DOI:10.13203/j.whugis1988.03.011

第13卷 第3期 武汉测绘科技大学学报 Vol.13 No.3
1988年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sep. 1988

秩亏网伪逆平差值的修正估计

刘 丁 酉

摘　要

本文在［1］的基础上提出了秩亏的带权测量平差模型中未知参数向量的一种线性有偏估计——秩亏网伪逆平差值的修正估计，并着重讨论了该估计在均方误差意义下改进最小二乘估计的优越性、可容许性及新产生的偏差。最后通过实例验证了所得结果。

【关键词】 线性有偏估计；均方误差；组合主成分估计；秩亏网伪逆平差值的修正估计

1　問題的提出

在测量平差中通常采用最小二乘法求解待估的未知参数向量。以间接测量平差为例，其线性误差方程可设为：

$$L = AX + V,\ E(V) = 0,\ \mathrm{Cov}(V) = \sigma^2 P^{-1}. \tag{1}$$

这里 L 为 n×1观测向量，X 为 t×1 未知参数向量，V 为 n×1观测值改正数向量，A 为 n×系数矩阵且 $\mathrm{rank}(A) = t < n$，对角阵 P 为权阵，σ^2 为单位权方差。

在 $V^TPV = \min$ 的条件下求（1）中的 X 的 LS 估计（即最小二乘估计），我们有：

$$\hat{X} = (A^TPA)^{-1}A^TPL. \tag{2}$$

统计分析表明：（2）中 $\hat{X}$ 确实具有一些优良的统计特性。但是我们知道，一个测量过程有时不仅与随机误差 V 有关，而且还受到测量自身几何结构的直接影响，特别是当这种结构不理想时，若仅限于在无偏估计类中按 $V^TPV = \min$ 来求 $\hat{X}$，则它很可能不是最好的平差值。该问题从另一方面看，由于 LS 估计 $\hat{X}$ 的协因数阵 $\mathrm{Cov}(\hat{X}) = \sigma^2(A^TPA)^{-1}$，其均方误差为

$$M(\hat{X}) = \mathrm{E}\left[\|\hat{X} - X\|^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{t} \lambda_i^{-1}, \tag{3}$$

本文1987年9月26日收到.

其中 λ_i（i=1，2，…，t）为 $A^{T}PA$ 的第 i 个特征值。顾及到 $A^{T}PA$ 的对称正定性，可设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_t > 0$，于是由（3）知 $M(\hat{X})$ 的大小不仅与 V 有关，它还直接依赖于 $A^{T}PA$ 的特征值 λ_i 的取值。当某些 λ_i 很小时，$M(\hat{X})$ 就会偏大，亦即 $\hat{X}$ 距待估参数真值 X 的偏离程度大，从而削弱了 LS 估计的性能。

由此可见，对上述情形，我们有必要脱离"无偏性"的束缚，而到线性估计类中寻求较好的有偏估计。此外，这种情形在秩亏网模型中也会出现，因而也存在相应的问题。

2 线性有偏估计的现有结果

关于在线性估计类中寻求有偏估计的工作，不少统计学者已从理论上作过较多探索。如文［2］提及的岭回归、压缩估计及 Massy 主成分估计等就是线性有偏估计的代表。它们之间的一个共同特征是：当矩阵 $A^{T}PA$ 的结构不理想而使 LS 估计 $\hat{X}$ 的均方误差过大时，相应地给出某个线性有偏估计 $\tilde{X}$，并使其有较小的均方误差和较小的范数。即

$$M(\tilde{X}) \leqslant M(\hat{X}), \quad \|\tilde{X}\| \leqslant \|\hat{X}\|$$

但是由于这些估计一般与参数 σ^2 及 X 等有关，因而在实际应用上必须首先通过样本来预估。

最近文［1］对等权线性回归模型（即(1)中 $P=I_n$）提出了回归参数 X 的组合主成分估计。该估计正好弥补了上述估计之不足。不失一般性，我们可设误差方程（1）就是等权线性模型（$P=I_n$）。进一步采用以下相似变换

$$B=AQ, \quad Y=Q^{T}X, \tag{4}$$

则（1）又可化为相应的典则形式：

$$L=BY+V, \quad E(V)=0, \quad Cov(V)=\sigma^2 I_n. \tag{5}$$

（4）中 $Q=(q_1, q_2, \cdots, q_t)$，$q_i$（i=1，2，…，t）为 $A^{T}A$ 的特征值 λ_i（i=1,2,…,t）相应的标准正交特征向量。文［1］的主要工作是：对典则方程（5），顾及到 Y 的 LS 估计为 $\hat{Y}=Q^{T}\hat{X}=\Lambda^{-1}B^{T}L$，$\Lambda=\mathrm{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t]$，并利用非均匀压缩得到：

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} \lambda_i^{-1} y_i, & \hat{\lambda}_i \geqslant 1; \\ \lambda_i \hat{y}_i, & \lambda_i < 1. \end{cases} \tag{6}$$

从而

$$\tilde{X} = Q\tilde{Y} \tag{7}$$

即为（1）中 X 的组合主成分估计。且有

定理1 在椭球 $\gamma^{T}G\gamma \leqslant d$ 内，组合主成分估计 $\tilde{Y}$ 比LS估计 $\hat{Y}$ 有较小的均方误差。其中

$$G=\mathrm{Diag}[(\lambda_1^{-1}-1)^2, \cdots, (\lambda_r^{-1}-1)^2, (\lambda_{r+1}-1)^2, \cdots, (\lambda_t-1)^2]$$

$$\gamma^{T}=(y_1/\sigma, y_2/\sigma, \cdots, y_t/\sigma),$$

$$d=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{-1}-\lambda_i^{-3})+\sum_{i=r+1}^{t}(\lambda_i^{-1}-\lambda_i)$$

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r \geqslant 1 > \lambda_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_t > 0.$$

定理 2 组合主成分估计 $\widetilde{X}$ 可表为 X_i^*（$i=1, 2, \cdots, t$）的线性组合：

$$\widetilde{X} = \sum_{i=0}^{t} \omega_i X_i^*,$$

其中 X^* 为 X 的丢弃后 i 个主成分的 Massy 主成分估计，$\sum_{i=0}^{t} \omega_i = 1$，且：

$$\omega_i = \begin{cases} \lambda_t, & i=0; \\ \lambda_{t-i} - \lambda_{t-i+1}, & 1 \leqslant i \leqslant t-r-1; \\ \lambda_r^{-1} - \lambda_{r+1}, & i = t-r; \\ \lambda_{t-i}^{-1} - \lambda_{t-i+1}^{-1}, & t-r+1 \leqslant i \leqslant t-1; \\ 1 - \lambda_1^{-1}, & i=t. \end{cases}$$

注意到 $\widehat{Y} = \Lambda^{-1} Q^T A^T L = (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \cdots, \widehat{y}_t)^T$，这里 $\widehat{y}_i$ 即可视为 $\widehat{Y}$ 的第 i 个主成分。若给定某个界限 α_0，则将小于 α_0 的那些 λ_i 对应的 $\widehat{y}_i$ 去掉。从而由 $Y_r^* = (\widehat{y}_1, \cdots, \widehat{y}_{t-r}, 0, \cdots, 0)^T$ 及 $X_r^* = QY_r^*$ 即可获得 X 的丢弃后 r 个主成分的 Massy 主成分估计。

定理 3 在均方误差意义下，组合主成分估计 $\widetilde{X}$ 在线性估计类中是可容许估计。

这里，线性可容许估计的统计意义在于：当我们在线性估计类中给出某个具体的估计 $\widetilde{X}$（如组合主成分估计）时，通俗地讲，我们希望 $\widetilde{X}$ 必需满足一个条件，这就是不存在另一个线性估计 $\widetilde{X}'$，使之在均方误差意义下有

$$M(\widetilde{X}') \leqslant M(\widetilde{X})$$

一致地成立（否则我们就宁愿采用估计 $\widetilde{X}'$）。此时我们则说满足上述条件的线性估计 $\widetilde{X}'$ 为可容许估计。

上述定理表明，组合主成分估计不仅是一个线性有偏的可容许估计，而且它不含任何待定的参数，并能在一个有限的椭球内使未知参数估计的均方误差变小。将该估计应用于模型（1）的不等权情形仅在形式上有 A^TPA 与 A^TA 之异，因而可以容易地引进到测量中来。

但是组合主成分估计无法直接应用于带权秩亏自由网测量模型。为此，本文在［1］的基础上对该模型中未知参数的估计问题进行了探讨，并提出了一个类似于（7）的参数估计——秩亏网伪逆平差值的修正估计。

3 秩亏网伪逆平差值的修正估计

设秩亏自由网的线性误差方程为

$$L = A_1 X + V, \ E(V) = 0, \ \mathrm{Cov}(V) = \sigma^2 P^{-1}. \tag{8}$$

上式中系数矩阵 A_1 的秩 $\mathrm{rank}(A_1) = m < t$，秩亏 $d = t - m$，L，X，V，P 及 σ^2 如（1）所

述。

由于（8）是一个含有降秩阵 A_1 的矛盾方程组，X 的 LS 估计 $\widehat{X}$ 所满足的法方程为 $A_1^{\mathrm{T}}PA_1\widehat{X}=A_1^{\mathrm{T}}PL$，且 $\mathrm{rank}(A_1^{\mathrm{T}}PA_1)=\mathrm{rank}(A_1)=m<t$，所以 $A_1^{\mathrm{T}}PA_1$ 中存在着 $\lambda_i=0$ 的特征值。这表明，对秩亏自由网模型（8）中 X 的 LS 估计的改进问题，不能直接利用（6）式求 X 的有偏估计来实现。为此，我们首先结合测量平差的方法从数学上作以下处理。

由文［3］知，秩亏自由网伪逆平差中的伪观测法实质上是利用附加观测 L' 及观测改正数 V' 而增设 d 个线性误差方程：

$$L'=SX+V',\qquad \text{权阵为 } I_d, \tag{9}$$

其中 S 为 $d\times t$ 系数矩阵，$\mathrm{rank}(S)=d=t-m$。且要求

$$A_1S^{\mathrm{T}}=0,\ SS^{\mathrm{T}}=I_d, \tag{10}$$

于是误差方程组（8）与（9）的联立方程组为

$$\begin{pmatrix} L \\ L' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ S \end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} V \\ V' \end{pmatrix},\qquad \text{权阵为}\begin{pmatrix} P_n & O \\ I_d & I_d \end{pmatrix}, \tag{11}$$

且上式中 $[A_1^{\mathrm{T}}\quad S^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为列满秩矩阵。顾及到 $L'=V'=0$，则（11）的最小二乘解 $\widehat{X}$ 满足

$$(A_1^{\mathrm{T}}PA_1+S^{\mathrm{T}}S)\ \widehat{X}=A_1^{\mathrm{T}}PL, \tag{12}$$

这里 $\widehat{X}$ 即是（8）中 X 的最小范数最小二乘估计（以下简记为 LN 估计）$\widehat{X}_{LN}$。且 S^{T} 由 $A_1^{\mathrm{T}}PA_1$ 的零特征值所对应的特征向量组成。不失一般性，仍设 $A_1^{\mathrm{T}}PA_1$ 的特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 1>\lambda_{r+1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m>\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_t=0,$$

$q_1,\ q_2\cdots q_t$ 为其相应的标准正交化特征向量，且记

$$Q=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t)=(Q_1\ \vdots\ S^{\mathrm{T}}),$$

$$Q_1=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_m),\qquad S^{\mathrm{T}}=(q_{m+1},\ \cdots,\ q_t)$$

$$\Lambda=\mathrm{Diag}\,[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_t]=\mathrm{Diag}\,[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \underbrace{0,\cdots,0}_{d}],$$

$$D=\mathrm{Diag}\,[\underbrace{0,\cdots,0}_{m},\ \underbrace{1,\cdots,1}_{d}],$$

$$\overline{\Lambda}=\mathrm{Diag}\,[\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \underbrace{1,\cdots,1}_{d}]=\Lambda+D,$$

则（12）中的系数阵可改写成：

$$A_1^{\mathrm{T}}PA_1+S^{\mathrm{T}}S=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}+QDQ^{\mathrm{T}}=Q\overline{\Lambda}Q^{\mathrm{T}}.$$

仍利用相似变换

$$B_1=A_1Q,\ Y=Q^{\mathrm{T}}X, \tag{13}$$

则（8）式亦有典则形式：

$$L=B_1Y+V\qquad \mathrm{E}(V)=0,\qquad \mathrm{Cov}(V)=\sigma^2P^{-1},$$

且 Y 的 LN 估计 $\widehat{Y}_{LN}$ 满足：

$$\widehat{Y}_{LN}=Q^{\mathrm{T}}\widehat{X}_{LN}=Q^{\mathrm{T}}Q\overline{\Lambda}^{-1}Q^{\mathrm{T}}QB_1^{\mathrm{T}}PL=\overline{\Lambda}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}PL. \tag{14}$$

又

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{Y}_{LN})&=\overline{\Lambda}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P\mathrm{Cov}(L)PB_1\overline{\Lambda}^{-1}\\&=\overline{\Lambda}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P\mathrm{Cov}(V)PB_1\overline{\Lambda}^{-1}\end{aligned}$$

$$=\overline{\Lambda}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P(\sigma^2P^{-1})PB_1\overline{\Lambda}^{-1}$$

$$=\sigma^2(\overline{\Lambda}^{-1}\Lambda\overline{\Lambda}^{-1}), \tag{15}$$

从而

$$M(\widehat{X}_{LN})=\mathrm{E}[\|\widehat{X}_{LN}-X\|^2]=\mathrm{E}[\|Q(\widehat{Y}_{LN}-Y)\|^2]$$

$$=\mathrm{E}[\|\widehat{Y}_{LN}-Y\|^2]=M(\widehat{Y}_{LN})$$

$$=\sigma^2\mathrm{tr}\mathrm{Cov}(\widehat{Y}_{LN})=\sigma^2\sum_{i=1}\lambda_i^{-1}, \tag{16}$$

为改进（14）中的 LN 估计 $\widehat{Y}_{LN}$，如（6）式之作法并顾及到 $\overline{\Lambda}$ 之结构，现构造以下非均匀压缩估计：

$$\widetilde{y}_i=\begin{cases}\lambda_i^{-1}(\widehat{Y}_{LN})_i & \lambda_i\geq 1,\\ \lambda_i(\widehat{Y}_{LN})_i & 0<\lambda_i<1,\\ (\widehat{Y}_{LN})_i & \lambda_i=0.\end{cases}$$

即

$$\widetilde{Y}=\begin{pmatrix}\Lambda_1^{-1} & & \\ & \Lambda_2 & \\ & & I_d\end{pmatrix}\widehat{Y}_{LN}=K\widehat{Y}_{LN}, \tag{17}$$

其中 $\Lambda_1=\mathrm{Diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_r]$，$\Lambda_2=\mathrm{Diag}[\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_m]$，

$K=\mathrm{Diag}[\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_r^{-1},\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_m,\underbrace{1,\cdots,1}_{d}]$.

从而由（13）及（17）有

$$\widetilde{X}=Q\widetilde{Y}=QKQ^{\mathrm{T}}\widehat{X}_{LN}. \tag{18}$$

因上式中的 $\widetilde{X}$ 实际上是对 LN 估计 $\widehat{Y}_{LN}$ 进行非均匀压缩得到的，故称之为秩亏网伪逆平差值的修正估计。

注意到

$$\widetilde{X}=QKQ^{\mathrm{T}}\widehat{X}_{LN}=QK\overline{\Lambda}^{-1}Q^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}PL=MA_1^{\mathrm{T}}PL,$$

其中

$$M=Q[\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-2},\cdots,\lambda_r^{-2},\underbrace{1,\cdots,1}_{t-r})]Q^{\mathrm{T}}.$$

因此，伪逆平差值的修正估计 $\widetilde{X}$ 实际上只需要直接从 LS 估计 $\widehat{X}$ 的基础上直接修正得到。

4 秩亏网伪逆平差值的修正估计的若干性质

定理1′ 在椭球

$$\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{-1}-1)^2\frac{y_i^2}{\sigma^2}+\sum_{i=r+1}(\lambda_i-1)^2\frac{y_i^2}{\sigma^2}\leqslant\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{-1}-\lambda_i^{-3})$$

$$+\sum_{i=r+1}^{m}(\lambda_i^{-1}-\lambda_i) \tag{19}$$

内，秩亏网伪逆平差值的修正估计 $\widetilde{X}$ 比 LN 估计 $\widehat{X}_{LN}$ 有较小的均方误差。

证明：利用正交变换下均方误差不变的性质，我们只需证明估计 $\widetilde{Y}$ 比其相应的 LN 估计 $\widehat{Y}_{LN}$ 有较小的均方误差即可。由（15）及（17）知 $\widetilde{Y}$ 的均方误差为：

$$\begin{aligned} M(\widetilde{Y}) &= \mathrm{tr}\,[\mathrm{Cov}(\widetilde{Y})] + \|E(\widetilde{Y})-Y\|^2 \\ &= \sigma^2\,\mathrm{tr}\,[K\overline{\Lambda}^{-1}V\overline{\Lambda}^{-1}K] + \|(K-I)Y\|^2 \\ &= \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-3}+\sum_{i=r+1}^{m}\lambda_i\right]+\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{-1}-1)^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{m}(\lambda_i-1)^2y_i^2. \end{aligned} \tag{20}$$

顾及到（16）及（19）可得：

$$M(\widetilde{Y})<M(\widehat{Y}_{LN}).$$ 证毕。

注意到（14）中的 $\widehat{Y}_{LN}$ 的向量表示为：

$$\widehat{Y}_{LN}=(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \cdots,\ \hat{y}_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T.$$

于是 Y 的丢弃后 i 个主成分的主成分估计为 $Y^*_i=(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_{-i},\ 0,\cdots,0)^T$，$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。从而由

$$X^*_i=QY^*_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{21}$$

我们可以将（18）式所确定的 $\widetilde{X}$ 进一步表现为 $\widehat{X}_{LN}$ 与 $X^*_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots m)$ 的一个线性关系。即

定理2′　对于秩亏网伪逆平差值的修正估计 $\widetilde{X}$，有：

$$\widetilde{X}=\sum_{i=0}^{m}\omega_i X^*_i+\widehat{X}_{LN}, \tag{22}$$

且 ω_i 满足：

$$\sum_{i=0}\omega_i=0,$$

$$\omega_i=\begin{cases}\lambda-1, & i=0,\\ \lambda_{-i}-\lambda_{-i+1} & 1\leqslant i\leqslant m-r-1,\\ \lambda_r^{-1}-\lambda_{r+1} & i=m-r\ ,\\ \lambda_{-i}^{-1}-\lambda_{-i+1}^{-1} & m-r+1\leqslant i\leqslant m-1,\\ 1-\lambda_1^{-1} & i=m\ .\end{cases} \tag{23}$$

证明：由（13）、（18）及（21）知（22）式等价于

$$\widetilde{Y}=\omega_0 Y^*_0+\omega_1 Y^*_1+\cdots+\omega_{m-1}\ Y^*_{m-1}\ +\ \widehat{Y}_{LN},$$

再将（14），（17）及 Y^*_i（$i=0$，1，2，…，$m-1$）代入上式求解可得（23）式，定理获证。

在定理3′之前，我们需要给出以下的定义：对于模型（8），若 $c'X$ 为 X 之一线性函数且存在 $c'X$ 之一无偏估计量 $\varphi(L)$，则称 $c'X$ 为可估的；若 C 为 $r\times t$ 矩阵，其各行向量为 c'_1，c'_2，…，c'_r，而 c'_iX 都可估（$i=1$，2，…，r），则称 CX 为可估的。

定理3′ 在二次损失下，秩亏网伪逆平差值的修正估计 $\widetilde{X}$ 是线性估计类中的可容许估计。

证明：由文［4］知（12）中的LN估计 $\widehat{X}_{LN}$ 为 X 的无偏估计，于是 X 是可估的。若令 $S=I_t$，并记 $K_1=QK\overline{\Lambda}^{-1}Q^TA_1^TP$，则 $\widetilde{X}=K_1L$。顾及到（12），（18）及

$$A_1^TPA_1(A_1^TPA_1)^-A_1^TP^{\frac{1}{2}}=A_1^TP^{\frac{1}{2}},\tag{24}$$

所以

1） $$K_1A_1(A_1^TPA_1)^-A_1^TP=QK\overline{\Lambda}^{-1}Q^TA_1^TPA_1(A_1^TPA_1)^-A_1^TP$$
$$=QK\overline{\Lambda}^{-1}A_1^TP^{\frac{1}{2}}\ P^{\frac{1}{2}}=K_1;$$

2） $$K_1A_1(A_1^TPA_1)^-A_1^TK_1^T=QK\overline{\Lambda}^{-1}\Lambda\overline{\Lambda}^{-1}KQ^T.$$
$$K_1A_1(A_1^TPA_1)^-S^T=QK\overline{\Lambda}^{-1}\Lambda\Lambda^-Q^T,$$

于是由

$$K\overline{\Lambda}^{-1}\Lambda\overline{\Lambda}^{-1}K=\mathrm{Diag}\,[\lambda_1^{-3},\ \cdots,\ \lambda_r^{-3}.\ \lambda_{r+1}\ ,\ \cdots,\ \lambda\ ,\ \ 0\ ,\cdots,\ \ 0]\ ,$$
$$K\overline{\Lambda}^{-1}\Lambda\Lambda^-=\mathrm{Diag}\,[\lambda_1^{-2},\ \lambda_2^{-2},\ \cdots,\ \lambda_r^{-2},\ \ 1\ ,\ \cdots,\ \ 1\ ,\ \ 0\ ,\ \cdots,\ \ 0]$$

及 Q 的正交性，知

$$K_1A_1(A_1^TPA_1)^-A_1^TK_1^T\leqslant K_1A_1(A_1^TPA_1)^-S^T.$$

这里“$U\leqslant R$”意味着“$R—U$”为半正定矩阵。从而由文［5］中的定理4.5知，K_1L 在损失函数 $\|SX-K_1L\|^2$ 之下为SX的可容许估计。亦即 $\widetilde{X}$ 是线性类中的可容许估计。即获欲证。

由 X 的LN估计 $\widehat{X}_{LN}$ 的无偏性及（18）易见 $\widetilde{X}$ 是线性有偏的。为估计 $\widetilde{X}$ 新产生的偏差，我们考察一下其相应的残差平方和，于是有

$$\Phi_{\widetilde{x}}=V_{\widetilde{x}}^TPV_{\widetilde{x}}=(L-A_1\widetilde{X})^TP(L-A_1\widetilde{X})$$
$$=[(L-A_1\widehat{X}_{LN})+A_1(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})]^TP\,[(L-A_1\widehat{X}_{LN})+A_1(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})]$$
$$=(L-A_1\widehat{X}_{LN})^TP(L-A_1\widehat{X}_{LN})+(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})^TA_1^TPA_1(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})$$
$$+2\,(L-A_1\widehat{X}_{LN})^TPA_1(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})\ .$$

顾及到（24），有

$$A_1^TP\ (L-A_1\widehat{X}_{LN})=\overline{0},$$

且

$$\Phi_{\widetilde{X}}=(L-A_1\widehat{X}_{LN})^TP(L-A_1\widehat{X}_{LN})+(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})^TA_1^TPA_1(\widehat{X}_{LN}-\widetilde{X})$$

$$=\Phi_{\widehat{X}_{LN}}+\widetilde{\Phi}. \tag{25}$$

这里$\widetilde{\Phi}$即为新产生的偏差，且有

$$\widetilde{\Phi}=\widehat{Y}_{LN}(I-K)^T\Lambda(I-K)\widehat{Y}_{LN}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(1-\lambda_i^{-1})^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{m}\lambda_i(1-\lambda_i)^2y_i^2. \tag{26}$$

再顾及（18），（15）及定理1′的证明，立即可得

1）　$$\|E(\widetilde{X})-X\|^2=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{-1}-1)y_i^2+\sum_{i=r+1}^{m}(\lambda_i-1)^2y_i^2; \tag{27}$$

2）　$$\mathrm{Var}(\widetilde{X}_i)\leqslant\mathrm{Var}(\widehat{X}_{LN}). \tag{28}$$

（26）～（28）表明：对于参数真值X的估计而言，首先在测量过程中适当选取测量的几何结构是一个至关重要的环节。因为无论是最小二乘意义下的无偏估计，还是均方误差最小意义下的有偏估计，都存在一个与该结构相关的问题。即：LS估计$\widehat{X}$的各分量偏离X的幅度过大，在很大程度上依赖于样本观测值的好坏；而均方误差意义下的估计虽能使其估值更接近真值，但有一定的偏差。因此上文给出的秩亏网伪逆平差值的修正估计在这二者之间起了一个调合的作用，它可以作为对LS估计在一定范围内的较好修正。

5 算例及分析

本节给出秩亏网伪逆平差值的修正估计在秩亏网平差中的一个应用算例，并由此验证以上的理论分析。

例1　在图1所示的水准网中，其观测高差及其权分别为：

$L_0=[0.088, 0.053, 0.084, 1.032, 1.202, 1.180]^T$ (m)，

$P=\mathrm{Diag}[0.05, 0.52, 0.01, 0.32, 0.02, 0.40]$.

各点高程近似值取定为：

$x_1^0=100.078(\mathrm{m})$，$x_2^0=100.099(\mathrm{m})$，$x_3^0=101.216(\mathrm{m})$，

$x_4^0=100.000(\mathrm{m})$

因而整理后的误差方程为（单位为mm）：

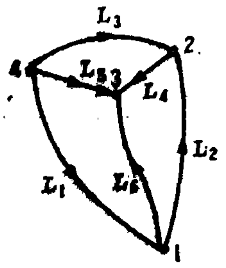

图1

$$L=\begin{pmatrix}10\\32\\-15\\-85\\-12\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu_1\\\nu_2\\\nu_3\\\nu_4\\\nu_5\\\nu_6\end{pmatrix}=A_1X+V,$$

于是计算可得：

$$N=A_1^TPA_1=\begin{pmatrix}0.97&-0.52&-0.4&-0.05\\-0.52&0.85&-0.32&-0.01\\-0.40&-0.32&0.74&-0.02\\-0.05&-0.01&-0.02&0.08\end{pmatrix},$$

$$C=A_1^TPL=[-32.94,\ 43.69,\ -10.64,\ -0.11].$$

N 的特征值为

$$\lambda_1\doteq1.449\,763\,938,\ \lambda_2\doteq1.084\,430\,601,\ \lambda_3\doteq0.105\,805\,461,\ \lambda_4=0.$$

对应的特征向量构成的正交矩阵为

$$Q\doteq\begin{pmatrix}0.788\,576\,150&0.236\,857\,294&0.268\,414\,436&0.5\\-0.587\,992\,234&0.559\,174\,359&0.302\,636\,974&0.5\\-0.178\,700\,623&-0.794\,493\,733&0.294\,696\,098&0.5\\-0.021\,883\,212&-0.001\,537\,920&-0.865\,747\,516&0.5\end{pmatrix}$$

因而在 N 的凯莱逆意义下对应的 X 的伪逆估计与伪观测法所得估计 $\widehat{X}_{伪观}$及 $\widehat{Y}_{伪观}$ 分别为

$$\widehat{X}_{伪逆}\doteq[-18.188,\ 36.949,\ -8.509,\ -10.251]^T,$$

$$\widehat{X}_{伪观}\doteq[-18.188,\ 36.949,\ -8.509,\ -10.251]^T,$$

$$\widehat{Y}_{伪观}\doteq[-34.324,\ 23.129,\ 12.668,\ 0]^T. \qquad (29)$$

且 $$\widetilde{X}=QKQ^T\widehat{X}_{伪观}=[-13.258,\ 26.253,\ -12.319,\ -0.675]^T,$$

由此可见：$\widehat{X}_{伪逆}=\widehat{X}_{伪观}$，且对 $\widehat{X}_{伪逆}$，$\widehat{X}_{伪观}$及 $\widetilde{X}$，分别有：$\widehat{x}_1+\widehat{x}_2+\widehat{x}_3+\widehat{x}_4=0$。

由于所有估计的均方误差公式中含有真值 σ^2 及 y_i（$i=1,2,\cdots,m$），对其进行估算时，我们可在同一尺度下采用无偏估计量 $\widehat{\sigma^2}$ 及 $\widehat{y}_i$ 来代替 σ^2 和 y_i。这是因为这种代替不会带来实质上的差异，只要 Y 处在定理 1′ 中相应的椭球内，那么各种估计的均方误差就同时是 σ^2 的增函数。

注意到 $\widehat{\sigma}^2_{LN}=\dfrac{V^TPV}{6-3}\doteq418.373$，所以由（16）及（29）有

$$M(\widehat{X}_{伪观}) = M(\widehat{Y}_{LN}) \doteq 40\,216.133\ (mm)^2$$

再由（20）及（29）可算得：

$$M(\widetilde{X}) = M(\widetilde{Y}) \doteq 754.569\ (mm)^2$$

而
$$\|\widehat{X}_{伪观}\| = 43.284\ (mm),$$

$$\|\widetilde{X}\| = 31.894\ (mm),$$

这表明伪逆平差值的修正估计 $\widetilde{X}$ 在均方误差意义下确实能很好地改进 LN 估计的结果，（$M(\widehat{X}_{LN})$ 是 $M(\widetilde{X})$ 的53.296 85倍！），且保留了亏秩平差中的范数最小性质。

再比较一下单位权中误差的估计值：

$$\widehat{\sigma}_{伪观} = \left(\frac{\widehat{V}^T P \widehat{V}}{n-m}\right)^{1/2} \doteq \pm 20.454\ (mm),$$

但
$$\widetilde{\sigma}_{伪修} = \left(\frac{\widetilde{V}^T P \widetilde{V}}{n-m}\right)^{1/2} \doteq \pm 21.883\ (mm),$$

因此二者改变甚微，其中 $\widehat{V}$ 与 $\widetilde{V}$ 分别为对应于 $\widehat{X}_{LN}$ 和 $\widetilde{X}$ 的观测改正数。这意味着：我们可以在基本不改变 LN 估计的性能的基础上使均方误差变得很小，从而提高估值的精确度。

综上所述，本文所讨论的伪逆平差值的修正估计与其它线性估计比较有以下优点：

1）估计本身不带有任何参数，应用方便；

2）数据利用率高，仅在 LN 估计的基础上增加一些计算步骤即可实现估值；

3）对 LN 估计的最小二乘意义能基本上顾及，因而保留了 LN 估计的良好统计性能；

4）对估计的均方误差作了实质性的改进，并保留了亏秩平差中的范数最小性质，使估计的精度在这种意义下得到提高。

徐因副教授对本文的撰写多次热心指导，特此致谢。

参 考 文 献

〔1〕 贾忠贞，回归系数的组合主成分估计，数理统计与应用概率，Vol．2，No．2，1987．

〔2〕 陈希孺、王松桂，近代实用回归分析，广西人民出版社，1984．

〔3〕 陶本藻，自由网平差与变形分析，测绘出版社，1984．

〔4〕 於宗俦，于正林，自由网平差中若干问题的讨论，武汉测绘科技大学学报，3，1986．

〔5〕 陈希孺，陈桂景、吴启光、赵林城，线性模型参数的估计理论，科学出版社，1985．

〔6〕 武汉大学、山东大学计算数学教研室，计算方法，人民教育出版社，1979．

〔7〕 王松桂，线性模型的理论及应用，安徽教育出版社，1987．

〔8〕 陈希孺，数理统计引论，科学出版社，1981．

Corrective Estimation of Pseudo-Inverse Adjustment of Rank-Defect Net

Liu Dingyou

Abstract

On the basis of reference [1], the paper presents a linear biased estimation, which is called the corrective estimation of pseudo-inverse adjustment of rank-defect net of unknown parameter vectors in the model of rank-defect surveying adjustment with weight. It also discusses in great detail the superiority, admissibility and new bias of the estimation in improving the results of least squares adjustment in terms of the mean squared error. Finally, the results mentioned above are tested by an example.

[Key words] linear biased estimation; mean squared error; combination principal components estimation; corrective estimation of pseudo-inverse adjustment of rank-defect net

Seminar on the Wang Zhizhuo's Academic Thinking and Digital Photogrammetry will be Held in Wuhan

Seminar on the Wang Zhizhuo's academic thinking and digital photogrammetry organized by the Wuhan Technical University of Surveying and Mapping (WTUSM) and Commission of Photogrammetry and Remote Sensing, Chinese Society of Surveying and Mapping (CSSM) and will be held in Wuhan, Dec. 11—17, 1988, just on the 80th birthday and 50th teaching anniversary of Professor Wang Zhizhuo. The brief programme for that seminar will be as the following:

First stage: Dec. 11—15 Conference of Digital Photogrammetry

1) Report on the 16th International Congress of ISPRS by Prof. Wang Zhizhuo.
2) Discussion on the situation and development of digital photogrammetry in China.
3) Discussion on the theory and technology of digital photogrammetry.
4) Report on the applications of micro computer in the reequiping of normal photogrammetric instruments.
5) Demonstration of micro and Mini Computer software in digital photogrammetry.

Second stage: Dec. 16—17 Seminar on the Wang Zhizhuo's academic thinking

1) The important position and the contribution of Wang Zhizhuo's academic thinking in the speciality development of photogrammetry and remote sensing in China.
2) The guiding function of Wang Zhizhuo's teaching theory in the education of surveying and mapping.

Now, the works for collecting papers have been completed. The preparation concerning that seminar are in progress.