DOI:10.13203/j.whugis1990.04.006

第15卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.15 No.4
1990年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1990

各种形式的多体时空大地测量边值问题及其解

李 作 发

摘　　要

本文提出了多体时空大地测量边值问题的各种形式，并且在球近似的假设下，给出了边值问题的解，本文还对所得到的解进行了讨论，结果表明：已有的一些解可以作为本文的特例包括在内。

【关键词】 多体时空自由边值问题；固定边值问题；自由—固定边值问题；固定—自由边值问题

1 引　　言

近几年来，多体时空大地测量边值问题的研究取得了进展[1]。

所谓多体时空大地测量边值问题是将地球形状及外部重力场随时空变化考虑在内的一种大地测量边值问题，换言之，这种边值问题将地球外部质量（如太阳、月亮）、它们与地球的相对运动，以及地球自身的变化等诸因素也一起考虑在内，因此，这种边值问题更符合实际，并且它已在固体潮的研究中得到了应用[1]，因而，深入研究和探讨这种边值问题在理论上和实际上都是十分必要的。但在已有的研究中，只利用了随时空变化的时空重力位和时空重力资料。

随着空间技术及高精度测量仪器的发展，重力梯度将成为未来最理想的数据之一[2]，而且高精度的卫星重力梯度仪不久将问世，因此，在多体时空边值问题中，有必要将这种资料考虑在内。

为此，本文首先提出将随时空变化的时空重力位、时空重力、时空垂直重力梯度考虑在内的多体时空大地测量边值问题的各种形式，并且进行了简化，其次，在球近似的假设下，且不考虑地形和卫星轨道面形状的影响，导出了边值问题的解。最后，对所导出的解进行了一些讨论。

收稿日期：1989－08－28

由于本文将原有的两种边值问题扩充为四种不同类型共36种边值问题，故可以根据不同的资料，选取不同的边值问题来确定时空重力场和地球表面形状。例如，假设已在地面上测定了时空重力，在卫星轨道面上测定了时空重力梯度，则可以根据由这两种资料导出的边值问题进行解算。因此，本文提出的边值问题适用范围更加广泛。

2 多体时空大地测量边值问题的叙述和简化

为书写方便，以下将多体时空大地测量边值问题简写为边值问题。

2.1 自由边值问题的叙述和简化

首先，给出自由边值问题的表述：

［问题1］ 假设在地球表面S以及外部空间中的某个闭曲面（卫星轨道面）S_e上分别给定时空位$W(x, t)$，时空重力$g(x, t)$和时空垂直重力梯度$V(x, t)$中的任意两个（x为点在t时刻的坐标），要求确定随时空变化的S和S_e的形状及其S与S_e之间的空间S_e-S的重力场。

由于这种边值问题相当复杂，因此，首先必须将它们线性化。按照通常的线性化方法进行处理，并假设采用球近似，则可以得到$S(S_e)$的近似面$\Sigma(\Sigma_e)$上的基本边界条件如下：

$$a_\alpha T(x_0, t) - b_\alpha \frac{\partial T}{\partial r}(x_0, t) + c_\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(x_0, t)$$

$$= a_\alpha \Delta W(x_0, t) + b_\alpha \Delta g(x_0, t) + c_\alpha \Delta V(x_0, t) \tag{1}$$

式中，$T(x, t)$，$\Delta W(x_0, t)$，$\Delta g(x_0, t)$和$\Delta V(x_0, t)$分别为时空扰动位，时空异常位、时空重力异常和时空垂直重力梯度异常，即

$$T(x, t) = W(x, t) - U(x, t) \tag{2}$$

$$\begin{cases} \Delta W(x_0, t) = W(x, t) - U(x_0, t) \\ \Delta g(x_0, t) = g(x, t) - \gamma(x_0, t) \\ \Delta V(x_0, t) = V(x, t) - \nu(x_0, t) \end{cases} \tag{3}$$

上式中，$U(x, t)$，$\gamma(x, t)$，$\nu(x, t)$分别为时空正常重力位、时空正常重力和时空垂直正常重力梯度。x_0是$\Sigma(\Sigma_e)$上与x对应的一点，γ为坐标原点到曲面点x_0的向径，系数a_α，b_α，c_α（$\alpha=1, 2, 3$），见表1。

表 1

边界条件类型	$\alpha(\beta)$	$a_\alpha(a_{e\beta})$	$b_\alpha(b_{e\beta})$	$c_\alpha(c_{e\beta})$
$W-g$	1	2	$-R$	0
$V-W$	2	6	0	$-R^2$
$V-g$	3	0	$-3R$	R^2

注：表1中R是Σ(或Σ_e)的平径半径

为书写简便，以下略去符号$(x,\ t)$。

根据上述线性化结果，问题1又可以用公式形式表示如下：

［问题2］ 求在空间Σ_e-Σ内的时空扰动位，使得：

$$\begin{cases}\Delta T = 0 \\ a_\alpha T - b_\alpha \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = a_\alpha \Delta W + b_\alpha \Delta g + c_\alpha \Delta V \triangleq f_1 & \text{在}\Sigma\text{上} \\ a_{e_\beta} T - b_{e_\beta} \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_{e_\beta} \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = a_{e_\beta} \Delta W_e + b_{e_\beta} \Delta g_e + c_{e_\beta} \Delta V \triangleq f_{e_1} & \text{在}\Sigma_e\text{上}\end{cases} \tag{4}$$

式中，a_α，b_α，c_α和a_{e_β}，b_{e_β}，c_{e_β}（α，$\beta=1$，2，3）可由表1分别取$R=R_1$（Σ的平均半径）和$R=R_2$（Σ_e的平均半径）得到。一旦T求得，$\Sigma(\Sigma_e)$到$S(S_e)$的距离$\xi(\xi_e)$可由广义Bruns公式。

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{T_\Sigma - \Delta W}{\gamma_\Sigma} \\ \xi = \dfrac{\dfrac{\partial T_\Sigma}{\partial r} + \Delta g}{\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_\Sigma} \\ \xi = \dfrac{\dfrac{\partial^2 T_\Sigma}{\partial r^2} - \Delta V}{\left(\dfrac{\partial^2 \gamma}{\gamma r}\right)_\Sigma}\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\xi_e = \dfrac{T_{\Sigma_e} - \Delta W_e}{\gamma_{\Sigma_e}} \\ \xi_e = \dfrac{\dfrac{\partial T_{\Sigma_e}}{\partial r} + \Delta g_e}{\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_{\Sigma_e}} \\ \xi_e = \dfrac{\dfrac{\partial^2 T_{\Sigma_e}}{\partial r^2} - \Delta V_e}{\left(\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2}\right)_{\Sigma_e}}\end{cases} \tag{5}$$

中与之对应的一个公式中求得。

2.2 固定边值问题的叙述和简化

固定边值问题可以表达为：

［问题3］ 假设地球表面S以及外部空间中某一闭曲面（卫星轨道面）S_e已知，并且在S和S_e上给定时空重力位W、时空重力g和时空垂直重力梯度V中的任意一个，确定空间S_e-S内随时间变化的重力场。

同样，在球近似的假设下，问题3可以用公式表示为：

［问题4］ 求在空间S_e-S内的时空扰动位T，使得：

$$\begin{cases}\Delta T = 0 \\ a^*_\alpha T - b^*_\alpha \dfrac{\partial T}{\partial r} + c^*_\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = a^*_\alpha \delta W + b^*_\alpha \delta g + c^*_\alpha \delta V \triangleq f_2 & \text{在}S\text{上} \\ a^*_{e_\beta} T - b^*_{e_\beta} \dfrac{\partial T}{\partial r} + c^*_{e_\beta} \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = a^*_{e_\beta} \delta W_e + b^*_{e_\beta} \delta g_e + c^*_{e_\beta} \delta V_e \triangleq f_{e_2} & \text{在}S_e\text{上}\end{cases} \tag{6}$$

式中，δW，δg和δV分别为时空位扰动、时空重力扰动和时空垂直重力梯度扰动，即

$$\begin{cases} \delta W = W(x,\ t) = U(x,\ t) \\ \delta g = g(x,\ t) - \gamma(x,\ t) \\ \delta V = V(x,\ t) - \nu(x,\ t) \end{cases} \tag{7}$$

系数a_α^*，b_α^*，c_α^*和$a_{e\beta}^*$，$b_{e\beta}^*$，$c_{e\beta}^*$ (α，$\beta = 1$，2，3）可由表2分别取R为S和S_e的平均半径而得到。

表 2

边界条件类型	$\alpha(\beta)$	$a_\alpha^*(a_{e\beta}^*)$	$b_\alpha^*(b_{e\beta}^*)$	$c_\alpha(c_{e\beta}^*)$
W	1	1	0	0
g	2	0	$-R$	0
V	3	0	0	R^2

2.3 自由—固定边值问题和固定—自由边值问题的叙述和简化

这两类边值问题可以分别叙述如下：

［问题5］（自由—固定边值问题）假设地球表面S未知，而闭曲面S_e已知，并且给定S上的W，g和V中的任意两个，以及在S_e上给定它们中的任意一个，确定随时空变化的S形状及空间S_e-S中的重力场。

［问题6］（固定—自由边值问题）假定S已知，而S_e未知，并且在S上给定W，g和V中的任意一个，以及在S_e上给定它们中的任在两个，要求确定随时空变化的S_e形状以及空间S_e-S内的重力场。

类似地，在球近似的假设下，以上两个问题可以分别用公式形式表示为：

［问题7］ 求在空间S_e-Σ内的时空扰动位T，使得

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ a_\alpha T - b_\alpha \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial r_2} = f_1 \quad 在\Sigma上 \\ a_{e\beta}^* T - b_{e\beta}^* \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_{e\beta}^* \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = f_{e2} \quad 在S_e上 \end{cases} \tag{8}$$

一旦Σ上的T求得，ξ可由(5)式中与之对应的一个公式求得。

［问题8］ 求在Σ_e-S内的时空扰动位T，使得

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ a_\alpha^* T - b_\alpha^* \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_\alpha^* \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = f_2 \quad 在S上 \\ a_{e\beta} T - b_{e\beta} \dfrac{\partial T}{\partial r} + c_\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} = f_{e1} \quad 在\Sigma_e上 \end{cases} \tag{9}$$

求出Σ_e上的T后，ξ_e可由（5）式中与之对应的一个公式求得。

3 边值问题的解

下面，我们来求问题2，4，7和8的解。

由于地球表面很复杂，且卫星轨道面也不是规则的球面，故作为重力场的首阶近似，在以下推导中，没有顾及地球和卫星轨道面的影响，即在以上各边值问题中，边值条件认为在δ：$r=R_1$和δ_e：$r=R_2$两个球面上。

首先导出问题2的解。

在$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$中，将时空扰动位$T$展成球函数级数形式：

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a_{nm}\left(\frac{r}{R_2}\right)^n+b_{nm}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]Y_{nm}(\lambda,\ \phi) \tag{10}$$

式中，

$$Y_{nm}=\begin{cases}\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & m>0\\ \sqrt{2n+1}\,P_n(\sin\phi) & m=0\\ \overline{P}_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\lambda & m<0\end{cases} \tag{11}$$

$\overline{P}_{nm}(\sin\phi)$是规格化后的缔合球函数，$a_{nm}$和$b_{nm}$为与时空有关的球函数系数。

将(10)式代入（4）式的两个边值条件中，得：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(A_n^{\alpha}a_{nm}q^n+B_n^{\alpha}b_{nm})Y_{nm}=f_1\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{8}\sum_{m=-n}^{n}(A_n^{\beta}a_{nm}+B_n^{\beta}b_{nm}q^{n+1})Y_{nm}=f_e,\end{cases}$$

式中，　$q=\dfrac{R_1}{R_2}$，

$$\begin{cases}A_n^{\alpha}=a_{\alpha}-\dfrac{n}{R_1}b_{\alpha}+\dfrac{n(n-1)}{R_1^2}c_{\alpha}\\ B_n^{\alpha}=a_{\alpha}+\dfrac{(n+1)}{R_1}b_{\alpha}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{R_1^2}c_{\alpha}\\ A_n^{\beta}=a_{e\beta}=\dfrac{n}{R_2}b_{e\beta}+\dfrac{n(n-1)}{R_2^2}c_{e\beta}\\ B_n^{\beta}=a_{e\beta}+\dfrac{(n+1)}{R_2}b_{e\beta}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{R_2^2}c_{e\beta}\end{cases}, \tag{13}$$

α，$\beta=1$，2，3，系数$A_n^{\alpha}(A_n^{\beta})$、$B_n^{\alpha}(B_n^{\beta})$列在表3中。

表 3

α (β)	A_n^α (A_n^β)	B_n^α $B(_n^\beta)$
1	$n+2$	$-(n-1)$
2	$-(n^2-n-6)$	$-(n^2+2n-6)$
3	$n(n+2)$	$(n+1)(n-1)$

利用球函数的正交性，得：

$$\begin{cases} A_n^\alpha q^n a_{nm} + B_n^\alpha b_{nm} = \dfrac{1}{4\pi R_1^2}\displaystyle\int_\sigma f_1 Y_{nm}(\lambda',\ \phi')\mathrm{d}\delta \\ A_n^\beta a_{nm} + B_n^\beta q^{n+1} b_{nm} = \dfrac{1}{4\pi R_2^2}\displaystyle\int_{\sigma_e} f_{e_1} Y_{nm}(\lambda',\ \phi)\mathrm{d}\delta_e \end{cases} \tag{14}$$

$$(n=0,\ 1,\ \cdots,\ +\infty,\ m=-n,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ n)$$

解方程(14)，得：

$$\begin{cases} a_{nm} = \dfrac{B_n^\beta q^{n+1}\dfrac{1}{4\pi R_1^2}\displaystyle\int_\sigma f_1 Y_{n1}(\lambda',\ \phi')\mathrm{d}\delta - B_n^\alpha \dfrac{1}{4\pi R_2^2}\displaystyle\int_{\sigma_e} f_{e_1} Y_{n1}(\lambda',\phi')\mathrm{d}\delta_e}{A_n^\alpha B_n^\beta q^{2n+1} - A_n^\beta B_n^\alpha} \\ b_{nm} = \dfrac{-A_n^\beta \dfrac{1}{4\pi R_1^2}\displaystyle\int_\sigma f_1 Y_{nm}(\lambda'\phi')\mathrm{d}\delta + A_n^\alpha q^n \dfrac{1}{4\pi R_2^2}\displaystyle\int_{\sigma_e} f_{e_1} Y_{nm}(\lambda',\ \phi')\mathrm{d}\delta_e}{A_n^\alpha B_n^\beta q^{2n+1} - A_n^\beta B_n^\alpha} \end{cases} \tag{15}$$

$$(n=0,\ 1,\ \cdots,\ +\infty,\ m=-n,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ n)$$

将（15）式代入（10）式，并利用球函数加法定理，经过整理，得到边值问题 2 的解如下：

$$T = \frac{1}{4\pi R_1^2}\int_\sigma f_1 S_1(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta + \frac{1}{4\pi R_2^2}\int_{\sigma_e} f_{e_1} S_{e_1}(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta_e \tag{16}$$

式中：

$$\begin{cases} S_1(r,\ \psi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\left[B_n^\beta q^{n+1}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n - A_n^\beta\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{A_n^\alpha B_n^\beta q^{2n+1} - A_n^\beta B_n^\alpha} P_n(\cos\psi) \\ S_{e_1}(r,\ \psi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\left[-B_n^\alpha\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n + A_n^\alpha q^n\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{A_n^\alpha B_n^\beta q^{2n+1} - A_n^\beta B_n^\beta} P_n(\cos\psi) \end{cases} \tag{17}$$

用类似的方法，可以求得问题 4 的解：

$$T = \frac{1}{4\pi R_1^2}\int_\sigma f_2 S_2(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta + \frac{1}{4\pi R_2^2}\int_{\sigma_e} f_{e_2} S_{e_2}(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta_e \tag{18}$$

式中：

$$
\begin{cases}
S_2(r,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)\left[D_n^{\beta}q^{n+1}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n-C_n^{\beta}\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{C_n^{\alpha}D_n^{\beta}q^{2n+1}-C_n^{\beta}D_n^{\alpha}}P_n(\cos\psi) \\
S_{e_2}(r,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{8}\dfrac{(2n+1)\left[-D_n^{\alpha}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n+C_n^{\alpha}q^n\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{C_n^{\alpha}D_n^{\beta}q^{2n+1}-C_n^{\beta}D_n^{\alpha}}P_n(\cos\psi)
\end{cases}
\quad (19)
$$

(19) 式中的系数$C_n^{\alpha}(C_n^{\beta})$，$D_n^{\alpha}(D_n^{\beta})$（$\alpha$，$\beta=1$，2，3）见表4。

表 4

α (β)	C_α^n (C_n^{β})	D_n^{α} (D_n^{β})
1	1	1
2	$-n$	$-(n+1)$
3	$n(n-1)$	$n(n+1)$

同样，也可以得到问题7的解：

$$T=\frac{1}{4\pi R_1^2}\int_{\sigma}f_1S_3(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta+\frac{1}{4\pi R_{\ }^2}\int_{\sigma_e}f_2S_3(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta_e \quad (20)$$

式中，

$$
\begin{cases}
S_3(r,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)\left[D_n^{\beta}q^{n+1}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n-C_n^{\beta}\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^n\right]}{A_n^{\alpha}D_n^{\beta}q^{2n+1}-B_n^{\alpha}C_n^{\beta}}P_n(\cos\psi) \\
S_{e_3}(r,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)\left[-B_n^{\alpha}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n+A_n^{\alpha}q^n\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{A_n^{\alpha}D_n^{\beta}q^{2n+1}-B_n^{\alpha}C_n^{\beta}}P_n(\cos\psi)
\end{cases}
\quad (21)
$$

和问题8的解：

$$T=\frac{1}{4\pi R_1^2}\int_{\sigma}f_2S_4(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta+\frac{1}{4\pi R_2^2}\int_{\sigma_e}f_{e_1}S_{e_4}(r,\ \psi)\mathrm{d}\delta_e \quad (22)$$

式中：

$$
\begin{cases}
S_4(r,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)\left[B_n^{\beta}q^{2n+1}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n-A_n^{\beta}\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^n\right]}{C_n^{\alpha}B_n^{\beta}q^{2n+1}-A_n^{\beta}D_n^{\alpha}}P_n(\cos\psi) \\
S_{e_4}(\gamma,\ \psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)\left[-D_n^{\alpha}\left(\dfrac{r}{R_2}\right)^n+C_n^{\alpha}q^n\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^{n+1}\right]}{C_n^{\alpha}B_n^{\beta}q^{2n+1}-A_n^{\beta}D_n^{\alpha}}P_n(\cos\psi)
\end{cases}
\quad (23)
$$

至此，我们已求出了问题2，4，7和8的解。

顺便指出，由于$S_i(r,\ \psi)$ 和 $S_{e_i}(r,\ \psi)$（$i=1$，2，3，4）的勒让德级数的表达式

中含有q，故在一般情况下难以将它们表示成封闭形式。

4 讨　论

以下仅对几种特殊情形进行讨论：

（1）在（16）式中，取$a_1=2$，$b_1=-R_1$，$c_1=0$和$a_{e_1}=2$，$b_{e_1}=-R_2$，$c_{e_1}=0$，则得到文[1]中的（4.24）式。

（2）在（18）式中，取$a_1^*=a_{e_1}^*=c_1^*=c_{e_1}^*=0$，$b_1^*=-R_1$，$b_{e_1}^*=-R_2$，则得到文[1]中的（5.31）式。

（3）在（16）或（20）式中，取$R_2=\infty$，此时$q=0$，并假设ΔW，Δg和ΔV与时间无关，则得到文[6]中的2(8)式。

（4）在(18)或(22)式中，取$R_2=\infty$，此时$q=0$，并假设δW，δg和δV与时间无关，则得到文[6]中的三式3(2)，3(6)和3(10)的统一形式。

（5）在(16)和(20)式中，取$R_2=\infty$，则(16)和(20)式相同。

（6）在(18)和(22)式中，取$R_2=\infty$，则(18)和(22)式相同。

（7）在(18)和(20)式中，取$R_1=0$，则(18)和(20)式相同。

（8）在(16)和(22)式中，取$R_1=0$，则(16)和(22)式相同。

由（1～4）可知：已有的一些解为本文解的特例。

5 结束语

本文在研究已有成果的基础上，提出了将垂直重力梯度资料也考虑在内的多体时空边值问题的各种形式。由于增加了一种新资料，并考虑到在不同的边界面上采用多种资料，从而将已有的两种边值问题扩充为四类共36种边值问题。当然，本文对这些边值问题的研究是初步的，许多问题仍有待于进一步研究。

参 考 文 献

[1] Grafarend. E & Sanso. F The Multibody space-time Geodetic Boundary Value Problem and the Honkasalo Term. Geophys. J. R. astr. Soc. 1984. 255～275

[2] Grafarend. E Space-time Operational Geodesy a Part of six Lectures on Geodery and Global Geodynamics. Delivered at the third International Summer school on Geodesy and Geodynamics. Frauenberg/Admont. August 30 to September 10, 1982.

[3] 夏哲仁，李　菲. 外部重力场逼近中的近代理论. 测绘学报，1990(1).

[4] Colombo O L & Kleusberg A. Application of an Orbiting Gravity Gradiometer. Bull Geod. Vol. 57, 1983(1).

[5] Rummel. R. Satelite Gradiometry Mathematical and Nicmerical Techniques in Physical Geodery. Edited by H Siinkel, 1986. 318～361.

[6] Grafarend. E, Heck. B & Knick. E The Free Versus Fixed Geodetic Boundary Value Problem for Different Combination of Geodetic Observation. Bull. Geod. Vol.59. 1985(1). 11～32

[7] 管泽霖，宁津生. 地球形状及其外部重力场. 测绘出版社，1981.

[8] 方　俊. 重力测量与地球形状学. 科学出版社，1975.

[9] 莫里茨. 高等物理大地测量学. 测绘出版社，1984.

[10] 海斯卡涅，莫里茨. 物理大地测量学. 测绘出版社，1979.

[11] Pick M, Picha J & Vyskocil. Theony of the Earth's Gravity Field. Elsevier, Amsterdam, 1973.

[12] Rdolf, Sigl. Introduction to Potential Theory. Abacus Press, 1985.

Various Formulations of Miltibody Space time Geodetic Boundary Value Problem and Their Solutions

Li　Zuofa

Abstract

In this paper, various formulation of multibody space-time geodetic boundary value problems are presented, and the solutions to them are derived by taking spherical approximation and neglecting topographic effects. Some discussions are made to these Solutions, which take some known solutions as special cases.

[Key Words] multibody space-time free boundary value problem; multibody space-time fixed boundary value problem; multibody space-time free-fixed boundary value problem; maltibody space-time fixed-free boundary value problem

(上接第62页)

egration need to be done particularly. The (terrain) height data in the innermost zone must be densified to decrease discrete error, the best method is bicubic spline function.

—— It is necessary to obtain detailed terrain height data in the innermost zone. (generally speaking, within 10～50km radius is enough).

—— It is highly important to consider the speed of computation. If there are many terain reduction points to be computated and the points are regular arranged, FFT algorithm is effective to save computer time.

[Key Words] terrain correction; residual terrain model; isostatic reduction; terrain reduction