不同时刻，可以将(4)式排成矩阵形式：

$$\begin{aligned} [\underset{RS\times 1}{\Phi}(1) \cdots \underset{RS\times 1}{\Phi}(T)] = {} & [\underset{RS\times 1}{P}(1) \cdots \underset{RS\times 1}{P}(T)] + (1_\alpha \otimes I_\beta)[\underset{R\times 1}{\alpha}(1) \cdots \underset{R\times 1}{\alpha}(T)] \\ & + (I_\alpha \otimes 1_\beta)[\underset{S\times 1}{\beta}(1) \cdots \underset{S\times 1}{\beta}(T)] + [\gamma, \cdots, \gamma] \end{aligned} \tag{5}$$

对应地可写成：

$$\underset{RS\times T}{\Phi} = \underset{RS\times T}{P} + (1_\alpha \otimes I_\beta) \underset{R\times T}{\alpha} + (I_\alpha \otimes 1_\beta) \underset{S\times T}{\beta} + \gamma \cdot 1_\gamma^T \tag{6}$$

将(6)式转置后向量化，并令 $\Phi = \mathrm{Vec}[(\underset{RS\times T}{\Phi})^T]$；$P = \mathrm{Vec}[\underset{RS\times T}{P})^T]$；$\alpha = \mathrm{Vec}[(\underset{R\times T}{\alpha})^T]$；$\beta = \mathrm{Vec}[(\underset{S\times T}{\beta})^T]$，则得：

$$\Phi = P + (1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma)\alpha + (I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)\beta + (I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{7}$$

将(7)式线性化可得：

$$\Phi = A\delta X + (1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma)\alpha + (I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)\beta + (I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{8a}$$

式中 δX 为测站或(和)卫星位置参数；A 为线性化的展开系数阵，并设载波相位观测值的协方差阵

为：

$$C_\Phi = I \tag{8b}$$

由表 1 可以看出，α,β 和 γ 未知数由于不可分而不能求得唯一解，欲求解则需象自由网平差方法一样，给出足够的初值或附加条件或求伪逆解。

附 表

多余参数	系 数 矩 阵	系数矩阵的秩	系数矩阵的秩亏数
α	$(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma)$	RT	0
β	$(I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)$	ST	0
γ	$(I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)$	RS	0
α,β	$(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma, I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)$	$RT+ST-T$	T
α,γ	$(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma, I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)$	$RS+RT-R$	R
β,γ	$(I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma, I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)$	$RS+ST-S$	S
α,β,γ	$(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma, I_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma, I_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)$	$RS+ST+RT-R-S-T+1$	$R+S+T-1$

方法Ⅰ：给出足够数量（大于或等于系数阵列向量秩亏数）的初值或附加条件，使得(8)式能求得唯一解。如设一台接收机钟为已知钟（相当于 T 个已知数据），该接收机相对所有卫星的整周待定值为已知（相当于又给出了 S 个已知数据），该假设相当于设置一基站，该基站具有精确的位置（可得该站对所有卫星的整周待定值）和时钟（已知时钟），并且所有其它与该基站联测的接收机在某一历元完全同步（相当于又给出 $R-1$ 个已知数据）。在这些初值条件下，可得唯一解。但这只是给定初值或附加条件的一种方式，还有其它的给定方式，可视实际情况确定。

方法Ⅱ：设将未知数分为两组 ξ_1 和 ξ_2，则方程(8a)可写成：

$$\Phi = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 \tag{9}$$

组成法方程得：

$$A_1^T A_1\xi_1 + A_1^T A_2\xi_2 = A_1^T\varphi \tag{10a}$$

$$A_2^T A_1\xi_1 + A_2^T A_2\xi_2 = A_2^T\Phi \tag{10b}$$

则 ξ_2 伪逆解可写成如下形式：

$$\xi_2 = (A_2^T A_2)^+ (A_2^T\Phi - A_2^T A_1\xi_1) \tag{11}$$

ξ_1 可由下式确定：

$$A_1^T(I - A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T)A_1\xi_1 = A_1^T(I - A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T)\Phi \tag{12}$$

2 差分法

由于基本相位法存在多余参数系数阵的秩亏问题，给求解带来困难，且在大多数的 GPS 定位应用中，人们很少关心多余参数，故通常采用消除多余参数的方法。由于其消除方式不同分为差分法和中心化非差法，它们可对多余参数进行部分或全部的消除。

对于方程(9)，如果能够找到一算子 D，有：

$$DA_2 = 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{Rank}(D) = RST - \mathrm{Rank}(A_2) \tag{14}$$

则将 D 作用在方程(9)两边并顾及(8b)式，得

$$D\Phi = DA_1\xi_1 \tag{15a}$$

$$C_{D\Phi} = DD^T \tag{15b}$$

由(15)式组成法方程，取 $D\Phi$ 的权阵为 $(DD^T)^+$，则：

$$A_1^T[D^T(DD^T)^+ D]A_1\xi_1 = A_1^T[D^T(DD^T)^+ D)\Phi \tag{16}$$

比较(16)与(12)两式，可得该法与基本相位法等价的又一条件为：

$$D^T(DD^T)^+ D = I - A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T \tag{17}$$

综上所述，该法与基本相位法在求解 ξ_1 意义下等价的条件为(13)，(14)和(17)式。如果 D 取作差分算子则为差分法的等价条件；如果 D 取作中心化算子则为中心化法的等价条件。

2.1 单差法

单差法分星际单差、站际单差和历元单差(多普勒法)三种。

对星际单差，取卫星 1 为基星，则星际差矩阵为：

$$\Delta_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & +1 \end{bmatrix}_{(S-1)\times S} \tag{18}$$

具有性质 $\Delta_\alpha \cdot 1_\alpha = 0$，令

$$D_\alpha = \Delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma$$

则将作用在(8)式两边

$$D_\alpha\Phi = D_\alpha A\delta X + (\Delta_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)\beta + (\Delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{19a}$$

$$C_{D_\alpha\Phi} = D_\alpha D_\alpha^T \tag{19b}$$

下面证明(8)与(19)在求解 δX，β 和 γ 意义下等价。此时对应(9)式中的 $A_2=(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma)$。$D_\alpha$ 已满足条件(13)，下面证明 D_α 满足(14)和(17)条件。

$$\mathrm{Rank}(D_\alpha) = RST - RT = RST - \mathrm{Rank}(A_2)$$

条件(4)满足。

$$\begin{aligned} D^T(DD^T)^+ D &= \Delta_\alpha^T(\Delta_\alpha \Delta_\alpha)^{-1}\Delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma \\ &= I - \frac{1}{S}(1_\alpha 1_\alpha^T) \otimes I_\beta \otimes I_\gamma \end{aligned} \tag{20}$$

$$A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T = \frac{1}{S}(1_\alpha 1_\alpha^T) \otimes I_\beta \otimes I_\gamma \tag{21}$$

$$D^T(DD^T)^+ D + A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T = I$$

条件(17)满足。等价性得证。

进行星际单差后，将星种未知数 β 变成钟差 β'，γ 变成 γ'，即定义：

$$\beta' = \mathrm{Vec}[(\Delta_\alpha \underset{S\times T}{\beta})^T] \tag{22}$$

$$\gamma' = \mathrm{Vec}[\underset{R\times S}{\gamma} \Delta_\alpha^T] \tag{23}$$

则方程(19a)变成：

$$D_\alpha\Phi = D_\alpha A\delta X + (I_{\alpha-1} \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)\beta' + (I_{\alpha-1} \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma' \tag{24}$$

由上式不难看出，系数矩阵存在秩亏，β' 与 γ' 是不可分的。与(8)式类似求解。

同样对站际单差，取站 1 为基站，站际差矩阵为

$$\Delta_\beta = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & +1 \end{bmatrix}_{(R-1)\times R} \tag{25}$$

则站际单差算子 D_β 为

$$D_\beta = I_\alpha \otimes \Delta_\beta \otimes I_\gamma \tag{26}$$

对历元单差，按顺序取差，观测历元单差矩阵为：

$$\Delta_\gamma = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & +1 \end{bmatrix}_{(T-1)\times T} \tag{27}$$

则历元单差算子为：

$$D_\gamma = I_\alpha \otimes I_\beta \otimes \Delta_\gamma \tag{28}$$

与星际单差一样，可得类似结论。

2.2 双差法

双差法有三种独立的形式，即测站——卫星双差，测站——历元双差，卫星——历元双差。

对于测站——卫星双差，则差分算子为

$$D_{\alpha\beta} = \Delta_\alpha \otimes \Delta_\beta \otimes I_\gamma \tag{29}$$

将 $D_{\alpha\beta}$作用在(8)式两边得：

$$D_{\alpha\beta}\Phi = D_{\alpha\beta}A\delta X + (\Delta_\alpha \otimes \Delta_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{30a}$$

$$C_{D_{\alpha\beta}}\Phi = D_{(\alpha\beta)}D_{\alpha\beta}^T \tag{30b}$$

下面证明(30)与(8)式在求解 δX 和 γ 意义下等价，此时 $A_2=[1_\alpha\otimes I_\beta\otimes I_\gamma \quad I_\alpha\otimes 1_\beta\otimes I_\gamma]$，$D_{\alpha\beta}$已满足条件(13)，又

$$\mathrm{Rank}(D_{\alpha\beta}) = RST - ST - RT = RST - \mathrm{Rank}(A_2)$$

满足条件(14)。

$$D_{\alpha\beta}{}^T(D_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}^T)^{-1}D_{\alpha\beta} = I - \frac{1}{S}(1_\alpha 1_\alpha^T)\otimes I_\beta \otimes I_\gamma - \frac{1}{R}I_\alpha \otimes (1_\beta 1_\beta^T)\otimes I_\gamma + \frac{1}{RS}(1_\alpha 1_\alpha^T)\otimes(1_\beta 1_\beta^T)\otimes I_\gamma$$

$$(A_2^TA_2) = \begin{bmatrix} SI_\beta & 1_\alpha^T \otimes 1_\beta \\ 1_\alpha \otimes 1_\beta^T & RI_\alpha \end{bmatrix} \otimes I_\gamma$$

$(A_2^TA_2)$不存在 Cayley 逆，由计算可求一广义逆：

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{S}I_\beta & \frac{-1}{2RS}(1_\alpha^T \otimes 1_\beta) \\ \frac{-1}{2RS}(1_\alpha \otimes 1_\beta^T) & \frac{1}{R}I_\alpha \end{bmatrix} \otimes I_\gamma$$

则有 $D_{\alpha\rho}^T(D_{\alpha\rho}D_{\alpha\rho}^T)^{-1}D_{\alpha\rho}+A_2GA_2^T=I$，又$(A_2^TA_2)^-$的一般表达式为：

$$(A_2{}^TA)^- = G + u - G(A_2^TA_2)u(A_2{}^TA_2)G$$

式中 u 为适当阶数的任意矩阵，代入得：

$$D_{\alpha\beta}^T(D_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}^T)^{-1}D_{\alpha\beta} + A_2(A_2^TA_2)^- A_2^T = I$$

由于$(A_2^TA_2)^+$是$(A_2^TA_2)^-$中的一个，故条件(17)满足，得证。

测站——卫星双差后，将整周待定值γ作一变换，即令：

$$\gamma'' = \mathrm{Vec}(\Delta_\beta \underset{R\times S}{\gamma} \Delta_\alpha^T) \tag{31}$$

则(30a)式可写成：

$$D_{\alpha\beta}\Phi = D_{\alpha\beta}A\delta X + (I_{\alpha-1} \otimes I_{\beta-1} \otimes 1_\gamma)\gamma'' \tag{32}$$

(32)式的系数矩阵列满秩，故可有唯一解。

同样可对另外两种双差进行如上步骤，而得到相应结论。综述这些结论可得：

δX 是唯一的，无论是测站位置还是卫星位置参数，差分法与基本相位法可得相同结果；

γ的测站——卫星双差值γ'是相同的；

β的卫星——历元双差值是相同的；

α的测站——历元双差值是相同的；

2.3 三差法

由前面的定义，三差算子可表示成：

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \Delta_\alpha \otimes \Delta_\beta \otimes \Delta_\gamma \tag{33}$$

将$D_{\alpha\beta\gamma}$作用在(8)式两边得：

$$D_{\alpha\beta\gamma}\Phi = D_{\alpha\beta\gamma}A\,\delta X \tag{34a}$$

$$C_{D_{\alpha\beta\gamma}}\Phi = D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha\beta\gamma}^T \tag{34b}$$

与前证明类似可证三差法与基本相位法在求解δX意义下的的等价性。

3 中心化非差法

中心化非差法的基本思想是对包含相同未知数的多个观测方程通过中心化处理将其消去。对GPS载波相位观测值方程的中心化包括三类，即星际中心化、站际中心化和历元中心化。根据中心化次数又可分为单次、双次和三次中心化，下面分别讨论。

3.1 单次中心化

单次中心化分为星际、站际和历元中心化三种，对星际中心化，可如下定义星际中心化矩阵：：

$$\delta_\alpha = I_\alpha - \frac{1}{S}1_\alpha 1_\alpha^T \tag{35}$$

则星际中心化算子为：

$$C_\alpha = \delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma \tag{36}$$

将C_α作用在方程(8)两边，得：

$$C_\alpha\Phi = C_\alpha A\delta X + (\delta_\alpha \otimes 1_\beta \otimes I_\gamma)\beta + (\delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{37a}$$

$$C_{C\alpha\Phi} = C_\alpha C_\alpha^T \tag{37b}$$

下面证明(37)式与(8)式在求解$\delta X,\beta,\gamma$意义下的等价性。此时$A_2=(1_\alpha \otimes I_\beta \otimes I_\gamma)$，$C_\alpha$自然满足(13)式，

$$\mathrm{Rank}(C_\alpha) = RST - RT = RST - \mathrm{Rank}(A_2)$$

条件(14)满足，又由于

$$C_\alpha C_\alpha^T \cdot C_\alpha C_\alpha^T = C_\alpha C_\alpha^T$$

所以$C_\alpha C_\alpha^T$为对称幂等阵，因此$(C_\alpha C_\alpha^T)^+ = C_\alpha C_\alpha^T$，由(21)式可得

$$C_\alpha^T(C_\alpha C_\alpha^T)^+ C_\alpha + A_2(A_2^T A_2)^+ A_2^T = I$$

条件(17)式满足，等价性得证。

由于 $C_\alpha^T(C_\alpha C_\alpha^T)^+C_\alpha=C_\alpha^T C_\alpha$，所以在由(37)式求解时，$C_\alpha\Phi$ 的权阵可用 I 代替，而得相同结果。

同样令站际中心化矩阵 $\delta_\beta=I_\beta-\frac{1}{R}1_\beta 1_\beta^T$，则站际中心化算子为：

$$C_\beta = I_\alpha \otimes \delta_\beta \otimes I_\gamma \tag{38}$$

令历元中心化矩阵 $\delta_\gamma=I_\gamma-\frac{1}{T}1_\gamma 1_\gamma^T$，则历元单次中心化算子为：

$$C_\gamma = I_\alpha \otimes I_\beta \otimes \delta_\gamma \tag{39}$$

可得到类似的结论。

3.2 双次中心化

双次中心化有三种独立的形式，即测站——卫星，测站——历元，卫星——历元双次中心化。

对于测站——卫星双次中心化，其算子为：

$$C_{\alpha\beta} = \delta_\alpha \otimes \delta_\beta \otimes I_\gamma \tag{40}$$

作用在(8)式两边，得：

$$C_{\alpha\beta}\Phi = C_{\alpha\beta}A\delta X + (\delta_\alpha \otimes \delta_\beta \otimes 1_\gamma)\gamma \tag{41a}$$

$$C_{C_{\alpha\beta}\Phi} = C_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}^T \tag{41b}$$

同前类似可证明(41)式与(8)式在求解 δX 和 γ 意义下的等价性。$C_{\alpha\beta}\Phi$ 的权阵可用 I 代替。

同样对测站——历元双次中心化，其算子：

$$C_{\beta\gamma} = I_\alpha \otimes \delta_\beta \otimes \delta_\gamma \tag{42}$$

对卫星——历元双次中心化，其算子：

$$C_{\alpha\gamma} = \delta_\alpha \otimes I_\beta \otimes \delta_\gamma \tag{43}$$

且具有相类似的结论。

3.3 三次中心化

三次中心化即分别对测站、卫星和历元进行中心化，其算子：

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \delta_\alpha \otimes \delta_\beta \otimes \delta_\gamma \tag{44}$$

作用在方程式两边，得：

$$C_{\alpha\beta\gamma}\Phi = C_{\alpha\beta\gamma}A\delta X \tag{45a}$$

$$C_{C_{\alpha\beta\gamma}\Phi} = C_{\alpha\beta\gamma}C_{\alpha\beta\gamma}{}^T \tag{45b}$$

同样可证(45)与(8)式在求解 δX 意义下的等价性。对 $C_{\alpha\beta\gamma}\Phi$ 的权阵可用 I 代替，而得到相同的结果。这一性质给数据处理带来了很多方便。

4 Goad 非差法

从(1)式出发，令

$$N_r^s(t) = \alpha_r(t) + \beta^s(t) + \gamma_r^s \tag{46}$$

则有：

$$\Phi_r^s(t) = P_r^s(t) + N_r^s(t) \tag{47}$$

不妨选择测站 1、卫星 1 为基站和基星，且定义：

$$K_r^s = [N_r^s(t) - N_r^1(t)] - [N_1^s(t) - N_1^1(t)]$$
$$= (\gamma_r^s - \gamma_r^1) - (\gamma_1^s - \gamma_1^1) \tag{48}$$

式中 $r=2,3,\cdots,R$;$s=2,3,\cdots S$。由此可得一组方程:

$$\Phi_1^1(t) = P_1^1(t) + N_1^1(t) \tag{49a}$$

$$\Phi_r^1(t) = P_r^1(t) + N_r^1(t) \tag{49b}$$

$$\Phi_1^s(t) = P_1^s(t) + N_1^s(t) \tag{49c}$$

$$\Phi_r^s(t) = P_r^s(t) + K_r^s + N_r^1(t) + N_r^s(t) - N_1^1(t) \tag{49d}$$

可以看出:若接收机保持锁相,K 变量在整个观测时段内为同一常数且与(31)式定义的 γ'' 意义相同;按(1)式的定义,α,β 和 γ 未知数有 $RS+ST+RT$ 个,而系数阵的秩为 $RS+ST+RT-(R+S+T-1)$,秩亏数为 $R+S+T-1$,说明了 α,β 和 γ 未知数是不可分的。Goad 非差法用新的一组未知数 K 和 N 来代替 α,β 和 γ,保证了对应 K 和 N 的系数阵列满秩,即系数阵的列秩为 $RS+ST+RT-(R+S+T-1)$,而未知数 K 和 N 的总个数也是该值,从而可以确定唯一解。Goad 非差法与基本相位法的等价性也便显然。

同样对(49)式,也可进行差分处理,线性化(49)式后由差分算子作用(以测站——卫星双差为例):

$$D_{\alpha\beta}\Phi = D_{\alpha\beta}A\delta X + (I_{\alpha-1} \otimes I_{\beta-1} \otimes 1_\gamma)K \tag{50}$$

与(32)式一致,从而也说明了差分法与 Goad 非差法在求解 δX 和 K(或 γ'')意义下是等价的。

Goad 非差法中,N 未知数为测站钟、卫星钟、基站和基星相关的整周待定值的线性组合,可以唯一确定。但若要由 N 唯一地分离出这些未知数,则需和基本相位法一样,给出 $R+S+T-1$ 个初值或附加条件或求伪解。

5 方法综述

在一般偏差特性的假定条件下,前面讨论的四种方法存在一定意义下的等价关系,这对 GPS 定位实践有一定的指导意义。但由于实际处理时,这些假定通常太保守,且系数阵存在秩亏的问题,而对多余参数进行模型化(相当于附加条件),从而可能破坏了它们的等价性。另外,每种方法的各自特点也使其有不同的应用方面。

基本相位法是最一般的方法,它可以保留所有的观测信息;观测值不存在几何相关性且利用率高;多点定位或定轨时易于实现;较容易顾及测站时钟和卫星时钟的偏差特性。故在 GPS 轨道确定和精密定位中,通常采用这种方法。但由于其周跳处理复杂,计算量大而在一般的大地测量和工程测量等定位中很少采用。

差分法对不易顾及的偏差量消除效果好,处理模型简单等特点,使其具有广泛的应用。现阶段大多数软件都是采用差分法,特别是基线处理软件。然而由于差分观测值存在几何相关性;对取站际差的差分法要引入基线矢量作为基本未知量等限制了差分法在网定位中的应用。对每种类型的差分,也有其特点,应用时往往联合使用。

Goad 非差法是针对基本相位法的秩亏问题而提出的,具有基本相位法的特点,同时解决了秩亏问题。对不太关心求解多余参数的情况下,可采用该法。

中心化非差法是针对差分法在网定位中应用的局限性和 Goad 非差法未知数较多、计算量大而提出的。由于中心化观测值的几何相关性可当成相互独立来处理,平差时引入的是位置参数作为基本未知量,使中心化非差法比差分法在网定位应用中有明显优势;有效参数与多余参数的计算可分

步进行，从而大大地减少了计算工作量。

模糊函数法也是处理载波相位观测值的一种方法，只用于解基线矢量。由于采用迭代法计算，且只需要观测数据的分数相位，故当基线矢量先验精度很高时，只需很少观测数据即可获得相当高精度的结果；先验精度较差，试探次数增多；先验精度很差，此法无效。由于该法对周数偏差和时钟偏差不敏感，故一般先解出基线矢量，再求解时钟的同步差等参数。数据处理实践表明，其精度与双差法相当。

6 结　论

本文对多余参数消除理论的等价条件作了改进，使之更具一般性。

在一般的偏差特性假定条件下，基本相位法、差分法、中心化非差法和 Goad 非差法之间存在等价关系，由此得到的结论对理解 GPS 载波相位观测值处理方法及 GPS 定位实践具有一定的指导意义。

本文对各种方法的综述，在 GPS 数据处理实践中可作为选择处理方法的原则加以考虑。

参 考 文 献

[1] Goad C C. Precise Relative Position Determination Using Global Positioning System Carrier Phase Measurements in a Nondifference Mode. Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, MD, April, 1985(I). 347～356

[2] Grafarend E W, Schaffrin B. Generating Classes of Equivalent Linear Models by Nuisance Parameter Elimination-Application to GPS Observations. Proceedings of the Forth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Austin, TX, April 1986(I). 721～734

[3] Lindlohr W, Wells D E. GPS Design Using Undifferenced Carrier Phase Observations. Manuscripta Geodetica, 1985, 10(4): 255～295

[4] Remondi B W. Using the Global Positioning System(GPS) Phase Observable for Relative Geodesy: Modelling, Processing and Results. Ph. D Dissertation, Center for Space Reseach, the University of Texas at Austin, 1984.

[5] Shi P H, Han S W. Centralized Undifferenced Method for Network Adjustment. to be presented.

[6] Wells D E, Lindlohr W, Schaffrin B, Grafarend E. GPS Design Undifferenced Carrier Beat Phase Observations and the Fundamental Differenced Theorem. Department of Surveying Engineering Technical Report No. 116, UNB, Fredericton N. B., 1987.

[7] 魏子卿. 相位测量的数学模型与定位软件概述，宁波讲学讲稿，1988.

[8] 施品浩，韩绍伟. GPS 单差半短弧法单点定位. 第二届空间大地测量学术讨论会(西安)，1988.

[9] 王松桂. 线性模型的理论及其应用. 安徽教育出版社，1987.

Equivalence of the Methods for GPS Data Processing with Carrier Phase Observations

Han Shaowei

Abstract

Methods for GPS data processing with carrier phase observations are dealt with in this paper. There are some relationships existing among these processing methods. The equivalent conditions for eliminating nuisance parameters are further extended to fit centralized undifferential method as well as various differential methods. Based on these conditions, the equivalence is proved among original undifferential method, differential method, centralized undifferential method and Goad undifferential method. Finally, after a review of GPS data processing methods, some conclusions are made and they should be useful to various GPS applications for selecting suitable method in data processing.

【Key words】 GPS carrier phase observation; data processing; equivalence