

# 应用于复合型脆断的综合断裂理论

李 波 扬

## 摘要

现有的复合型裂纹扩展断裂准则大多只考虑了裂纹尖端附近某一点处的某个力学参量。本文同时考虑了正应力、剪应力及塑性区的影响，并在此基础上提出了一个新的复合型断裂理论——综合断裂理论。同近年来的实验数据进行比较，得到了与实验十分接近的结果，并且还解释了其它理论所不能解释的实验现象。

**【关键词】** 复合型裂纹；断裂准则；脆性断裂

## 1 引言

复合型裂纹的断裂问题是工程上需要解决的一个重要问题，也是断裂力学研究最基本的问题之一。目前，主要的复合型断裂准则有最大周向拉应力理论( $[\sigma_\theta]_{\max}$ 理论)<sup>[1]</sup>、能量释放率理论( $[G]_{\max}$ 理论)<sup>[2,3]</sup>、应变能密度因子理论( $[S]_{\min}$ 理论)<sup>[4]</sup>三种。这些理论曾对断裂理论的应用和发展起过较大的作用，而且目前仍被广泛地应用。但是，这些断裂准则或多或少都带有一定的片面性和缺陷。进一步研究新的复合型断裂准则并根据这些准则寻找裂纹开裂角和开裂荷载，或根据这些准则寻找裂纹按需要进行有用启裂的条件，在理论上和实践中都具有重要的意义。

## 2 综合断裂理论及其物理意义

同材料力学的强度理论一样，各种断裂准则都应具有明确的物理意义。现有的复合型断裂理论大多只是考虑了裂纹尖端附近某一点处的某个力学参量（如正应力、剪应力、应变、塑性区尺寸等）的变化。实际上，许多脆性材料启裂前在裂纹尖端已存在着塑性区，这种塑性区的存在可以阻止脆性断裂的裂纹扩展。因此，促使裂纹扩展的因素不是单一的，而是一种包含多个因素的共同作用。我们认为，裂纹启裂主要是在剪应力和正应力的共同作用下发生的。这点同微观断裂理论中产生脆性裂纹的位错理论是一致的<sup>[7]</sup>。

现有的最大周向应力理论<sup>[1]</sup>、最大周向应变理论<sup>[8,9]</sup>、最大剪应力理论<sup>[10]</sup>、最小歪变能密度因子理论<sup>[11]</sup>、最小应变能密度因子理论<sup>[4]</sup>等都是在原来的材料宏观强度理论基础上发展起来的。在

某种意义上还可以认为同时考虑剪应力、正应力的综合断裂理论是继承了莫尔强度理论的思想。在材料强度理论中,材料主要是因为剪应力和正应力的共同作用而导致破坏,这点已在文献[15]中令人信服地证实了。

另一方面,目前研究的复合型断裂判据虽然是针对脆性材料的复合型断裂问题,但实际对裂纹尖端处的特征值分析表明,裂纹尖端前沿的应力形式为  $\sigma_{ij} \sim \gamma^{\frac{1}{2}} f(\theta)$ , 当  $\gamma \rightarrow 0$  时存在着数学上的奇异性。这说明在裂纹尖端存在着一个围绕裂纹尖端扩展的塑性区,这个塑性是真实存在的,在研究复合型断裂理论时考虑到这个塑性区的影响是必要的。我们假定沿着等八面体剪应力线上分布的切向拉应力存在着一个最大值,裂纹将沿此最大值所在方向扩展。由于在裂纹尖端弹塑性区域交界线上具有相同的八面体剪应力,所以也可以理解为裂纹沿弹塑性交界线上最大切向正应力方向启裂。当切向正应力最大值达到临界值时,裂纹开始失稳扩展。

综合断裂理论的数学表达:

由断裂力学<sup>[5]</sup>可知在平面应变条件下,裂纹尖端附近的应力分量为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}) - K_1 \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\cos 3\theta}{2})] \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}) + K_1 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}] \\ \sigma_z = \frac{2\gamma}{\sqrt{2\pi r}} [K_1 \cos \frac{\theta}{2} - K_1 \sin \frac{\theta}{2}] \\ \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_1 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2})] \\ \tau_{yz} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{zx} = \frac{-K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$K_1, K_{\pm}, K_{\pm}$  分别为 I, II, III 型裂纹的应力强度因子,  $\gamma$  为泊桑比。

由塑性理论

$$\tau_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{3} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得:

$$\tau_8 = \frac{1}{2 \sqrt{3\pi r}} [b_{11} \cdot K_1^2 + 2b_{12}K_1 K_{\pm} + b_{22}K_{\pm}^2 + b_{33}K_{\pm}^2]^{1/2} \quad (3)$$

其中:

$$b_{11} = \eta + 1 + \eta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$b_{12} = \sin 2\theta - \eta \sin \theta$$

$$b_{22} = 1 + \eta - \eta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta$$

$$b_{33} = 4$$

$$\eta = \frac{2}{3} (1 - 2\gamma)^2$$

令

$$\tau_8 = C(\text{常数}) \quad (4)$$

利用 G. C. Sih 和 Hartranft 的研究结果:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\gamma - \sin^2 \frac{\theta}{2}) - K_1 \sin \frac{\theta}{2} (3 + 2\gamma - 3\sin^2 \frac{\theta}{2}) \right. \\ \left. + \sqrt{[K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\gamma - \sin^2 \frac{\theta}{2}) - K_1 \sin \frac{\theta}{2} (3 - 2\gamma - 3\sin^2 \frac{\theta}{2})]^2 + 4K_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} \quad (5)$$

由(3)、(4)、(5)式得等八面体剪应力线上分布的切向应力公式:

$$\sigma_\theta = \frac{\sqrt{6} \cdot C}{2[b_{11}K_1^2 + 2b_{12}K_1K_2 + b_{22}K_2^2 + b_{33}K_3^2]^{1/2}} \left\{ K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\gamma - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right. \\ \left. - K_1 \sin \frac{\theta}{2} (3 + 2\gamma - 3\sin^2 \frac{\theta}{2}) + \right. \\ \left. \sqrt{[K_1 \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\gamma - \sin^2 \frac{\theta}{2}) - K_1 \sin \frac{\theta}{2} (3 - 2\gamma - 3\sin^2 \frac{\theta}{2})]^2 + 4K_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} \quad (6)$$

(1)开裂角由下式确定:

$$\left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right)_{K_i} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta^\#} < 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

(2)裂纹起始扩展条件:沿着开裂方向,当  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_\theta)_{\theta=\theta^\#}$  达到临界值时裂纹起始扩展。

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_\theta)_{\theta=\theta^\#} = K_{ic} \quad (8)$$

### 3 预测结果与实验比较

(1)纯 I 型:  $K_1 \neq 0, K_2 = K_3 = 0$

由(6)、(7)式得开裂角  $\theta^\#$

$$\theta^\# = 0$$

由(8)式

$$K_{ic} = \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta$$

断裂条件

$$K_1 \geq K_{ic}$$

(2)纯 II 型:  $K_1 \neq 0, K_2 = K_3 = 0$

由(6)、(7)式得开裂角  $\theta^\#$

$$\theta^\# = -82.6^\circ \quad (\gamma = \frac{1}{3})$$

由(8)式得:(见附表)

(3)纯 III 型:  $K_1 \neq 0, K_2 = K_3 = 0$

附表 预测结果与实验<sup>[12]</sup>结果比较

$$(\gamma = \frac{1}{3})$$

	开裂角( $-\theta^*$ )°	$K_{Ic}/K_{Ic}$
实验结果	82	0.91
本文	82.6	0.893
$[\sigma_e]_{\max}$ 理论	70.5	0.87
$[G]_{\max}$ 理论	72	0.75
$[S]_{\min}$ 理论	83.6	0.916

由(6),(7)式得开裂角  $\theta^*$

$$\theta^* = 0$$

由(8)式得:

$K_{Ic} = K_{Ic}$  即  $K_{Ic}/K_{Ic} = 1$   
文[12]的两次实验结果分别为  $K_{Ic}/K_{Ic} = 0.93$  和  $K_{Ic}/K_{Ic} = 1.04$ 。

(4) 斜裂纹单轴拉伸:(I-I复合型)

由(6),(7)式得开裂角  $\theta^*$  (见图1)。

由(8)式得开裂荷载(见图2)。

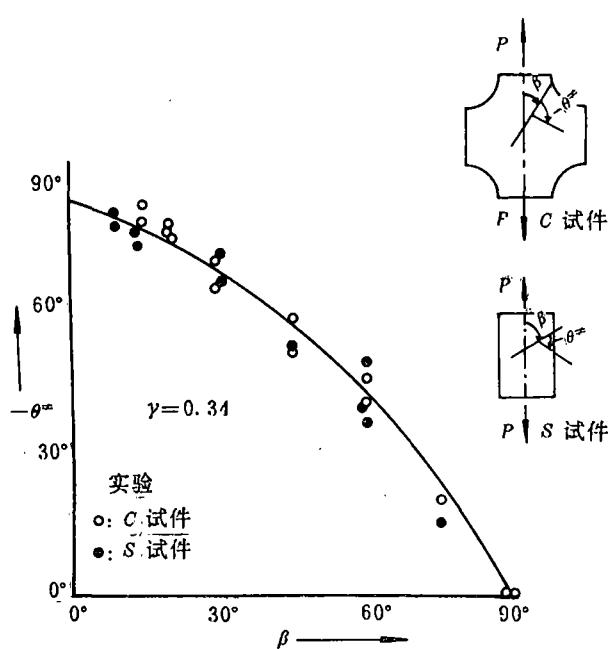


图1  $-\theta^*$  与  $\beta$  之间的关系  
(文[12]的实验值与理论曲线比较)

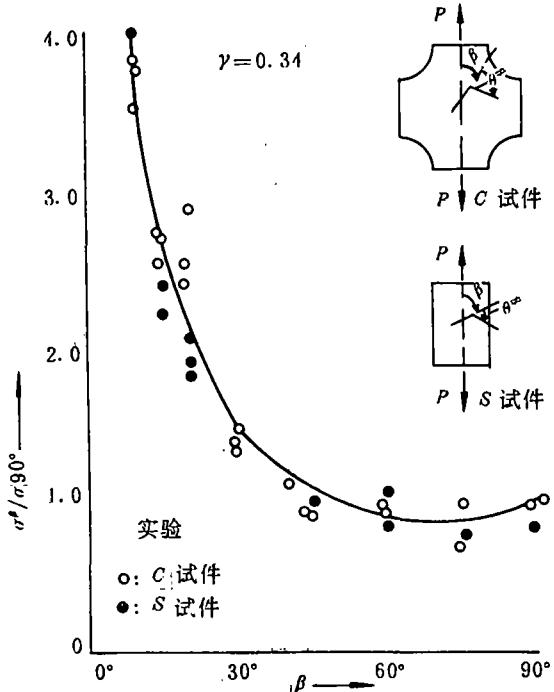


图2 临界应力与裂纹角的关系  
(文[12]的实验值与理论曲线比较)

综合断裂理论指出了这样一种结果, I, II 复合型最小极限荷载不是发生在裂纹与外加应力垂直的方向上( $\beta=90^\circ$ ),而是发生在  $\beta=70^\circ$ 左右,我们认为这是裂纹材料在一定的应力状态下剪应力和正应力共同作用的结果。本理论还认为其危险截面不是目前断裂判据<sup>[1~4]</sup>认为的  $\beta=90^\circ$ ,而是在  $\beta=65^\circ\sim75^\circ$ 之间。这一点与实验结果吻合得比较好,反之也解释了目前断裂理论所不能解释的实验现象。

#### 4 结语

作为研究裂纹启裂的断裂理论应具有明确的物理意义和简单的算式,而且其结果还要与实验

数据相吻合。目前的复合型断裂理论在不同程度上都存在着一些不足的地方：“G理论需要解复杂的边值问题<sup>[13]</sup>；S理论人们认为其物理意义不明确<sup>[8-14]</sup>； $[\sigma_\theta]_{\max}$ 理论由于与材料的泊桑比无关，无法分清平面应力和平面应变的条件，同时也没有考虑到实际上存在的塑性区影响<sup>[15]</sup>。这些理论上的欠缺、物理概念的模糊导致了许多争议。本文针对目前的复合型断裂理论进行了分析，在同时考虑了剪应力、正应力及塑性区的影响等因素后提出了一个新的综合断裂理论。该理论有比较明确的物理意义，同近年来的实验结果符合得较好，并且解释了某些目前理论解释不了的实验现象。可以认为是比较合理的复合型断裂理论。同时，运用该理论分析三维介质中复合应力裂纹扩展的问题，所预测的结果同实验值也符合得较好，这将另文研究。

对于李强兴副教授在计算中所给予的帮助表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Erdogan F and Sih G C. On the Crack Extension in Plate under Plane Loading and Transverse Shear, ASME, J. Basic Engng 85, 1963. 519~527
- [2] Palaniswamy K and Knanss E G. Propagation of a Crack under General in Plane Tension, Int. J. Fracture Mech. 8, 1972. 114~117
- [3] Hussain M A, Pu S L and J Under Wood, Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode-I and-II, ASTMSTP 560, 1974. 2~28
- [4] Sih G S. Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts, Engng Fracture Mech, 5, 1973. 365~377
- [5] 高庆. 工程断裂力学. 重庆大学出版社, 1986. 8. 88~89
- [6] Hartranft R J and Sih G C. Stress Singularity for a Crack with an Arbitrarily Curved Front, Engng. Fracture Mech., 9. 1977. 705~718
- [7] Stroh A N. A Theory of Fracture of Metals Advances in Physics. 6. 24. 1977.
- [8] 樊蔚勋. 复合型脆断的周向应变因子判据. 应用数学和力学, 1982(3).
- [9] 汪懋骅. 复合型断裂应用准则. 固体力学学报, 1982(4).
- [10] 林拜松. 滑开型断裂的复合型脆断判据. 应用数学和力学, 1985(6).
- [11] Jayatilake A. des, Engng. Fracture Mech, 19, 1984.
- [12] Uede Y. Characteristics of Brittle Fracture under General Combined Modes, Proceeding of ICF International Symposium on Fracture Mechanics, (Beijing), 5, 1983.
- [13] Sih G C. Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems Intern. J. Frac, 10. 1974.
- [14] Finnie I and Weiss H O. Some Observations on Sih's Strain Energy Density Approach for Fracture Prediction, Intern. J. Frac, 10. 1974.
- [15] T. C. 皮萨林科等著. 复杂应力状态下的材料变形与强度. 江明行译. 科学出版社, 1983. 3.

# A Synthetic Fracture Criteria Applied to the Mixed Mode Crack Problems

*Li Boyang*

## Abstract

The synthetic fracture criteria is based on the normal—stress, shearing—stress and the impact of plastic area. The new fracture criteria is proposed here to replace the one where only the singular term is considered.

The conditions of application of the synthetic fracture criteria to the mixed mode crack problems have been given by the analysis and comparison between the theoretical solutions and experiment results.

The result that is used in conjunction with the synthetic fracture criteria for problem of I — I mixed mode state is satisfying.

**【Key words】** mixed mode crack ; fracture criteria ; elastic fracture