

# 卫星网与地面网联合平差中 随机模型的估计\*

许才军

## 摘要

本文讨论了卫星网与地面网联合平差中随机模型误差及其对联合平差结果的影响,应用方差分量估计方法对卫星网和地面网的随机模型进行了估计,并对模拟网与实测网的计算结果进行了分析。

**【关键词】** 联合平差; 模型误差; 方差分量估计

## 引言

一个具有良好数学模型的平差问题,其验后单位权方差应接近于验前值。但在不少实测的卫星网与地面网联合平差中,验后单位权方差与其验前值有显著的差异。这种差异一方面反映了联合平差所选择的函数模型不合适,另一方面也说明其随机模型存在误差。函数模型误差和随机模型误差,不仅会使联合平差的结果产生偏差,而且使联合平差所得到的精度也是虚假的。

为了得到良好的函数模型,许多学者提出了考虑各种不同因素影响的转换模型,并讨论了选择最佳模型的方法。本文则是将方差分量估计的 Helmert 方法应用于卫星网与地面网的联合平差,讨论对联合平差中的各类观测值的随机模型进行估计的计算公式和算法,并根据对几个实例的计算结果进行分析,从而说明在联合平差中应用方差分量估计对改善随机模型不仅是必要的,而且是行之有效的。为了使随机模型的估计更为合理,文中首先讨论联合平差中模型误差对验后单位权方差的影响。

## 1 联合平差的模型误差及其对验后单位权方差的影响

卫星网与地面网联合平差的模型误差可分为函数模型误差和随机模型误差两部分。联合

收稿日期: 1988-06-28

\* 本文是硕士研究生论文的一部分,指导教师为刘大杰教授和刘经南副教授。

平差中函数模型误差主要是指两网坐标转换模型未能很好地反映相互的转换关系及其系统误差的存在。而联合平差中随机模型的误差则是指参与联合平差的3类观测量的验前方差不准确，这3类观测量是地面网平差后的大地经纬度，地面网平差后的大地高，以及卫星网平差的地心三维直角坐标。

对于一个土地辽阔、地形复杂的地区或国家，布设的地面网和卫星网所采用的基准不同所受到的各种因素的影响也不同，特别是地面网中系统误差相当复杂，因此函数模型误差的存在是不可避免的。此外，由于一些条件的限制，地面网各点的大地经纬度的方差和协方差不会精确得到，而由于重力资料的不足，使各点的大地高方差-协方差也不准确。对于卫星网点的点位误差，很大程度上来源于卫星的轨道位置（即星历）不够精确和对流层、电离层折射误差的残差。尽管我国卫星多普勒网采用了半短弧法平差，但空间测量中的众多偏差和观测误差及其平差模型的不完善都会使卫星网的点位精度受影响。即使卫星网点平差值的方差和协方差对卫星网本身来说是合理的，但当它参与联合平差的时候，还存在与另外系统中观测值权匹配问题。

由于模型误差的存在，将使联合平差的结果受其影响。

设平差时所采用的数学模型是

$$\overline{\mathbf{V}}_{n \times 1} = \mathbf{A} \overline{\mathbf{X}}_{n \times 1} - \mathbf{l}, \quad \overline{\mathbf{P}} = \overline{\sigma}_0^2 \mathbf{D}_l^{-1}, \quad (1)$$

可求得参数和单位权方差的估值为

$$\hat{\overline{\mathbf{X}}}^2 = (\mathbf{A}^T \overline{\mathbf{P}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{P}} \mathbf{l}, \quad (2)$$

$$\hat{\overline{\sigma}}^2 = \frac{1}{n-u} \overline{\mathbf{V}}^T \overline{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{V}}, \quad (3)$$

若设正确的数学模型为：

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}_{u \times 1} + \mathbf{H} \hat{\Delta \mathbf{S}}_{u_s \times 1} - \mathbf{l}, \quad \mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{D}_l^{-1}, \quad (4)$$

此时应有

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\Delta \mathbf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\hat{\overline{\sigma}}^2 = \frac{1}{n-u-u_s} \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}. \quad (6)$$

因此，按(3)求得的单位权方差有偏差

$$\Delta \hat{\overline{\sigma}}^2 = \hat{\overline{\sigma}}^2 - \hat{\sigma}^2 = \frac{\overline{\mathbf{V}}^T \overline{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{V}}}{n-u} - \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{n-u-u_s}. \quad (7)$$

如果模型(1)的随机模型准确，即 $\mathbf{P}^P = \mathbf{P}$ ，则由于函数模型的误差所引起的单位权方差的偏差（以 $\Delta \hat{\sigma}^2_F$ 表示）为：

$$\Delta \hat{\sigma}_F^2 = \frac{\bar{V}^T P \bar{V}}{n-u} - \frac{V^T P V}{n-u-u_s} . \quad (8)$$

如果(1)的函数模型准确,而随机模型不准确,则由随机模型误差引起的单位权方差偏差(以 $\Delta \hat{\sigma}_s^2$ 表示)为:

$$\Delta \hat{\sigma}_s^2 = \frac{\bar{V}^T P \bar{V}}{n-u} - \frac{V^T P V}{n-u} , \quad (9)$$

也可以近似地认为:

$$\Delta \hat{\sigma}^2 = \Delta \hat{\sigma}_F^2 + \Delta \hat{\sigma}_s^2 .$$

不难看到,当存在函数模型误差或随机模型不准确时,都会使验后单位权方差产生偏差。

为了分析在卫星网与地面网联合平差中,模型误差对验后单位权方差的影响情况,笔者对我国西北地区的两个实测网进行了试算,所得结果列于表1。在表1中,将通过线性假设检验所得到的最佳模型(即网I的6参数模型和网II的5参数模型)看作是没有函数模型误

表 1

模型误差对验后单位权中误差的影响								
网名	联合平差模型	函数模型误差项	单位权中误差(估前)	函数模型误差对 $\hat{\sigma}_0^2$ 影响			随机模型误差影响	
				$\nabla \hat{\sigma}_F^2$	$\nabla \hat{\sigma}_F^2 / \hat{\sigma}_0^2$ 标	$\nabla \hat{\sigma}_s^2$	$\nabla \hat{\sigma}_F^2$	$\nabla \hat{\sigma}_s^2 / \hat{\sigma}_0^2$ 标
I	MOL. 3	DK, EX, EZ	2.546	0.936	93.6%	60.5%		
	MOL. 4	EX, EZ	2.559	0.949	94.9%	60.8%		
	MOL. 5		1.610	0.000			0.610	61.0%
	MOL. 5	EX, EZ	2.118	0.508	50.8%	45.4%		
II	BUR. 3	DK, EZ	2.061	0.762	76.2%	71.8%		
	BUR. 4	EZ	1.952	0.653	65.3%	68.6%		
	BUR. 5		1.299	0.000			0.269	26.9%

网名	模型	平差前为产生模拟数据所给定的方差分量值			方差分量偏差值			方差分量估计前单位权中误差	随机模型误差影响	
		$\sigma_{OBL}^2$	$\sigma_{OH}^2$	$\sigma_{OS}^2$	$\nabla \sigma_{OBL}^2$	$\nabla \sigma_{OH}^2$	$\nabla \sigma_{OS}^2$		$\nabla \hat{\sigma}_s^2$	$\nabla \hat{\sigma}_s^2 / \hat{\sigma}_0^2$ 标
III	MOL. 7	1.0	1.0	1.01	0.0	0.0	0.01	1.076		
	MOL. 7	0.8	0.2	1.01	0.2	0.8	0.01	1.475	0.436	43.6%
	MOL. 5	0.3	0.8	0.51	0.7	0.2	0.51	1.671	0.632	63.2%

注: 为15点的模拟网。

差的模型, 此时的验后单位权中误差主要是受随机模型不准确的影响, 而按其它模型计算所得的验后单位权中误差, 既包含随机模型不准确的影响, 又包含函数模型误差的影响。网 I 按 6 参数模型平差时, 认为函数模型无误差, 因而随机模型不准确使验后单位权中误差的偏差为  $1.61 - 1 = 0.61$ 。而按 3 参数模型平差时, 由于函数模型误差和随机模型不准确, 使验后单位权中误差的总偏差为  $2.546 - 1 = 1.546$ 。因此, 函数模型误差使验后单位权中误差产生的偏差为  $1.546 - 0.61 = 0.936$ 。表 1 中数字表明, 函数模型误差对验后单位权方差产生的偏差是总偏差的 45% 至 70%, 它使验后单位权中误差偏离验前值达 50%~95%, 而随机模型不准确可使验后单位权中误差偏离验前值 30%~65%。这些数值表明: 模型误差对验后单位权中误差的影响是显著的。

## 2 联合平差中方差分量估计的公式和算法

联合平差的 3 类观测值 (地面网平差后的大地经纬度, 地面网的大地高以及卫星网平差后的地心坐标) 分别由单独平差而得, 故它们本身通常是相关的, 但它们之间可以认为是相互独立的。3 类观测值的误差方程可写为

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= X_1 - l_1 = A_1 X - l_1, & P_1 \\ V_2 &= X_2 - l_2 = A_2 X - l_2, & P_2 \\ V_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + BY - l_3 = A_3 X - l_3, & P_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中  $X_1$  表示各点的大地经纬度参数,  $X_2$  表示各点的大地高参数,  $Y$  表示转换参数,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  表示 3 类观测值所对应的权阵。

按照 Helmert 方差分量估计法求 3 类观测值的单位权方差分量  $\hat{\sigma}_{\text{u}}^2$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{\text{u}}^2 &= W \\ N_1 &= A_1^T P_1 A_1, \quad N_2 = A_2^T P_2 A_2, \quad N_3 = A_3^T P_3 A_3 \\ \hat{\sigma}_{\text{u}}^2 &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 \\ \hat{\sigma}_2^2 \\ \hat{\sigma}_3^2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} V_1^T P_1 V_1 \\ V_2^T P_2 V_2 \\ V_3^T P_3 V_3 \end{pmatrix}, \quad N = N_1 + N_2 + N_3 \\ S &= \begin{pmatrix} 2n - 2\text{tr}(N^{-1}N_1) & \text{tr}(N^{-1}N_1 N^{-1}N_2) & \text{tr}(N^{-1}N_1 N^{-1}N_3) \\ + \text{tr}(N^{-1}N_1)^2 & & \\ & n - 2\text{tr}(N^{-1}N_2) & \text{tr}(N^{-1}N_2 N^{-1}N_3) \\ & + \text{tr}(N^{-1}N_2)^2 & \\ \text{对称} & & 3n - 2\text{tr}(N^{-1}N_3) \\ & & + \text{tr}(N^{-1}N_3)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $n$  为网中的点数。 (11) 式是一般的计算公式。由 (11) 可以看到第一、二类观测值的误差方程的系数很简单, 因此, 可以将 (11) 式中各项计算化简, 令

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \text{对称} & & \bar{Q}_{33} \end{pmatrix}$$

因为由 (10) 式知

$$N_1 = A_1^T P_1 A_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = A_2^T P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3 = N - N_1 - N_2,$$

所以有

$$\begin{aligned} \text{tr}(N^{-1} N_1) &= \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1), \quad \text{tr}(N^{-1} N_1)^2 = \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1)^2, \\ \text{tr}(N^{-1} N_2) &= \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2), \quad \text{tr}(N^{-1} N_2)^2 = \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2)^2, \\ \text{tr}(N^{-1} N_3) &= 3n - \text{tr}(N^{-1} N_1) - \text{tr}(N^{-1} N_2) = 3n - \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1) - \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2), \\ \text{tr}(N^{-1} N_3)^2 &= 3n - 2\text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1) - 2\text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2) + \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1)^2 + \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2)^2 \\ &\quad + 2\text{tr}(\bar{Q}_{21} P_1 \bar{Q}_{12} P_2). \end{aligned}$$

所以

$$S \hat{\sigma}^2 = W, \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{lll} 2n - 2\text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1) & \text{tr}(\bar{Q}_{21} P_1 \bar{Q}_{12} P_2) & \text{tr}(\bar{Q}_{31} P_1 \bar{Q}_{13} P_3) \\ + \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1)^2 & & \\ & n - 2\text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2) & \text{tr}(\bar{Q}_{32} P_2 \bar{Q}_{23} P_3) \\ & + \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2)^2 & \\ & & \text{tr}(\bar{Q}_{11} P_1)^2 + 2\text{tr}(\bar{Q}_{21} P_1 \bar{Q}_{12} P_2)^2 \\ & & + \text{tr}(\bar{Q}_{22} P_2)^2 \end{array} \right\} \\ \end{array} \right\} \quad (12)$$

(12) 式是联合平差中方差分量估计的实用公式。根据此式或 (11) 式估计  $\hat{\sigma}^2$  时，一般要采用迭代计算的步骤，其步骤是：

1) 给定  $D_1^{(0)}$ ,  $D_2^{(0)}$  和  $D_3^{(0)}$ , 则得  $P_1^{(0)} = D_1^{(-1)}$ ,  $P_2^{(0)} = D_2^{(-1)}$ ,  $P_3^{(0)} = D_3^{(-1)}$ , 进行平差求得  $V_1^T P_1 V_1$ ,  $V_2^T P_2 V_2$ ,  $V_3^T P_3 V_3$ 。

2) 按 (12) 式或 (11) 式求  $(\hat{\sigma}_1^2)^{(1)}$ ,  $(\hat{\sigma}_2^2)^{(1)}$ ,  $(\hat{\sigma}_3^2)^{(1)}$ 。

3) 根据  $(\hat{\sigma}_i^2)^{(1)}$  重新定权, 平差求得  $(\hat{\sigma}_i^2)^{(j+1)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1$ 。

$$P_i^{(1)} = \sigma_0^2 / D_i^{(1)} = \sigma_0^2 / (\sigma_i^2)^{(1)} D_i^{(0)} = \sigma_0^2 P_i^{(0)} / (\hat{\sigma}_i^2)^{(1)},$$

令  $\sigma_0^2 = 1$ , 则有  $P_i^{(1)} = P_i^{(0)} / (\hat{\sigma}_i^2)^{(1)}$

推得迭代公式 
$$\left. \begin{aligned} P_i^{(j)} &= P_i^{(j+1)} / (\hat{\sigma}_i^2)^{(j)} \\ N_i^{(j)} &= N_i^{(j+1)} / (\hat{\sigma}_i^2)^{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

4) 由 (13) 式重复 3) 直至  $|(\hat{\sigma}_i^2)^{(1)} - 1| < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。 $\varepsilon$  为给定的迭代收敛精度。

此外, 采用 (11) 式或 (12) 式来定权, 计算工作量是非常大的, 且不易在小型计算机上实现。特别是对于较大型的控制网。因此, 在采用 Helmert 方差估计法确定随机模型时, 也常采用其近似公式:

$$\hat{\sigma}_{0,i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i - \text{tr}(N^{-1} N_i)} \quad (14)$$

特别需要指出的是一般文献认为该公式是从有偏到无偏的迭代过程, 即所得方差分量估值最终是无偏的观点是值得商榷的。

公式 (14) 是在  $\hat{\sigma}_{0,i}^2$  相等的前提下导出的。显然开始用它进行估计时得出的  $(\hat{\sigma}_{0,i}^2)^{(1)}$  ( $j < k$ ) 是有偏估值, 只有在迭代收敛的最后一次 (第  $k$  次) 其估值  $(\hat{\sigma}_{0,i}^2)^{(k)}$  对于第  $k$  次平差结果来说, 它是无偏的。但方差估值的最终结果通过迭代原理可推得:

$$\hat{\sigma}_{0,i}^2 = (\hat{\sigma}_{0,i}^2)^{(1)} (\hat{\sigma}_{0,i}^2)^{(2)} - (\hat{\sigma}_{0,i}^2)^{(k)} \quad (15)$$

虽然 (15) 式对于整个平差过程的平差结果来说它是有偏估值。

### 3 算例分析与结论

为了分析模型误差对联合平差结果的影响, 笔者对西北地区的实测网进行了试算, 所得结果列于表 2 至表 4。表中网 I, 网 II, 网 III 分别代表西北地区 33 点, 18 点和 14 点的实测网。其中网 III 不包括大地原点在内。

对试算结果作分析, 可得到如下看法:

1) 不论联合平差函数模型是否存在模型误差, 通过方差分量估计后, 方差分量值和验后单位权中误差都可趋近于 1.0, 亦即方差分量估计对函数模型误差有吸收作用。因此, 必须在函数模型正确的前提下应用方差分量估计才是可靠的。

2) 由表 2 可知, 采用 Helmert 方差分量估计的严密公式和近似公式 (15) 所得的方差分量估值有显著差异。将通过线性假设检验所得到的最佳模型, 例如网 II 的 5 参数模型, 认为它是不含函数模型误差的模型。通过方差分量估计, 当 3 类观测量的权相互匹配时, 运用严密公式, 方差分量值为  $\hat{\sigma}_{0,BL}^2 = 0.435$ ,  $\hat{\sigma}_{0,H}^2 = 4.827$ ,  $\hat{\sigma}_{0,S}^2 = 0.434$ 。而采用近似公式则有

表 2

Helmert 方 差 分 量 估 值								
网 名	联合 平差 模型	选 用 方差分量 估计公式	迭代 次数	VCE $\sigma_1^2$ 前方差 $\sigma_2^2$ 分量值 $\sigma_3^2$	VCE $\hat{\sigma}_1^2$ 后方差 $\hat{\sigma}_2^2$ 分量值 $\hat{\sigma}_3^2$	方差 $\hat{\sigma}_L^2$ 分量 $\hat{\sigma}_H^2$ 估值 $\hat{\sigma}_S^2$	(权匹配时) 方差分量比值	函数模型 误 差 项
I	MOL.6	(12)式	2	3.540	0.998	0.287	1.0 : 8.4 : 1.0	
				0.414	1.000	2.405		
				3.542	1.003	0.282		
	BUR.6	(12)式	5	3.541	1.001	0.286	1.0 : 8.4 : 1.0	
				0.413	0.997	2.392		
				3.539	1.002	0.285		
II	WUS.6	(12)式	5	3.541	1.001	0.286	1.0 : 8.4 : 1.0	
				0.413	0.997	2.392		
				3.539	1.002	0.285		
	MOL.6	(15)式	7	2.702	0.995	0.609	1.0 : 4.3 : 0.2	
				0.478	0.999	2.616		
				6.099	1.005	0.119		
III	MOL.4	(12)式	9	8.632	0.971	0.140	1.0 : 12.2 : 0.6	EX, EY
				1.487	0.994	1.701		
				8.934	1.014	0.083		
	MOL.3	(12)式	8	8.560	0.971	0.136	1.0 : 12.2 : 0.6	DK, EX, EY
				1.437	0.993	1.656		
				8.766	1.015	0.085		
IV	BUR.5	(12)式	2	2.306	1.000	0.435	1.0 : 11.1 : 1.0	
				0.236	1.000	4.827		
				2.306	1.000	0.434		
	MOL.5	(12)式	2	2.307	0.999	0.436	1.0 : 11.1 : 1.0	
				0.231	1.000	4.829		
				2.309	1.001	0.433		
V	BUR.5	(15)式	6	1.929	0.994	0.663	1.0 : 8.2 : 0.4	
				0.316	0.998	5.135		
				2.866	1.006	0.289		
	MOL.6	(12)式	2	2.569	1.001	0.383	1.0 : 1.3 : 1.0	EZ
				2.103	0.999	0.494		
				2.569	1.001	0.383		
VI	MOL.6	(15)式	20	2.616	1.001	0.361	1.0 : 1.5 : 2.0	EZ
				2.084	1.003	0.481		
				2.343	0.991	0.719		
	BUR.6	(12)式	6	2.440	1.004	0.394	1.0 : 1.2 : 1.0	EZ
				2.363	0.992	0.465		
				2.440	1.004	0.394		

$\hat{\sigma}_{\text{BL}}^2 \sigma = 0.663$ ,  $\hat{\sigma}_{\text{BH}}^2 = 5.135$ ,  $\hat{\sigma}_{\text{BS}}^2 = 0.289$ 。采用严密公式和近似公式所得的平差结果也不同。

3) 由表 3 和表 4 可知, 方差分量估计对平差结果精度的影响是显著的。如网 I 的 6 参数模型, 估前全网各点大地高中误差均值为  $\bar{m}_H = 0.642$ , 估后则变为  $\bar{m}_H = 0.485$ , 变化率为

$$\frac{\bar{m}_H - \bar{m}_{H\text{后}}}{\bar{m}_H} \times \% = 24.4\% \text{。通常情况, 大地高中误差均值的变化率范围为 } 20\% \sim 40\% \text{, 地面点}$$

中误差均值变化率达 15% 至 25%, 而两网转换参数的中误差变化最大达 35%。采用近似公式则变化更显著。例如网 I 的 6 参数 M 模型, 3 个平移参数、尺度比参数和绕 X 和 Z 旋转的欧拉角参数中误差验后与验前相比, 变化率依次达 70.6%, 62.7%, 61.2%, 33.6%, -30.7% 和 17.4%。

表 3

方差分量估计对联合平差结果 (平差值中误差) 影响									
网名	模型	函数模型	VCE前, $\frac{\bar{m}_H}{\bar{m}_T}$	VCE后, $\frac{\bar{m}_H}{\bar{m}_T}$	$\frac{\bar{m}_H - \bar{m}_{H\text{VCE}}}{\bar{m}_H} \times 100\%$	VCE后, $\frac{\bar{m}_T}{\bar{m}_{H\text{VCE}}}$	$\frac{\bar{m}_T - \bar{m}_{T\text{VCE}}}{\bar{m}_T} \times 100\%$	VCE后, $\frac{\bar{m}_S}{\bar{m}_{S\text{VCE}}}$	$\frac{\bar{m}_S - \bar{m}_{S\text{VCE}}}{\bar{m}_S} \times 100\%$
I	MOL.6		0.642						
			0.743	0.485	24.4%	0.648	12.8%	1.086	-17.1%
			0.927						
II	MOL.6		0.615						
			0.691	0.365	40.6%	0.518	24.9%	1.917	-16.0%
			1.653						
I	MOL*6		0.642						
			0.743	0.596	7.1%	0.744	-0.1%	1.595	-72.0%
			0.927						
II	MOL*6		0.615						
			0.691	0.396	35.6%	0.537	22.2%	2.283	-38.1%
			1.653						
III	MOL.6	EZ	0.976						
			1.076	0.918	6.0%	1.030	4.3%	0.564	-3.8%
			0.544						
III	MOL*6	EZ	0.976						
			1.076	0.899	7.9%	0.999	7.2%	0.423	22.3%
			0.544						

注: MOL\*6 表示该模型采用 Helmert 方法近似公式进行方差估计。

表 4

## Helmut法方差分量估计对两网转换参数及其精度影响

网名	联合平差模型	参数及其中误差(VCE前)			VCE后参数值及中误差		选用方差分量估计公式	$\nabla X = X_{VCE} - X$	参数中误差变化率
		名称	参数值	中误差	参数值	中误差			
I	BUR.6	$\Delta X_0 m$	- 7.053	1.172	- 7.451	1.127	(12)式	- 0.398	- 3.8%
		$\Delta Y_0 m$	- 7.330	4.410	- 6.605	2.993		0.725	- 32.1%
		$\Delta Z_0 m$	- 0.683	5.041	- 1.139	3.397		- 0.636	- 32.6%
		DKppm	- 0.617	0.194	- 0.693	0.213		- 0.076	9.8%
		EX"	- 0.419	0.215	- 0.451	0.142		- 0.032	- 33.9%
		EZ"	0.450	0.054	0.466	0.052		0.016	0.0%
I	BUR.6	$\Delta X_0 m$	- 7.053	1.172	- 7.072	1.190	(15)式	- 0.019	1.5%
		$\Delta Y_0 m$	- 7.330	4.410	- 5.239	3.187		2.091	- 27.7%
		$\Delta Z_0 m$	- 0.683	5.041	- 2.255	3.525		- 1.572	- 30.1%
		DKppm	- 0.617	0.194	- 0.773	0.260		- 0.156	33.6%
		EX"	- 0.419	0.215	- 0.496	0.149		- 0.077	- 30.7%
		EZ"	0.450	0.054	0.454	0.063		0.004	17.4%
I	MOL.6	$\Delta X_0 m$	- 5.156	0.606	- 5.030	0.707	(12)式	0.126	16.7%
		$\Delta Y_0 m$	- 3.988	0.586	- 4.062	0.648		- 0.074	10.5%
		$\Delta Z_0 m$	- 2.793	0.451	- 2.936	0.492		- 0.143	9.1%
		DKppm	- 0.617	0.194	- 0.695	0.213		- 0.078	9.8%
		EX"	- 0.419	0.215	- 0.451	0.142		- 0.032	- 33.9%
		EZ"	0.450	0.054	0.454	0.054		0.016	0.0%
	(15)式	$\Delta X_0 m$	- 5.156	0.606	- 4.813	1.034		0.343	70.6%
		$\Delta Y_0 m$	- 3.988	0.586	- 3.983	0.954		0.005	62.7%
		$\Delta Z_0 m$	- 2.793	0.451	- 3.070	0.727		- 0.277	61.2%
		DKppm	- 0.617	0.194	- 0.773	0.260		- 0.156	33.6%
		EX"	- 0.419	0.215	- 0.496	0.149		- 0.077	- 30.7%
		EZ"	0.450	0.054	0.454	0.063		0.004	17.4%

续表 4

II	MOL.5	$\Delta X_0$ m	6.304	0.908	6.431	1.076		0.127	18.4%
		$\Delta Y_0$ m	- 7.164	0.948	- 7.268	1.111		- 0.105	17.2%
		$\Delta Z_0$ m	- 7.699	1.057	- 7.935	1.221	(12)式	- 0.236	15.5%
		DKppm	16.909	0.287	16.817	0.334		- 0.092	16.3%
		EZ"	0.505	0.061	0.543	0.068		0.038	11.8%
		54 SYSTEM							
		$\Delta X_0$ m	6.304	0.908	6.397	1.303		0.094	43.4%
		$\Delta Y_0$ m	- 7.164	0.948	- 7.126	1.345		0.038	42.0%
		$\Delta Z_0$ m	- 7.699	1.057	- 8.826	1.470	(15)式	- 0.527	39.1%
		DKppm	16.909	0.287	16.839	0.382		- 0.070	32.9%
		EZ"	0.505	0.061	0.537	0.078		0.060	27.7%
III	BUR.5	$\Delta X_0$ m	- 8.581	1.474	- 8.908	1.541		- 0.327	4.6%
		$\Delta Y_0$ m	- 1.038	1.374	- 1.025	1.448		0.013	5.3%
		$\Delta Z_0$ m	3.330	1.184	3.350	1.248	(12)式	0.020	5.3%
		DKppm	- 1.545	0.302	- 1.549	0.313		- 0.004	3.6%
		EX"	0.329	0.071	0.314	0.074		- 0.015	4.5%
		54 SYSTEM							
		$\Delta X_0$ m	- 8.581	1.474	- 8.808	1.519		- 0.228	3.1%
		$\Delta Y_0$ m	- 1.038	1.374	- 0.842	1.409		0.196	2.5%
		$\Delta Z_0$ m	3.330	1.184	3.514	1.212	(15)式	0.185	2.4%
		DKppm	- 1.545	0.302	- 1.586	0.304		- 0.041	0.8%
		EZ"	0.329	0.071	0.318	0.074		0.011	4.5%

综合表 1 ~ 表 4 的数值分析, 可以得到如下结论:

联合平差中模型误差对平差结果特别是验后单位权中误差的影响是显著的。应用方差分量估计技术来改善联合平差中的随机模型是有效的。但方差分量估计对函数模型误差有吸收作用, 故必须在函数模型正确的前提下应用方差分量估计技术来改善随机模型才是合理可靠的。

## 参 考 文 献

- [1] 刘经南, 刘大杰, 崔希璋. 卫星网与地面网联合平差的理论和应用. 武汉测绘科技大学学报, 1987(4).
- [2] Welsch W, Oswald W. The Hybrid Adjustment of Terrestrial and the Satellite Aided Network Observations Investigation of Accuracies. FIG, 1986.
- [3] 张宝庭. 方差-协方差估计. 武汉测绘学院学报. 1982 (1).

# The Estimation of Hybrid Stochastic Model of Combined Satellite and Terrestrial Net Adjustment

Xu Caijun

## Abstract

In this paper, stochastic model error and its influence on the results of combined satellite and terrestrial net adjustment are discussed. A method of variance-component-estimating (VCE) has been applied to combined adjustment. Some numerical of analogous and real observations are given, which are discussed.

**【Key words】** combined adjustment; model error; variance-component-estimating