DOI:10.13203/j.whugis1990.04.004

第15卷 第4期　　武汉测绘科技大学学报　　Vol.15 No.4
1990年 12月　Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping　Dec. 1990

精密重力网的定权及系统效应

杨　重　谊

摘　　要

对于精密重力网，如何确定各类观测值的权，如何剔除相对重力仪过多的参数，是目前尚未解决好的两个问题。本文讨论了利用方差分量估计确定各类观测值的权，利用几种假设检验选择附加参数的方法以及相关的几个问题。经过计算和比较分析，得到了较好的结果。

【关键词】 精密重力网；方差分量估计；假设检验

1　问题的提出

在建立精密重力网时（如国家重力基本网或精密区域网），一般使用精度达10μgal 级的绝对重力仪和相对重力仪 Lacoste-Romberg G（简称LCR-G）。因此在处理数据时，必然要顾及到多种误差影响，并采用不同于经典的重力网平差方法，才能使网的精度不受损失。但是一般认为还有以下两个问题需要解决。

（1）不同仪器观测值的权

重力网中不同仪器（每台绝对重力仪与多台 LCR-G 联测）观测值权的确定，对平差结果的精度是十分重要的。目前的方法通常是按厂家的标定精度再顾及实际观测中的经验精度来确定权。但是这样确定的权可能是不可靠的，第一是由于厂家标定精度不准确，仪器经长期使用后一些参数也可能发生变化；第二是由于没有准确的适合各级段差的重力比对基准，即使有一些基线场，也难以进行大量的重复检验。因此不同仪器的精度如何，看法不一致，也很难作出正确的结论。各类观测值的权不能准确确定，这与单位权方差不一致有关，本文针对这一情况，利用方差分量估计来解决这一问题。其基本思想就是在平差过程中不断调整各类观测值的单位权方差，以重新定权，使各类观测值的权在平差中逐步实现较好的匹配。

（2）附加参数的检验与选择

在建立精密重力网时使用的仪器，特别是 LCR-G，存在较多的参数。从函数模型的角度看，附加参数选择得越多，越能精细反映仪器的特性，但从统计分析角度看，附加参数选

收稿日期：1989—11—23

择过多，多余观测数变少，尤其是一些强相关的参数或量很小的参数，选入后反而对平差的精度带来不利影响。在客观上对一个具体重力网中使用的仪器，存在适当的附加参数，使平差后的实际精度最高。另一方面，若附加参数不加限制地选择过多，或者附加参数之间及与未知数之间强相关，会引起法方程状态的恶化（即出现病态方程），会降低计算精度甚至无法解算。本文利用几种统计检验方法，检验初选的附加参数是否显著，是否强相关等，剔除部分初选附加参数。另外还简单讨论在选定附加参数后，如何进一步克服过度参数化的问题。

2 方差分量估计与系统参数的检验选择

2.1 方差分量估计

重力网平差多采用间接平差，模型如下：

$$V = B\hat{X} - L, \qquad N\hat{X} = W \tag{1}$$

其中 $N = B^{T}PB, \qquad W = B^{T}PL$

法方程的解： $$\hat{X} = N^{-1}W \tag{2}$$

由于先验权 P 不准确，会对解 $\hat{X}$ 造成较大误差，利用方差分量估计是解决这一问题一个有效途径。根据观测值的不同来源，不同性质（如不同仪器观测）可分成 m 类，每一类有 n_i 个观测值，分别组成法方程

$$N_i\hat{X} = W_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于 P_i 确定得不恰当，使得 $\hat{\sigma}^2_{0i} \neq \hat{\sigma}^2_{0j}$ $(i \neq j)$，这时先平差求得 $V_i^{T}P_iV_i$，估算 $\hat{\sigma}^2_{0i}$。关系如下：

$$\begin{pmatrix} n_1 - 2\mathrm{tr}R_1 + \mathrm{tr}R_1{}^2, & \cdots, & \mathrm{tr}(R_1R_m) \\ \cdots & \cdots, & \cdots \\ \mathrm{tr}(R_mR_1), & \cdots, & n_m - 2\mathrm{tr}R_m + \mathrm{tr}R_m{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{01}{}^2 \\ \cdots \\ \hat{\sigma}_{0m}{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1{}^{T}P_1V_1 \\ \cdots \\ V_m^{T}P_mV_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $$R_i = N^{-1}N_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4}$$

由此解出 $\hat{\sigma}_{0i}{}^2$ 后可计算新的权：

$$P_i^{k+1} = (\hat{\sigma}^2_{01}/\hat{\sigma}^2_{0i})P_i^{k} \tag{5}$$

上式由 $k = 1$ 开始迭代，其结束条件是：

$$\left| |\hat{\sigma}^2_{01}|^{(k+1)} - |\hat{\sigma}^2_{0i}|^{(k+1)} \right| < \varepsilon \tag{6}$$

上述计算 $\hat{\sigma}^2_{0i}$ 的计算量较大，可采用简化公式，对这一方法，许多文献都作了详细讨论，本文不多赘述。

2.2 系统参数的检验与选择

精密重力测量所使用的重力仪都存在一些系统参数，如绝对重力仪的测时系统误差和波

长系统误差，LCR的格值误差和周期误差等。一般可将这些系统误差作为参数与重力网中的其它未知数一起求解。这一方法不需增加观测值，可减少一些实际基线检定。补偿在平差过程中自行实现。但是引入这些系统参数是否完全合适，对所求未知数及估计误差的影响如何，应予讨论。因为附加参数的选择在一定程度上具有经验性和不确定性，不同的选择会带来不同的结果。同时还会出现过度参数化，计算量也大大增加。因此需要加以检验予以适当剔除。检验和选择附加参数的方法很多，经初步讨论，在精密重力网中下面几种方法比较有效和可行。

（1）信噪比

精密重力仪的系统参数较多，不能都选用。究竟在数值上多大的附加参数才选用，可以据信噪比来确定。设σ_s为系统误差，σ_n为偶然误差，则信噪比为：

$$d=\sigma_s/\sigma_n \qquad (7)$$

根据文[1]和本文的讨论，当$\sigma_n\to 0$，即d很大时，平差效果非常好，这样的系统误差均可补偿。此时附加参数相当于自由未知数，即使强相关也不会恶化结果。当d减小时，平差结果逐渐变差。当$d<0.6$时的系统误差，引进似无必要。重力测量的偶然误差在测量中可以大致确定，而系统误差即可用附加参数代替，由平差初值或经验限值确定。

（2）模型合理性的检验[3]

设先验方差$\overline{S_0^2}$，方差估值S_0^2，多余观测数f

$$H_0: E(\overline{S_0^2})=S_0^2, \qquad H_1: (\overline{S_0^2})\neq S_0^2$$

χ检验 $\chi^2(f)=fS_0^2/\overline{S_0^2}=V^TPV/\overline{S_0^2}$ （8）

拒绝域 $\chi^2(f)<\chi^2(\alpha/2)$，$\chi^2(f)<\chi^2(1-\alpha/2)$

若由V求得的S_0^2接受H_0，则认为参数引入合理。若拒绝H_0，需重新调整线性组合后检验或用其它检验方法来确定。

（3）系统参数的必要性检验

由原模型求得V_1，f_1为多余观测数。令$T_0=V_1^TP_1V_1$，则$S_{01}^2=T_0/f_1$。引入附加参数后，$T_H=V^TPV$，多余观测数f，令$R=|T_H-T_0|$，$f_2=f-f_1$，R与T_0随机独立。

$H_0: E(S_{01}^2)=E(S_{02}^2)$， $H_1: E(S_{01}^2)<E(S_{02}^2)$

F检验 $F=S_{02}^2/S_{01}^2$ （9）

拒绝域 $F>F_{\alpha,f1,f2}$。

由此可检验引入附加参数后与原模型的差异。接受H_0表示不必引入，若接受H_1则需引入。各个参数可逐个或分组进行检验。

（4）附加参数显著性的检验[1]

当附加参数a正交（或近似正交）时

假设 $H_0: E(\hat{a}_i)=0$

t检验 $t=|\hat{a}_i|/S_0\sqrt{Q_{ii}}$ （10）

式中$\hat{a}_i$为第i个附加参数估值，$S_0^2=V^TPV/f$，Q_{ii}为协方差阵中相应于a_i的对角元。

拒绝域 $t<t_\alpha$

H_0成立时，表明a_i不显著，可剔除

当附加参数相关时，上述检验会导致错误，可先正交化，但计算量较大。这时可用 F 检验来检验一组（k 个）附加参数。

假设　$H_0: E(\hat{a}) = 0$，其中 $\hat{a}^{T} = (\hat{a}_{i+1}, \cdots, \hat{a}_{i+k})$

F 检验　$F = \hat{a}^{T} Q_{\hat{a}\hat{a}}^{-1} \hat{a} / (kS_0)$　（11）

若 $F > F_{\alpha, k, f}$ 时，剔除该组 $\hat{a}$。

（5）附加参数相关性检验

当附加参数之间或与未知数之间关相时，会严重影响方程的状态，致使精度下降，需要进行检验。

a_i 与 a_j 的相关数　$r_{ij} = Q_{ij} / \sqrt{Q_{ii} \times Q_{jj}}$　（12）

Q_{ij} 为助因数阵中对应于 a_i 与 a_j 的元素。大多数研究表明 $r_{ij} > 0.8$ 的附加参数可考虑去掉，至于是去掉 a_i 还是去掉 a_j？可根据显著性检验来决定。

以上各种检验可在平差中反复采用。开始时可适当放宽限制，以免“弃真”，后面可严一些。

2.3　克服过度参数化，改善方程状态的几个方法

经过上述检验，剔除部分附加参数后，仍然存在一定程度的相关，方程状态仍可能不是很好，采用下面方法可以改善：

（1）建立重力网时合理布网，优化几何结构。对观测仪器进行检定，使较大的误差参数有较好的初值。

（2）给附加参数赋权。因为把附加参数作为自由未知数是不合适的，它的数值是有一定限制的，因此可处理为带权观测值。其权可由信噪比来确定，当然这时要考虑系统参数在误差方程中系数的大小。

（3）将所有未知数处理成带小权的观测值，这相当于将方程系数阵 N 变为 $N+M$（其中 $M = kI$），使法方程变成

$$(N+M)\hat{X} = W + M\hat{X}_0 \qquad (13)$$

可以证明，$k > 0$ 时 $\mathrm{cond}(N+M) \leqslant \mathrm{cond}N$，改善了方程的状态。$\hat{X}_0$ 为 $\hat{X}$ 的初值，但是这一方法的有效性还需深入讨论（$\mathrm{cond}N = \|N^{-1}\| \, \|N\|$ 是矩阵 N 的条件数，可衡量方程状态的好坏）。

4　重力测量的误差和精密重力网平差模型

4.1　绝对重力测量

绝对重力测量的误差一般有：激光波长误差、测时误差、光电转换及传输误差、电源波动、温度及气压影响、地基震动等。其中波长误差和测时误差的主要部分是系统误差。对激光绝对重力仪的总误差，大多数文献（如 Gannizzo、Faller 和 Lenny）认为是 10～20μgal。我国的绝对重力点由于使用的仪器太少等原因，精度约为10～30μgal，个别误差更大一些。下面讨论系统误差的影响：

绝对重力测量方程

$$g=2[(S_2/T_2)-(S_1/T_1)]/(T_2-T_1) \tag{14}$$

其中，$S=\frac{1}{2}N\lambda$，设波长的系统影响k_λ，时间系统影响k_T，则$\lambda=(1+k_\lambda)\lambda'$，$T=(1+k_T)T'$，可导出：

$$g=(1-2k_T+k_\lambda)g' \tag{15}$$

至于对称运动的情况，与上式相同。于是绝对重力测量的观测方程可写为：

$$v_i=\hat{g}_i-g_i+2k_{Tm}g_i-k_{\lambda m}g_i \tag{16}$$

其中 g_i 和$\hat{g}_i$分别是测站 i 的绝对重力观测值和估值。k_{Tm}、$k_{\lambda m}$分别是第 m 台仪器的时间系统参数和波长系统参数。

4.2 相对重力测量

根据Torge，Wenzel，Kanngieser 和 Lacoste 等人的研究，以及我国建立国家重力基本网的施测和平差实践，一般认为 LCR-G 在正常观测的情况下存在的误差有：读数误差、置平误差、弹性滞后影响、电压波动影响、梯度改正误差、格值误差、周期误差、温度影响、气压影响、潮汐改正误差、磁场影响和运输震动影响等[2]。除格值误差和周期误差有明显的系统倾向外（其数值也比较大），其它均可视为偶然误差 ε_n，ε_n的值约为±10μgal。可以认为当运输等造成的零漂超过一定数值时可当作粗差处理。在顾及格值和周期误差的情况下，观测值的精度约为±18μgal，这与实际情况是基本符合的。当系统误差能较好改正及震动影响很小时，观测误差可达±10μgal 。但在我国由于段差大，格值未能很好改正的情况下，观测误差约为±20μgal。

下面由重力仪读数差来建立误差方程（根据Drewes 研究，这一方法与用测站重力仪读数直接建立误差方程的方法相比，对未知数的影响很小，只是估计误差略小，但计算量小得多）：

$$v_{ij}=\hat{g}_j-\hat{g}_i+E_{m0}(Z_j-Z_i)+\sum_{k=1}^{Q}E_{mk}(Z_j^k-Z_i^k)+\sum_{n=1}^{R}X_{mn}(\cos\omega_{mn}Z_j-\cos\omega_{mn}Z_i)$$
$$+\sum_{n=1}^{R}Y_{mn}(\sin\omega_{mn}Z_i-\sin\omega_{mn}Z_j)+\sum_{l=1}^{s}D_l(t_j-t_i) \tag{17}$$

式中 $\omega_{mn}=2\pi/T_{mn}$，$A_{mn}=\sqrt{X_{mn}^2+Y_{mn}^2}$，$\text{tg}\phi_{mn}=Y_{mn}/X_{mn}$。

$\hat{g}_i$，$\hat{g}_j$和Z_i，Z_j分别为测站 i，j 上的重力估值与经改正后的毫伽值读数；E_{m0}为格值初值，E_{mk}为第 m 台仪器的 k 阶格值；A_{mn}，ϕ_{mn}和T_{mn}分别为第 m 台仪器的 n阶周期误差的振幅、相位和周期；t_i，t_j为测站 i，j 上的观测时刻，D_l为漂移多项式的 l阶系数。研究表明 $Q=1\sim2$，$R=2\sim4$。D_l的影响较大，国内外通过观测作了大量实验研究，但仍未能很好掌握其规律，因此在观测概算时加了线性零漂改正，并剔除明显粗差后，平差时不予考虑。

4.3 观测值的分类和初始权的确定

精密重力测量中仪器参数影响是很大的，这从不同仪器观测的大量互差中明显表现出来，因此在分类时主要考虑这一因素，将 m台仪器（包括绝对重力仪和LCR-R）的几个观测值分成 m 类，即一台仪器的观测值作为一类。当观测值中某几台仪器表现出明显一致时，

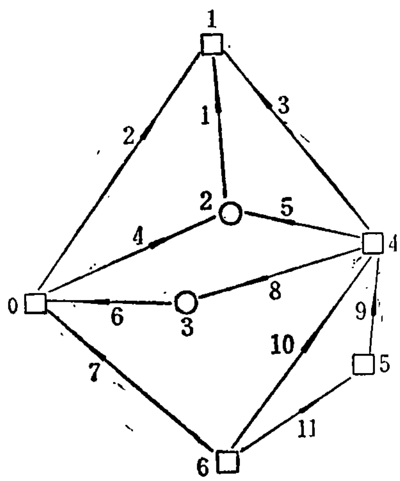
可作为一类。但分类不宜多。

对于绝对重力观测值的权，主要根据比对和检验结果以及近似平差的数据确定。相对重力测量观测值的权主要根据仪器的已往使用经验数据、零漂大小以及预处理结果确定。若采用附加参数带权的方法，只需经初步平差求出附加参数的概值，然后按(3)中的方法定权。

5 算例及分析

为了检核模型的实际效果，本文模拟实际数据设计了一个网，先确定参数和点值的真值，给定误差，反算出观测值进行平差，再与真值比较。

5.1 计算方案



重力网如图，设0点为已知点，一台绝对重力仪在1，4，5，6点作绝对重力测量。两台LCR-G在各测线上作了22个观测值、26个观测值分三类：

绝对重力观测 $V_1 = B_1 \hat{X} - L_1$

G-500观测 $V_2 = B_2 \hat{X} - L_2$

G-510观测 $V_3 = B_3 \hat{X} - L_3$

未知数$\hat{X}$共有26个：6个点的重力估值 $\delta\hat{x}_1$，…，$\delta\hat{x}_6$；附加参数20个（由于只有一台绝对重力仪，不宜确定其系统影响）；G-500的格值E_1'，E_2'，周期误差系数 X_1'，…，X_4'，Y_1'，…，Y_4'；G-510的格值E_1''，E_2''，周期误差系数X_1''，…，X_4''，Y_1''，…，Y_4''。

取26个未知数，方程严重病态。由信噪比的检验，将很小的E_2'，E_2''去掉。经显著性检验和相关检验又剔除X_3'，X_4'，Y_3'，Y_4'，X_3''，X_4''，Y_3''，Y_4''。余下16个未知数，由下面7个方案解算。

方案Ⅰ：$t=16$，有10个附加参数，初始权 $\mathrm{diag}P_1=(6, 3, 5, 4)$，$\mathrm{diag}P_2=(1, \cdots, 1)$，$\mathrm{diag}P_3=(1.5, \cdots, 1.5)$

diag$P$表示只记对角阵P中的对角元。

方案Ⅰ$_0$：与Ⅰ相同，但不采用方差分量估计，直接平差。

方案Ⅱ：$t=12$，通过检验剔除了Y_1'，Y_2'，Y_1''，Y_2''，初始权与Ⅰ相同。

方案Ⅱ$_0$：与Ⅱ相同，但不采用方差分量估计。

方案Ⅲ：$t=8$，再去掉了E_1'，E_1''外的所有附加参数，初始权与Ⅰ相同。

方案Ⅳ：参数选取与Ⅲ相同，初始权 $\mathrm{diag}P_1=(6, 3, 5, 4)$，$\mathrm{diag}P_2=(1, \cdots, 1)$，$\mathrm{diag}P_3=(4.5, \cdots, 4.5)$

方案Ⅴ：参数选取与Ⅲ相同，初始权 $\mathrm{diag}P_1=(2, 1, 1.5, 2)$，$\mathrm{diag}P_2=(1, \cdots, 1)$ $\mathrm{diag}P_3=(1.5, \cdots, 1.5)$

计算出下面几项指标进行比较：单位权方差$\hat{\sigma}_0^2$、重力估值平均中误差$\overline{m_x}$、未知数估值

真误差 Δ、重力估值平均真误差$\overline{\Delta}_x$。

5.2 计算结果及比较分析

根据各个方案，计算结果如附表所列，分析如下：

（ 1 ）利用假设检验剔除部分附加参数是必要的

方案Ⅰ由于附加参数过多，其中有的不显著，有了强相关。不论是实验精度（$\overline{\Delta}_X$ = ±48ugal）或估计精度（$\overline{m}_X$ = ±64μgal）都很低。但并不是附加参数越少越好。方案Ⅲ就只保留了两个附加参数。虽然表面上估计精度不太低（$\overline{m}_X$ = ±12μgal），但实际精度（$\overline{\Delta}_X$ = ±14ugal）比方案Ⅱ要低。方案Ⅱ的结果较好，虽然由于有一定数量的附加参数，估计精度不太（$\overline{\Delta}_X$ = ±24μgal），（所取附加参数越多，估计单位权中误差越大，未知数估计中误差越大文［3］给出了证明），但实际精度最高（$\overline{\Delta}_X$ = ±5μgal），这一结果说明假设检验是有效的。

若不进行有效的假设检验，剔除部分附加参数，不如基本上不引入附加参数。方案Ⅰ与方案Ⅱ的结果说明了这点。Ⅰ比Ⅲ的估计精度低1.6倍，实际精度低3.4倍。

（ 2 ）利用方差分量估计是有率的

对方案Ⅱ的数据作了Ⅱ和Ⅱ。（不迭代定权）的比较。利用方差分量估计定权的Ⅱ虽然估计精度比Ⅱ。较低（低1.5倍），但实际要高1.5倍。由于本算例子较少，这一提高还有限，但对大子样多分类的情况，精度提高要更明显。不少方差分量估计的研究证实了这一点。

（ 3 ）两种手段必须同时进行

对于方案Ⅰ，由于未经检验来剔除附加参数，方程状态不好，即使采用方差分量估计，其结果也不好，甚至更坏。Ⅰ与Ⅰ$_0$的比较说明了这一点，前者比后者估计精度低1.3倍，实际精度低1.5倍。但采取了假设检验剔除部分附加参数后，使用方差分量估计比不采用要好，如Ⅱ与Ⅱ$_0$的比较，实际精度提高1.4倍。

（ 4 ）初始权不同对平差结果影响很小

方案Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ的比较说明了这一点，这几个方案的附加参数是相同的，只是初始权不同。虽然最终的权比略有差异，但最后的未知数估值基本上相同、这表明方差分量估计在方程状态较好时调节能力是较强的，收敛比较好。

（ 5 ）合理使用假设检验剔除部分参数不损失平差精度

通过假设检验剔除部分参数（即使有的参数实际上可能存在）后，由于参数间仍有一定程度的相关，通过平差可部分补偿丢失了的那些参数的影响，而对最后的未知数精度影响不大，反而改善了方程状态。如方案Ⅱ在方案Ⅰ的基础上经检验剔除了实际存在的 Y'_1，Y'_2，Y''_1，Y''_2，平差结果较不剔除时的方案Ⅰ的精度要高。

6 结束语

根据本文的讨论，归纳出以下两点：

（ 1 ）. 由于精密重力测量自身的特性，在原理上适合利用方差分量估计方法和利用假

方案		I_0		I		II_0		II		III		IV		V	
迭代次数		0		3		0		4		6		5		5	
最终权	diag P_1			(6,3,5,4)				(6,3,5,4)		〃		〃		(2,1,1,5,2)	
	diag P_2			(19)				(6)		6		(6)		(2)	
	diag P_3			(36)				(21)		(22)		(22)		(7)	
误差		m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$	m	$\|\Delta\|$
δ_{x1}		10	16	36	9	8	14	16	1	10	7	10	7	9	7
δ_{x2}		14	3	33	0	11	6	15	8	7	16	7	16	7	16
δ_{x3}		120	77	133	106	31	4	44	7	8	28	8	28	8	28
δ_{x4}		14	2	45	20	11	0	22	4	10	8	10	8	10	8
δ_{x5}		11	3	37	23	9	2	17	4	15	5	15	5	14	5
δ_{x6}		14	9	49	37	10	6	20	4	17	5	17	5	15	5
$\overline{m}_x$		50		66		16		24		12		12		11	
$\overline{\Delta}_x$			32		48		7		5		14		14		14
$E_1\ 10^{-10}$		18		37	9	14		18	6	16	12	16	12	15	12
x_1'		17		16	16	14		13	8						
x_2'		63		75	57	19		28	18						
y_1'		37		36	41				10						
y_2'		25		32	21				3						
$E_2\ 10^{-8}$		16		34	10	12		15	6	14	9	14	9	13	9
x_1''		90		147	22	17		15	12						
x_2''		57		61	43	18		26	11						
y_1''		66		73	28				10						
y_2''		21		16	50				0						
$\hat{\sigma}_0$		26		101		23		53		50		50		29	
cond(N)		159		3337		75		447		103		103		103	

设检验剔除部分附加参数的方法，其计算结果是好的。

（2） 建议在大子样的算例下进行各种假设检验和方差分量估计的研究分析，然后对大型精密重力网（如国家重力基本网及一等网等），用上述方法进行数据处理。

参 考 文 献

［1］ 李德仁. 误差处理和可靠理论. 测绘出版社，1988.

［2］ Von Erich Kanngieser. Genauigkeitssteigerung in der Relativgravimetrie. Zfv 1983.

［3］ 陶本藻. 附加参数的平差模型和假设检验. 测绘学报，1986（4）.

［4］ 陆仲连. 美国重力测量和重力场研究近况. 科技文选，1984（15）.

［5］ 宋兴黎等. 重力网平差. 测绘学报，1986（4）.

［6］ Pelzer. N 随机函数模型中系统效应影响. 陶本藻等译. 大地形变测量，1985(2).

Weighing of the Precise Gravity Network and Its System Effect

Yang Zhongyi

Abstract

There are still two problems unsolved in the precise gravity networks: One is how to weight various observations; the other is how to cancal the unecessary parameters of the retative gravity meters. It is discussed in this paper to define the weights of various observations by use of vaviance component estimation and to select the additional parametrers by use of several kinds of hypothesis test. Through computation, comparision and analysis, some results have been obtained.

[Key words] precise gravity network; variance component estimation; hypothesis test