DOI:10.13203/j.whugis1988.03.005

第13卷 第3期 武汉测绘科技大学学报 Vol.13 No.3
1988年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sep. 1988

分组平差与精度评定

於宗俦 于正林

摘 要

本文详细推导了附有限制条件的条件分组平差的计算公式和精度评定公式，并由此引出其它各种分组平差——附有未知参数的条件分组平差，无参数的条件分组平差，附有限制条件的间接分组平差和序贯平差——的计算公式和精度评定公式。

【关键词】 分组平差；精度评定；附有限制条件的条件分组平差

引 言

〔1〕中已详细论述了附有限制条件的条件平差模型可以作为各种测量平差方法（包括经典平差和广义平差）的概括模型，〔1〕不仅详细导出了该模型下的平差计算公式和精度评定公式，而且还由此引出了其它各种测量平差方法的平差计算公式和精度评定公式。上述基本思想同样适用于分组平差。本文将重点讨论这方面的问题。

众所周知，在平差网形较大，观测数据较多，或在旧网扩充，增测了新的观测数据等情况下，均可以采用分组平差。在现有的平差文献中，一般对各种分组平差方法介绍较为详尽，而对精度评定问题，特别是对具有参数的条件分组平差的精度评定问题，则叙述较少。本文将侧重讨论分组平差中的精度评定问题，详细地给出主要平差结果的自协因数阵和互协因数阵。

文中绝大部分符号的意义均与〔1〕中相同，因此，本文将不作过多的注释。

1 附有限制条件的条件分组平差

1.1 两组条件方程中均含有未知参数

1.1.1 平差计算公式

第Ⅰ组： $\underset{c_1,n}{A_1}\underset{n,1}{V}+\underset{c_1,u}{B_1}\underset{u,1}{\hat{x}}=\underset{c_1,1}{f_1}$， $R(A_1)=c_1$， $R(B_1)=u<c_1$； (1a)

本文1987年7月14日收到.

第Ⅱ组： $$\underset{c_2,n}{A_2}\ \underset{n,1}{V} + \underset{c_2,u}{B_2}\ \underset{u,1}{\hat{x}} = \underset{c_2,1}{f_2}, \tag{1b}$$

$$\underset{s,u}{C}\ \underset{u,1}{\hat{x}} = \underset{s,1}{f_x},\ R(C)=s. \tag{1c}$$

对于（1）式，整体（不分组）解算时的法方程为

$$\left(\begin{array}{cc:c:c} N_{11} & N_{12} & B_1 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & B_2 & 0 \\ \hdashline B_1^T & B_2^T & 0 & C^T \\ \hdashline 0 & 0 & C & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \hat{x} \\ K_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \tag{2}$$

它的解（第1种解法）为

$$K_1 = N_{11}^{-1}(-N_{12}K_2 - B_1\hat{x} + f_1), \tag{3a}$$

$$\hat{x} = N_x^{-1}(\tilde{B}_2^T K_2 + C^T K_s + B_1^T N_{11}^{-1} f_1). \tag{3b}$$

K_2、K_s由下列方程解出：

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}_{22} + \tilde{B}_2 N_x^{-1}\tilde{B}_2^T & \tilde{B}_2^T N_x^{-1} C^T \\ CN_x^{-1}\tilde{B}_2^T & CN_x^{-1}C^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_2 \\ K_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{f}_2 - \tilde{B}_2 N_x^{-1} B_1^T N_{11}^{-1} f_1 \\ f_x - CN_x^{-1} B_1^T N_{11}^{-1} f_1 \end{pmatrix}. \tag{3c}$$

它的解（第2种解法）还可表示为

$$K_1 = N_{11}^{-1}(-N_{12}K_2 - B_1\hat{x} + f_1), \tag{4a}$$

$$K_2 = \tilde{N}_{22}^{-1}(\tilde{f}_2 - \tilde{B}_2\hat{x}). \tag{4b}$$

$\hat{x}$和K_S由下列方程解出：

$$\begin{pmatrix} -(N_x + \tilde{B}_2^T \tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2) & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ K_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(B_1^T N_{11}^{-1} f_1 + \tilde{B}_2^T \tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{f}_2) \\ f_x \end{pmatrix}. \tag{4c}$$

上述两种解法是完全等价的。式中符号分别为

$$\tilde{N}_{22} = \tilde{N}_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}, \qquad \tilde{B}_2 = B_2 - N_{21}N_{11}^{-1}B_1, \tag{5a}$$

$$\tilde{f}_2 = f_2 - N_{21}N_{11}^{-1}f_1, \qquad N_x = B_1^T N_{11}^{-1} B_1. \tag{5b}$$

观测值改正数的计算公式为

$$V = QA_1^T K_1 + QA_2^T K_2. \tag{6}$$

现对（1）式所表示的函数模型进行分组平差。首先对（$1a$）式进首第1次平差，其函数模型为

$$\underset{c_1,n}{A_1}\ \underset{n,1}{V'} + \underset{c_1,u}{B_1}\ \underset{u,1}{\hat{x}'} = \underset{c_1,1}{f_1}, \qquad R(A_1)=c_1, \quad R(B_1)=u<c_1. \tag{7}$$

它是附有未知参数的条件平差的函数模型，因此，它的法方程及其解为

$$\begin{pmatrix} N_{11} & B_1 \\ B_1^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1' \\ \hat{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\hat{x}' = N_x^{-1} B_1^T N_{11}^{-1} f_1, \tag{9a}$$

$$K_1' = N_{11}^{-1}(f_1 - B_1 \hat{x}'). \tag{9b}$$

第 1 次的平差结果为

$$V' = QA_1^T K_1' = QA_1^T N_{11}^{-1}(f_1 - B_1 \hat{x}'), \tag{9c}$$

$$\overline{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}' \\ \hat{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + V' \\ X^0 + \hat{x}' \end{pmatrix}, \tag{9d}$$

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{L}'} & Q_{\hat{L}'\hat{X}'} \\ Q_{\hat{X}'\hat{L}'} & Q_{\hat{X}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q - Q_{v'} & -QA_1^T N_{11}^{-1} B_1 N_x^{-1} \\ Q^T_{\hat{L}'\hat{X}'} & N_x^{-1} \end{pmatrix}. \tag{9e}$$

式中

$$Q_{v'} = QA_1^T (N_{11}^{-1} - N_{11}^{-1} B_1 N_x^{-1} B_1^T N_{11}^{-1}) A_1 Q.$$

现对（1b）、（1c）两式进行第 2 组条件平差，其函数模型为

$$A_2 V'' + B_2 \hat{x}'' = \overline{f}_2, \tag{10a}$$

$$C \hat{x}'' = \overline{f}_x. \tag{10b}$$

式中，$\overline{f}_2$、$\overline{f}_x$ 是经第 1 次平差后，将 $\hat{L}'$ 、 $\hat{X}'$ 作为新的观测量所列出的第 2 组条件方程和限制条件方程的自由项，其计算公式为

$$\overline{f}_2 = -F_2(\hat{L}', \hat{X}') = f_2 - A_2 V' - B_2 \hat{x}', \tag{10c}$$

$$\overline{f} = -\Phi(\hat{X}') = f_x - C\hat{x}'. \tag{10d}$$

这里需要重点指出的是：在第 1 次平差时，L是观测向量，其先验权逆阵为 Q，而未知参数向量 X 是不具先验特征的非随机量。但经过第 1 次平差后，原观测向量 L 经过第 1 次改正（V'）后变成了 $\hat{L}'$，它的权逆阵由Q变成了$Q_{\hat{L}'}$。同时，未知参数的近似值 X^0 经第一次改正（$\hat{x}'$）后已变成了 $\hat{X}'$，而且它也具有权逆阵$Q_{\hat{X}'}$，即X已由不具随机特性的参数变成了具有随机特性的随机量了。

将（10）式改写为

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'' \\ \hat{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f}_2 \\ \overline{f}_x \end{pmatrix}, \tag{11a}$$

简记为

$$\overline{A}\ \overline{V} = \overline{f}. \tag{11b}$$

它是经典条件平差的函数模型，因此，对应的法方程为

$$(\overline{A}\ \overline{Q}\ \overline{A}^T)\overline{K} = \overline{f}, \tag{12a}$$

其具体形式为

$$\begin{pmatrix} \widetilde{N}_{22}+\widetilde{B}_2N_x^{-1}\widetilde{B}_2^T & \widetilde{B}_2N_x^{-1}C^T \\ CN_x^{-1}\widetilde{B}_2^T & CN_x^{-1}C^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_2 \\ K_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{f}_2 \\ \overline{f}_x \end{pmatrix}. \tag{12b}$$

式中

$$\overline{f_2}=f_2-A_2V'-B_2\hat{x}'=\widetilde{f}_2-\widetilde{B}\ \hat{x}'=\widetilde{f}_2-\widetilde{B}_2N_x^{-1}B_1^TN_{11}^{-1}f_1, \tag{12c}$$

$$\overline{f}_x=f_x-C\hat{x}'=f_x-CN_x^{-1}B_1^TN_{11}^{-1}f_1. \tag{12d}$$

将（12b）式与（3c）比较可知，它们的系数和常数项均完全一致。可见，第2组平差求得的 K_2 与 K_s 就是整体平差的结果。

观测值、未知参数的第2次改正数为

$$\overline{V}=\overline{Q}\,\overline{A}^T\overline{K}, \tag{13a}$$

即

$$V''=(Q_{\hat{L}'}A_2^T+Q_{\hat{L}'\hat{X}'}B_2^T)K_2+Q_{\hat{L}'\hat{X}'}C^TK_S, \tag{13b}$$

$$\hat{x}''=(Q_{\hat{X}'\hat{L}'}A_2^T+Q_{\hat{X}'}B_2^T)K_2+Q_{\hat{X}'}C^TK_S. \tag{13c}$$

将（9c）式中的 $Q_{\hat{L}'}$，$Q_{\hat{X}'}$，$Q_{\hat{L}'\hat{X}'}$ 代入上式，整理后得

$$\hat{x}''=N_x^{-1}(\widetilde{B}_2^TK_2+C^TK_S), \tag{13d}$$

$$V''=Q\widetilde{A}_1^TK_2-QA_1^TN_{11}^{-1}B_1\hat{x}''. \tag{13e}$$

式中

$$\widetilde{A}_2=A_2-N_{21}N_{11}^{-1}A_1. \tag{13f}$$

第2次平差后的最后结果为

$$\hat{L}=\hat{L}'+V'', \tag{14a}$$

$$\hat{X}=\hat{X}'+\hat{x}''. \tag{14b}$$

现在证明分组平差中两次改正数之和与整体平差时求得的改正数相等，即证明：

$$V=V'+V'', \tag{15a}$$

$$\hat{x}=\hat{x}'+\hat{x}''. \tag{15b}$$

由（9c），（13e）两式得

$$V'+V''=QA_1^TK_1'+Q\widetilde{A}_2^TK_2-QA_1^TN_{11}^{-1}B_1\hat{x}''. \tag{16}$$

由（3a），（9b）两式，即得 K_1' 与 K_1 之关系式：

$$K_1'=K_1+N_{11}^{-1}N_{12}K_2+N_{11}^{-1}B_1\hat{x}''. \tag{17}$$

将上式代入（16）式，并顾及（13f）式，即得

$$V'+V''=QA_1^TK_1+Q(\widetilde{A}_2^T+A_1^TN_{11}^{-1}N_{12})K_2=QA_1^TK_1+QA_2^TK_2=V.$$

同样，由（9a），（13d）两式，并顾及（3b）式，即得

$$\hat{x}'+\hat{x}''=N_x^{-1}B_1^TN_{11}^{-1}f_1+N_x^{-1}(\widetilde{B}_2^TK_2+C^TK_S)$$

$$=N_x^{-1}(B_1^TN_{11}^{-1}f_1+\widetilde{B}_2^TK_2+C^TK_S)=\hat{x}.$$

以上介绍的第 2 次条件平差是先解算K_2和K_S，再计算V''和$\hat{x}''$。下面介绍第 2 次平差的另一种解算方法，这种方法是先解算$\hat{x}''$和K_S，再计算K_2和V''。它的推导思想是：将（4b)、(4c) 两式中的$\hat{x}$写成($\hat{x}'+\hat{x}''$)，再将第 1 次平差时已经求得的$\hat{x}'$的解（见（9a）式）代入，通过并项化简，并顾及（12c）和（12d）两式，则可得

$$\begin{pmatrix} -(N_x+\tilde{B}_2^T\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2) & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}'' \\ K_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\tilde{B}_2^T\tilde{N}_{22}^{-1}\bar{f}_2 \\ \bar{f}_x \end{pmatrix}, \tag{18a}$$

$$K_2=\tilde{N}_{22}^{-1}(\bar{f}_2-\tilde{B}_2\hat{x}''). \tag{18b}$$

第 2 次改正数V''的计算公式以及平差最后结果的计算公式仍与（13e)，(14）式相同。

1.1.2 精度评定公式

1.1.2.1 验后单位权方差的计算公式为

$$\hat{\sigma}_0^2=V^TPV/(c_1+c_2-u+s). \tag{19}$$

由于$V'^TPV''=V''^TPV'=0$，则有

$$V^TPV=V'^TPV'+V''^TPV'', \tag{20}$$

$$V^TPV=f_1^TK_1'+\bar{f}_2^TK_2+\bar{f}_x^TK_S, \tag{21}$$

这表明：V^TPV也可分组计算。

1.1.2.2 主要平差结果的自协因数阵和互协因数阵

由于第 2 次平差的函数模型属经典条件平差,因差,主要平差结果$\hat{\bar{L}}=[\hat{L}^T\quad\hat{X}^T]^T$的协因数阵为

$$Q_{\hat{\bar{L}}}=\begin{pmatrix} Q_{\hat{L}} & Q_{\hat{L}\hat{X}} \\ Q_{\hat{X}\hat{L}} & Q_{\hat{X}} \end{pmatrix}=\bar{Q}-\bar{Q}\bar{A}^T(\bar{A}\bar{Q}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}\bar{Q}. \tag{22}$$

将$\bar{Q}$、$\bar{A}$的具体表达式代入上式后，再整理化简，即得表 1 的结果（限于篇幅，只列出第 2 种解法的计算公式）。

表 1

	$\hat{L}$	$\hat{X}$
$\hat{L}$	$Q_{\hat{L}'}-R\bar{N}_{22}^{-1}R^T-(Q_{\hat{L}'\hat{x}'}-R\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2\tilde{N}_{bb}^{-1})\cdot C^T\tilde{N}_{cc}^{-1}C(Q_{\hat{L}'\hat{x}'}-R\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2\tilde{N}_{bb}^{-1})^T$	$Q_{\hat{L}'\hat{x}'}-Q_{\hat{L}'\hat{x}'}C^T\tilde{N}_{cc}^{-1}C\tilde{N}_{bb}^{-1}-R\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2Q_{\hat{x}}$
$\hat{X}$	对称	$\tilde{N}_{bb}^{-1}-\tilde{N}_{bb}^{-1}C^T\tilde{N}_{cc}^{-1}C\tilde{N}_{bb}^{-1}$

表中：$R=Q_{\hat{L}'}A_2^T+Q_{\hat{L}'\hat{x}'}B_2^T$，$\bar{N}_{22}=\tilde{N}_{22}+\tilde{B}_2N_x^{-1}\tilde{B}_2^T$. (23)

$\tilde{N}_{bb}=N_x+\tilde{B}_2^T\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$，$\bar{N}_{cc}=C\tilde{N}_{bb}^{-1}C^T$ (24)

1.1.2.3 平差值函数的权倒数

设有平差值函数：

$$\hat{\varphi}=\Phi(\hat{L},\ \hat{X}), \tag{25}$$

其权函数式为

$$d\hat{\varphi}=G_l d\hat{L}+G_x d\hat{X}, \tag{26}$$

式中

$$G_l=\partial\Phi/\partial\hat{L},\quad G_x=\partial\Phi/\partial\hat{X}. \tag{27}$$

令

$$\overline{G}=[G_l\quad G_x], \tag{28}$$

按广义传播律得平差值函数权倒数的第1计算式：

$$Q_{\hat{\varphi}}=\frac{1}{p_{\hat{\varphi}}}=\overline{G}\,Q_{\hat{\overline{L}}}\,\overline{G}^{T}. \tag{29}$$

将（21）式代入上式得 $Q_{\hat{\varphi}}$ 的第2个计算式：

$$Q_{\hat{\varphi}}=\frac{1}{p_{\hat{\varphi}}}=\overline{G}\,\overline{Q}\,\overline{G}^{T}-\overline{G}\,\overline{Q}\,\overline{A}^{T}(\overline{A}\,\overline{Q}\,\overline{A}^{T})^{-1}\overline{A}\,\overline{Q}\,\overline{G}^{T}. \tag{30}$$

可见，$Q_{\hat{\varphi}}$ 也可随同分组平差计算，此处不再详述。

1.2 第Ⅰ组条件方程中不含未知参数

1.2.1 平差计算公式

函数模型：

第Ⅰ组：
$$\underset{c_1,n}{A_1}\ \underset{n,1}{V}=\underset{c_1,1}{f_1},\quad R(A_1)=c_1, \tag{31a}$$

第Ⅱ组：
$$\underset{c_2,n}{A_2}\ \underset{n,1}{V}+\underset{c_2,u}{B}\ \underset{u,1}{\hat{x}}=\underset{c_2,1}{f_2},\quad R(B)=u, \tag{31b}$$

$$\underset{s,u}{C}\ \underset{u,1}{\hat{x}}=\underset{s,1}{f_x},\quad R(C)=s. \tag{31c}$$

第1次平差。首先单独平差第Ⅰ组条件方程（31a），其函数模型为

$$A_1V'=f_1. \tag{32}$$

显然，它是无参数的经典条件平差模型，观测值的先验权逆阵为 Q，故法方程及其解为

$$N_{11}K_1'=f_1,\quad (N_{11}=A_1QA_1^T) \tag{33a}$$

$$K_1'=N_{11}^{-1}f_1. \tag{33b}$$

第1次的平差结果为

$$V'=QA_1^TK_1'=QA_1^TN_{11}^{-1}f_1, \tag{34a}$$

$$\hat{L}'=L+V', \tag{34b}$$

$$Q_{\hat{L}'}=Q-QA_1^TN_{11}^{-1}A_1Q. \tag{34c}$$

第2次平差。即单独平差第Ⅱ组条件方程（31b）和（31c），其函数模型为

$$A_2V''+B\hat{x}=\overline{f}_2,\tag{35a}$$

$$C\hat{x}=\overline{f}_x.\tag{35b}$$

式中

$$\overline{f}_2=-F_2(\hat{L}',\ X^0)=f_2-A_2V'=\widetilde{f}_2,\tag{35c}$$

$$\overline{f}_x=-\Phi(X^0)=f_x\ .\tag{35d}$$

虽然，它是附有限制条件的条件平差模型，观测值的先验权逆阵为 $Q_{\hat{L}'}$(不是Q)，故法方程及其解为

$$\begin{pmatrix}\widetilde{N}_{22} & B & 0\\ B^T & 0 & C^T\\ 0 & C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_2\\ \hat{x}\\ K_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{f}_2\\ 0\\ f_x\end{pmatrix},\tag{36a}$$

$$K_2=\widetilde{N}_{22}^{-1}(\widetilde{f}_2-B\hat{x}),\qquad (\widetilde{N}_{22}=A_2Q_{\hat{L}'}A_2^T)\tag{36b}$$

$$\hat{x}=\widetilde{N}_{bb}^{-1}(B^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\widetilde{f}_2+C^TK_S),\qquad (\widetilde{N}_{bb}=B^T\widetilde{N}_{22}^{-1}B)\tag{36c}$$

$$K_S=\widetilde{N}_{cc}^{-1}(f_x-C\widetilde{N}_{bb}^{-1}B^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\widetilde{f}_2),\qquad (N_{cc}=C\widetilde{N}_{bb}^{-1}C^T)\tag{36d}$$

第 2 次的平差结果为

$$V''=Q_{\hat{L}'}A_2^TK_2,\tag{37a}$$

$$\hat{L}=\hat{L}'+V'',\tag{37b}$$

$$\hat{X}=X^0+\hat{x}.\tag{37c}$$

1.2.2 精度评定公式

1.2.2.1 验后单位权方差

$$\hat{\sigma}_0^2=V^TPV/(c_1+c_2-u+s)\ ,\tag{38a}$$

式中

$$\begin{aligned}V^TPV&=V'^TPV'+V''^TPV''\\&=f_1^TK_1'+\widetilde{f}_2^TK_2+f_x^TK_S.\end{aligned}\tag{38b}$$

1.2.2.2 各种自协因数阵和互协因数阵

由于第 2 次平差的函数模型属附有限制条件的条件平差，观测向量 $\hat{L}'$ 的权逆阵为 $Q_{\hat{L}'}$，因此，主要平差结果 $\hat{L}$，$\hat{X}$的自协因数阵和互协因数阵可参照〔1〕直接写出，其结果列于表 2 。

表 2

	$\hat{L}$	$\hat{X}$
$\hat{L}$	$Q_{\hat{L}'}-Q_{\hat{L}'}A_2^T(\widetilde{N}_{22}^{-1}-\widetilde{N}_{22}^{-1}BQ_{\hat{x}}B^T\widetilde{N}_{22}^{-1})A_2Q_{\hat{L}'}$	$-Q_{\hat{L}'}A_2^T\widetilde{N}_{22}^{-1}BQ_{\hat{x}}$
$\hat{X}$	对　　　　称	$\widetilde{N}_{bb}^{-1}-\widetilde{N}_{bb}^{-1}C^T\widetilde{N}_{cc}^{-1}C\widetilde{N}_{bb}^{-1}$

1.2.2.3 平差值函数的权倒数（略）

2 其它各种分組平差公式的引出

众所周知，分组平差的方法还有附有未知参数的条件分组平差，无参数的条件分组平差，具有分块权逆阵的条件分组平差，附有限制条件的间接分组平差以及序贯平差（参数间无限制条件的间接分组平差）等等，而这些分组平差法均为“1”中介绍的附有限制条件的条件分组平差的特例，因此，它们的计算公式均可由“1”中的计算公式引出，为节省篇幅，本文只简列数例。

2.1 附有未知参数的条件分组平差

2.1.1 两组条件方程中均含有未知参数

2.1.1.1 平差计算公式

函数模型：

第Ⅰ组： $$\underset{c_1,n}{A_1}\ \underset{n,1}{V} + \underset{c_1 u}{\widehat{B}_1}\ \underset{u,1}{\widehat{x}} = \underset{c_1,1}{f_1}, \quad R(A_1)=c_1,\ R(B_1)=u<c_1, \tag{39a}$$

第Ⅱ组： $$\underset{c_2,n}{A_2}\ \underset{n,1}{V} + \underset{c_2,u}{\widehat{B}_2}\ \underset{u,1}{\widehat{x}} = \underset{c_2,1}{f_2}. \tag{39b}$$

因未知参数之间无限制条件，故该分组平差问题即为附有限制条件的条件分组平差（1.1）取$C=0$时的特殊情况。第1次平差时，因其函数模型与（7）式相同，故法方程及第1次的平差结果同（8），（9）诸式。

第2次平差时，其函数模型为

$$A_2V''+B_2\widehat{x}''=\overline{f}_2 . \tag{40}$$

由（12b）式，顾及$C=0$，即得第2次平差时的的法方程及其解（第1种解法）为

$$(\widetilde{N}_{22}+\widetilde{B}_2N_x^{-1}\widetilde{B}_2^T)K_2=\overline{f}_2, \tag{41a}$$

$$K_2=(\widetilde{N}_{22}+\widetilde{B}_2N_x^{-1}\widetilde{B}_2^T)^{-1}\overline{f}_2 . \tag{41b}$$

由（13），（14）两式即得第2次的平差结果为

$$\widehat{x}''=(Q_{\hat{X}'\hat{L}'}A_2^T+Q_{\hat{X}'}B_2^T)K_2=N_x^{-1}\widetilde{B}_2^TK_2, \tag{42}$$

$$V''=(Q_{\hat{L}'}A_2^T+Q_{\hat{L}'\hat{X}'}B_2^T)K_2=Q\widetilde{A}_2^TK_2-QA_1^TN_{11}^{-1}B_1\hat{x}''. \tag{43}$$

$$\widehat{L}=\widehat{L}'+V'' \tag{44}$$

$$\widehat{X}=\widehat{X}'+\widehat{x}''. \tag{45}$$

由（18）式，顾及$C=0$，又可得第2次平差时的法方程及其解（第2种解法）为

$$(N_x+\widetilde{B}_2^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\widetilde{B}_2)\hat{x}''=\widetilde{B}_2^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\overline{f}_2, \tag{46}$$

$$\widehat{x}''=(N_x+\widetilde{B}_2^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\widetilde{B}_2)^{-1}\widetilde{B}_2^T\widetilde{N}_{22}^{-1}\overline{f}_2, \tag{47}$$

$$K_2=\widetilde{N}_{22}^{-1}(\overline{f}-\widetilde{B}_2\widehat{x}''). \tag{48}$$

$\hat{L}$、$\hat{X}$ 的计算仍与（44），（45）式相同。

2.1.1.2 精度评定公式

在（19）式中取 $s=0$，即得验后单位权方差的计算公式：

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^{\mathrm{T}}PV/(c_1+c_2-u), \tag{49}$$

顾及此处不存在限制条件，故由（20），（21）式知

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{T}}PV &= V'^{\mathrm{T}}PV' + V''^{\mathrm{T}}PV'' \\ &= f_1^{\mathrm{T}}K_1' + \tilde{f}_2^{\mathrm{T}}K_2 \ . \end{aligned} \tag{50}$$

在表 1 中，取$C=0$，即得主要平差结果的自协因数阵和互协因数阵，其结果列于表 3。

表 3

	$\hat{L}$	$\hat{X}$
$\hat{L}$	$Q_{\hat{L}'} - R\tilde{N}_{22}^{-1}R^{\mathrm{T}}$	$Q_{\hat{L}'\hat{x}} - R\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{B}_2Q_{\hat{x}}$
$\hat{X}$	对　　　称	$\tilde{N}_{bb}^{-1}$

2.1.2 特殊情况（第 1 组条件方程中不含未知参数）

2.1.2.1 平差计算公式

函数模型：

第Ⅰ组：
$$\underset{c_1,n}{A_1}\ \underset{n,1}{V} = \underset{c_1,1}{f_1}\ ,\ R(A_1)=c_1, \tag{51a}$$

第Ⅱ组：
$$\underset{c_2,u}{A_2}\ \underset{n,1}{V} + \underset{c_2,u}{\hat{B}}\ \underset{u,1}{x} = \underset{c_2,1}{f_2}\ ,\ R(B)=u. \tag{51b}$$

因第 1 组条件方程中不含未知数，且未知参数之间又无限制条件，故该分组平差问题即为附有限制条件的条件分组平差（1.2）取$C=0$时的特殊情况。

第 1 次的平差计算公式与（33），（34）诸式相同。

第 2 次的平差计算公式只要在（35），（36）诸式中令 C＝0 即可直接写出：

函数模型为

$$A_2V'' + B\hat{x} = \tilde{f}_2 \ . \tag{52}$$

法方程及其解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}_{22} & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_2 \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{53a}$$

$$K_2 = \tilde{N}_{22}^{-1}(\tilde{f}_2 - B\hat{x}), \qquad (\tilde{N}_{22} = A_2Q_{\hat{L}'}A_2^{\mathrm{T}}) \tag{53b}$$

$$\hat{x} = \tilde{N}_{bb}^{-1}(B^{\mathrm{T}}\tilde{N}_{22}^{-1}\tilde{f}_2) \ . \qquad (\tilde{N}_{bb} = B^{\mathrm{T}}\tilde{N}_{22}^{-1}B) \tag{53c}$$

第 2 次的平差结果仍用（37）式表达。

2.1.2.2 精度评定公式

在（38）式中取 $s=0$，即得验后单位权方差：

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^{\mathrm{T}}PV/(c_1+c_2-u), \tag{54}$$

式中

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{T}}PV &= V'^{\mathrm{T}}PV' + V''^{\mathrm{T}}PV'' \\ &= f_1^{\mathrm{T}}K_1' + \tilde{f}_2^{\mathrm{T}}K_2 \ . \end{aligned} \tag{55}$$

在表 2 中取 $C=0$，即得主要平差结果的自协因数阵和互协因数阵，其结果列于表 4。

表 4

	$\hat{L}$	$\hat{X}$
$\hat{L}$	$Q_{\hat{L}'} - Q_{\hat{L}'} A_2^{\mathrm{T}}(\tilde{N}_{22}^{-1} - \tilde{N}_{22}^{-1} B Q_{\hat{x}} B^{\mathrm{T}} \tilde{N}_{22}^{-1}) A_2 Q_{\hat{L}'}$	$-Q_{\hat{L}'} A_2^{\mathrm{T}} \tilde{N}_{22}^{-1} B Q_{\hat{x}}$
$\hat{X}$	对　　　称	$\tilde{N}_{bb}^{-1}$

2.2 无参数的条件分组平差

2.2.1 平差计算公式

函数模型：

第Ⅰ组： $\underset{r_1,n}{A_1}\ \underset{n,1}{V} = \underset{r_1,1}{f_1}$，$R(A_1)=r_1$，　(56a)

第Ⅱ组： $\underset{r_2,n}{A_2}\ \underset{n,1}{V} = \underset{r_2,1}{f_2}$ 。　(56b)

因两组条件方程中均不含未知参数，故该分组平差问题实为附有限制条件的条件分组平差（1.2）取 $C=0$，$B=0$ 时的特殊情况。当然，也可看成是第 1 组条件方程中不含未知参数的分组平差的进一步简化。

第 1 次的平差计算公式仍与（33），（34）诸式相同。

第 2 次的平差计算公式，只要在（35），（36）诸式中令 $C=0$，$B=0$ 后即可直接写出：

函数模型为

$$A_2 V'' = \tilde{f}_2 \ , \tag{57}$$

法方程及其解为

$$\tilde{N}_{22} K_2 = \tilde{f}_2 \ . \tag{58a}$$

$$K_2 = \tilde{N}_{22}^{-1} \tilde{f}_2 \ . \tag{58b}$$

第 2 次的平差结果仍用（37a），（37b）式表达。

2.2.2 精度评定公式

在（38）式中取 $s=0$，$u=0$ 并顾及 $c_1=r_1$，$c_2=r_2$，即得验后单位权方差：

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^{\mathrm{T}}PV/(r_1+r_2), \tag{59}$$

式中

$$V^{\mathrm{T}}PV = V'^{\mathrm{T}}PV' + V''^{\mathrm{T}}PV''$$

$$=f_1^T K_1' + \widetilde{f}_2^T K_2 \quad . \tag{60}$$

在表 2 中，令 $B=0$，即得平差值 $\widehat{L}$ 的协因数阵：

$$Q_{\widehat{L}} = Q_{\widehat{L}'} - Q_{\widehat{L}'} A_2^T \widetilde{N}_{22}^{-1} A_2 Q_{\widehat{L}'} \quad . \tag{61}$$

2.3 附有限制条件的间接分组平差

2.3.1 平差计算公式

函数模型和随机模型分别为

第 I 组： $$\underset{n_1,1}{V_1} = \underset{n_1,u}{B_1} \underset{u,1}{\widehat{x}} - \underset{n_1,1}{f_1}, \quad R(B_1)=u<n_1; \tag{62a}$$

第 II 组： $$\underset{n_2,1}{V_2} = \underset{n_2,u}{\widehat{B}_2} \underset{u,1}{x} - \underset{n_2,1}{f_2} \quad , \tag{62b}$$

$$\underset{s,u}{C} \underset{u,1}{\widehat{x}} = \underset{s,1}{f_x} \quad , \tag{62c}$$

$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}, \qquad P=Q^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} . \tag{62d}$$

将 (62a), (62b), (62c) 三式改写为

$$-V_1+B_1\widehat{x}=f_1, \tag{63a}$$

$$-V_2+B_2\widehat{x}=f_2, \tag{63b}$$

$$C\widehat{x}=f_x \quad . \tag{63c}$$

可见，该分组平差法实为附有限制条件的条件分组平差（1.1）取 $A_1=[-I \quad 0]$、$A_2=[0 \quad -I]$ 的特例。且有

$$N_{11}=A_1QA_1^T=Q_{11}, \quad N_{22}=A_2QA_2^T=Q_{22}, \tag{64a}$$

$$N_{21}=0, \quad N_x=B_1^TN_{11}^{-1}B_1=B_1^TP_1B_1 \quad . \tag{64b}$$

第 1 次平差。其函数模型为

$$-V_1'+B_1\widehat{x}'=f_1 \quad . \tag{65}$$

由 (9b) 式知：

$$K_1'=N_{11}^{-1}(f_1-B_1\widehat{x}')=P_1(f_1-B_1\widehat{x}'),$$

将上式代入（8）式得法方程及其解为

$$(B_1^TP_1B_1)\widehat{x}'=B_1^TP_1f_1, \tag{66a}$$

$$\widehat{x}'=(B_1^TP_1B_1)^{-1}B_1^TP_1f_1. \tag{66b}$$

由 (9c)、(9d) 式得第 1 次的平差结果为

$$\widehat{X}'=X^0+\widehat{x}', \tag{67a}$$

$$V_1'=B_1\widehat{x}'-f_1, \quad V_2'=0, \tag{67b}$$

$$\widehat{L}_1'=L_1+V_1', \quad \widehat{L}_2'=L_2 . \tag{67c}$$

第 1 次平差值的协因数阵列于表 5。

表 5

	$\hat{L}_1'$	$\hat{L}_2'$	$\hat{X}'$
$\hat{L}_1'$	$B_1N_x^{-1}B_1^T$	O	$B_1N_x^{-1}$
$\hat{L}_2'$		Q_{22}	O
$\hat{X}'$	对	称	N_x^{-1}

第 2 次平差。其函数模型为

$$-V_2+B_2\hat{x}''=\overline{f}_2, \tag{68a}$$

$$C\hat{x}''=\overline{f}_x . \tag{68b}$$

由（12b）式，顾及此时 $\widetilde{N}_{22}=N_{22}=Q_{22}$， $\widetilde{B}_2=B_2$，即得第 2 次平差的法方程（第 1 种解法）为

$$\begin{pmatrix} Q_{22}+B_2N_x^{-1}B_2^T & B_2N_x^{-1}C^T \\ CN_x^{-1}B_2^T & CN_x^{-1}C^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_2 \\ K_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{f}_2 \\ \overline{f}_x \end{pmatrix}. \tag{69}$$

由（13d）式得

$$\hat{x}''=N_x^{-1}(B_2^TK_2+C^TK_S) . \tag{70}$$

由（18a）式，顾及此时 $\widetilde{N}_{22}^{-1}=Q_{22}^{-1}=P_2$，即得第 2 种解法的法方程为

$$\begin{pmatrix} -(N_x+B_2^TP_2B_2) & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}'' \\ K_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B_2^TP_2\overline{f}_2 \\ \overline{f}_x \end{pmatrix}, \tag{71}$$

由此可直接解出 $\hat{x}''$。

第 2 次平差结果为

$$\hat{X}=\hat{X}'+\hat{x}'', \tag{72a}$$

$$V_1''=B_1\hat{x}'', \quad V_2''=V_2=B_2\hat{x}''-\overline{f}_2, \tag{72b}$$

$$\hat{L}_1=\hat{L}_1'+V_1'', \quad \hat{L}_2=L_2+V_2 . \tag{72c}$$

2.3.2 精度评定公式

由（19）式，顾及此时 $c_1=n_1$，$c_2=n_2$，即得验后单位权方差的估值计算公式为

$$\hat{\sigma}_0^2=V^TPV/(n_1+n_2-u+s), \tag{73a}$$

式中

$$V^TPV=V_1^TP_1V_1+V_2^TP_2V_2=V_1'^TP_1V_1'+V_1''^TP_1V_1''+V_2^TP_2V_2$$
$$=f_1^TK_1'+\overline{f}_2^TK_2+\overline{f}_x^TK_s$$

$$=f_1^TP_1f_1-(B_1^TP_1f_1)^T\widehat{x}'+\overline{f}_2^TP_2\overline{f}_2-(B_2^TP_2\overline{f}_2)^T\widehat{x}''+\overline{f}_x^TK_S. \quad (73b)$$

由表 1，顾及此时的一些符号特征，即得主要平差结果的协因数阵，其结果列于表 6。

表 6

	$\widehat{L}_1$	$\widehat{L}_2$	$\widehat{X}$
$\widehat{L}_1$	$B_1Q_{\widehat{x}}B_1^T$	$B_1Q_{\widehat{x}}B_1^T$	$B_1Q_{\widehat{x}}$
$\widehat{L}_2$		$B_2Q_{\widehat{x}}B_2^T$	$B_2Q_{\widehat{x}}$
$\widehat{X}$	对	称	$N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$

2.4 序贯平差（无限制条件的间接分组平差）

2.4.1 平差计算公式

第Ⅰ组：
$$\underset{n_1,1}{V_1}=\underset{n_1,n_0}{\widehat{B}_1}\ \underset{n_0,1}{x}-\underset{n_1,1}{f_1},\ R(B_1)=n_0<n_1; \quad (74a)$$

第Ⅱ组：
$$\underset{n_2,1}{V_2}=\underset{n_2,n_0}{\widehat{B}_2}\ \underset{n_0,1}{x}-\underset{n_2,1}{f_2}. \quad (74b)$$

随机模型与（62d）式相同。

因未知参数的个数为必要观测数 n_0（$u=n_0$），参数间无限制条件，所以，该分组平差法实为附有限制条件的间接分组平差的进一步简化（取C＝0）。第 1 次的平差计算及精度评定公式与（65）～(67) 诸式和表 5 一致。

第 2 次平差时的函数模型为

$$-V_2+B_2\widehat{x}''=\overline{f}_2 . \quad (75)$$

在（69）式中取C＝0，即得第 1 种解法的法方程及其解为

$$(Q_{22}+B_2N_x^{-1}B_2^T)K_2=\overline{f}_2, \quad (76a)$$

$$K_2=(Q_{22}+B_2N_x^{-1}B_2^T)^{-1}\overline{f}_2. \quad (76b)$$

在（70）式中取 $C=0$ 得

$$\widehat{x}''=N_x^{-1}B_2^TK_2 . \quad (77)$$

在（71）式中取 $C=0$，即得第 2 种解法的法方程及其解为

$$(N_x+B_2^TP_2B_2)\widehat{x}''=B_2^TP_2\overline{f}_2, \quad (78a)$$

$$\widehat{x}''=(N_x+B_2^TP_2B_2)^{-1}B_2^TP_2\overline{f}_2. \quad (78b)$$

第 2 次的平差结果仍用（72）式表达。

2.4.2 精度评定公式

在（73）式中取 $s=0$，$u=n_0$，即得

$$\widehat{\sigma}_0^2=V^TPV/(n_1+n_2-n_0). \quad (79a)$$

式中

$$V^TPV=V_1^TP_1V_1+V_2^TP_2V_2$$
$$=V_1'^TP_1V_1'+V_1''^TP_1V_1''+V_2^TP_2V_2$$
$$=f_1^TP_1f_1-(B_1^TP_1f_1)^T\widehat{x}'+\overline{f}_2^TP_2\overline{f}_2-(B_2^TP_2\overline{f}_2)^T\overline{x}''\ . \tag{79b}$$

由表 6，顾及此时 C＝ 0，即得主要平差结果的协因数阵，其结果列于表 7。

表 7

	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{X}$
$\hat{L}_1$	$B_1Q_{\hat{x}}B_1^T$	$B_1Q_{\hat{x}}B_2^T$	$B_1Q_{\hat{x}}$
$\hat{L}_2$		$B_2Q_{\hat{x}}B_2^T$	$B_2Q_{\hat{x}}$
$\hat{X}$	对	称	N_{bb}^{-1}

3 結 束 語

由上面的讨论，可得如下几点初步结论：

1．测量平差中的各种各样的分组平差法均为附有限制条件的条件分组平差的特例。因此，各种分组平差法的计算公式均可由附有限制条件的条件分组平差法的计算公式一一引出。

2．分组平差的要点在于：第 1 次平差是针对第Ⅰ组的函数模型和随机模型——原观测量 L 的权逆阵Q，第2次平差则是针对第Ⅱ组的函数模型和随机模型——新的观测量即第1次的平差结果$\widehat{L}'$，$\widehat{X}'$（如果有的话)的权逆阵 $Q_{\hat{L}'}$，$Q_{\hat{X}'}$与 $Q_{\hat{L}',\hat{X}'}$，而不是对观测量 L的权逆阵 Q 的。只要遵守上述原则，则分组平差的结果（$V'+V''$，$\widehat{x}'+\widehat{x}''$）必然与整体平差的结果（$V$、$\widehat{x}$）一致。

3．上述原则可进一步推广，即分两组平差的原则可推广到分多组平差。当进行第（k+1）次平差时，则是针对第（k+1）组的函数模型与随机模型——第 k 次平差结果$\widehat{L}^k$和$\widehat{X}^k$的权逆阵。

4．未知参数间的限制条件方程可放在第Ⅱ组，也可放在第Ⅰ组，甚至可将限制条件方程中的一部份放在第Ⅰ组另一部分放在第Ⅱ组。

5．一般说来，第 2 次平差时有两种解法，即有两种解算途经。一是先求联系数再求未知参数$\widehat{x}''$，二是直接由法方程解算未知参数$\widehat{x}''$。即使是序贯平差法也可这样做。当然，我们在对某一具体平差问题进行分组平差时，要选择一种适合本题特点的方法，以减少工作量。

参 考 文 献

〔1〕 於宗俦、于正林，各种平差方法的统一与特性，武汉测绘科技大学学报，4，1986.

〔2〕 吴俊昶、刘大杰，控制网测量平差，测绘出版社，1985.

Adjustment in Groups and Evaluation of Precision

Yu Zongchou Yu Zhenglin

Abstract

This paper derives a formula of adjustment computation and precision estimation in the condition group adjustment with constraints. From these methods, it derives the formulas of adjustment computation and precision estimation in other group adjustment methods——the condition group adjustment with parameters, the condition group adjustment without parameters, the parameter group adjustment with constraints, and parameter adjustment in phases.

[Key words] adjustment in groups; evaluation of precision; condition group adjustment with constraints