

第13卷 第3期

武汉测绘科技大学学报

Vol. 13 No. 3

1988年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping

Sep. 1988

# 陀螺经纬仪观测误差的随机模型\*

朱 光

## 摘要

本文对陀螺经纬仪观测数据的主要误差进行了分析。应用马尔柯夫 (Markov) 随机过程的理论研究了陀螺仪观测误差的随机模型，并用实例计算进行了验证。

**【关键词】** 陀螺经纬仪；随机模型；马尔柯夫过程

## 引 言

新一代高精度陀螺经纬仪（如联邦德国的 Gyromat 型陀螺经纬仪）的出现，为陀螺仪在大地测量和工程测量中的广泛应用开辟了新的前景。因此，对陀螺经纬仪观测数据的处理方法也就相应提出了更高的要求。只有对观测数据进行更为详细的数值分析，才能使建立的平差模型更好地符合实际观测误差的作用规律，从而得到更为准确可靠的平差结果。

国内外一些学者都曾对如何合理地确定陀螺经纬仪观测数据的平差随机模型问题作过一些论述<sup>[1]</sup>,<sup>[2]</sup>。本文是在归纳了前人研究成果的基础上，进一步地分析了陀螺仪观测误差的作用规律，具体地应用 Markov 随机过程概念建立了陀螺仪观测误差的随机模型，并编制了相应的 FORTRAN 计算程序，对实测数据进行了试算。结果表明，由 Markov 过程建立的陀螺仪观测误差随机模型，无论在平差结果的精度方面，还是在实用可行性及计算效率等方面都具有良好的性质。

## 1 陀螺经緯仪逆轉点法觀測中的主要誤差影响

陀螺经纬仪逆转点法观测中受到多种误差因素的影响。为了使所建立的误差模型更好地符合实际误差影响的作用规律，需对主要误差影响进行讨论。通过对陀螺转子轴摆动的分析可知，观测数据中主要误差来源有：1) 读取逆转点时的读数误差；2) 跟踪逆转点过程中，摆动的不规则性影响；3) 陀螺仪悬带不稳定以及陀螺转子轴的转动频率不稳定影响；

本文1987年9月1日收到。

\*本文是硕士论文的部分，指导教师为陶本藻教授、杨仁副教授。

4) 观测过程中温度变化对观测精度的影响; 5) 陀螺仪转子轴在摆动过程中出现不规则性衰减对观测精度的影响等。下面逐一进行分析。

### 1.1 读数的误差影响

一般认为读数误差是陀螺经纬仪观测过程中的一项主要误差来源, 该影响具有偶然误差的性质, 在各次读数过程中产生的读数误差一般被认为是独立的。这里的误差独立是指读取读数本身而并非指获取逆转点的过程。可将读数过程分成两部分, 即判断逆转点和读取逆转点读数, 而前者误差之影响是主要的。

### 1.2 跟踪摆动的不规则性影响

这一误差影响具有偶然误差的性质。在观测过程中通常要求在两次读数之间连续均匀地跟踪陀螺仪转子轴的摆动, 否则将对读取逆转点读数产生影响。由于整个观测过程是一个重复往返的连续摆动过程, 所以在  $t_i$  时刻发生的该误差影响在一个摆动周期内会对  $t_{i+1}$  时刻和  $t_{i+2}$  时刻产生不同程度的影响。由于摆动过程的连续性, 使得这一误差影响具有一定相关性。

### 1.3 陀螺仪悬挂带不稳定和转子轴转动频率不稳定的影响

这是一种不确定型的误差影响, 具有随机性。由于该误差影响的干扰可能导致陀螺轴运动轨迹产生畸变。故该误差影响直接对确定陀螺轴摆动过程中的动平衡位置产生影响, 这是陀螺仪本身存在的干扰影响。例如, 电压的变化, 轴系间的摩擦等因素的影响所致。

### 1.4 温度变化的影响

在观测过程中温度变化的影响能使陀螺转子轴的重心产生漂移, 而这种漂移又不同于正常的摆动衰减, 有时它能叠加到摆动过程上, 直接对逆转点读数产生影响。由于温度上升, 影响悬挂带伸长, 使重心下移而影响摆动周期。观测过程处于相对稳定的阶段时, 陀螺仪马达的温升按线性规律变化, 则该误差影响亦呈有规律的变化。

### 1.5 不规则衰减的影响

陀螺仪转子轴在摆动过程中除了按照一定规律衰减进行减幅摆动之外, 由于受到仪器本身可能存在的各种随机信号的干扰, 使陀螺转子轴还可能产生不规则的阻尼衰减运动, 这类误差影响对于确定摆幅  $\alpha_0$  和衰减系数  $K$  带来干扰。这也是一种具有随机性质的误差影响。

综上所述, 可以将以上几类主要误差来源归纳为两部分误差影响。一部分误差是受观测者人为因素影响的, 在跟踪读数过程中产生的偶然误差, 即由读数误差影响和跟踪逆转点的不规则性影响所产生的一类误差。由前面的讨论可知, 跟踪读数是按照连续摆动周期重复进行的, 从而使得这一部分误差具有相关性影响。另一部分误差是由于仪器本身存在着干扰引起的, 这一部分误差包括悬带和转子频率的不稳定影响, 温度变化和不规则衰减等因素的影响。根据前述分析可知, 陀螺仪的摆动过程是一个呈周期性变化的连续过程, 因此, 前述各种具有随机性干扰影响的误差因素在整个连续摆动中构成了一个随机过程, 并且由于摆动的周期性, 这一随机过程还可以认为是一个平稳随机过程。采用噪声与信号的概念来代替上述两部分误差, 可用符号  $\Delta$  表示第一部分的误差——噪声; 用符号  $X$  表示第二部分的误差——

信号。在观测过程中，噪声 $\Delta$ 只发生在读数点上，由于它的相关性，所以它又是有色噪声；信号 $X$ 在整个连续摆动过程中都存在，且与噪声 $\Delta$ 相独立。

通常情况下，可以采用确定协方差函数的方法，利用协方差函数来描述随机过程的统计性质。但是，协方差函数的严密表达式常常是难以准确求出的。由于协方差函数的介入，从而不可避免地会出现公式推导上的近似表达和计算工作上的繁琐，在很大程度上限制了该法的应用。因此，顾及到陀螺仪观测过程中的周期连续性摆动之特点，不经过确定协方差函数，采用 Markov 过程的概念来建立陀螺仪观测误差的随机模型是有其现实意义的。

## 2 Markov 过程确定的误差模型

据上述讨论可知，随机干扰的误差影响存在于整个连续摆动过程中，它的影响是一个随机过程。该随机过程在 $t_i$ 时刻的统计性质要受到 $t_i$ 时刻前的过去时刻的随机过程状态的影响，其影响程度随着过去时刻 $t_j$  ( $j < i$ ) 距 $t_i$ 时刻的远近而不同。顾及陀螺仪逆转点法观测中特有的周期性连续摆动之特性，可以考虑采用 Markov-1 过程和 Markov-2 过程来确定观测误差之随机模型。

### 2.1 Markov-1 过程确定的误差模型

可以想象，随机过程在整个连续摆动过程中的状态会随着摆动的周期性的连续变化而变化。由于随机过程状态的这种周期性的连续变化，随机过程在 $t_i$ 时刻的状态就可以认为是决定它在 $t_{i+1}$ 时刻统计性质的主要原因，而它在 $t_{i-1}, t_{i-2}, \dots, t_2, t_1$ 等过去时刻的状态对 $t_{i+1}$ 时刻的随机过程统计性质的影响就是非常次要的了。如果忽略这些次要因素的影响，可以认为此时的随机过程具有 Markov 特性。也就是说，随机过程在将来时刻 $t_{i+1}$ 的统计性质仅仅取决于现在时刻 $t_i$ 的状态，而与过去时刻的状态无关。顾及到随机信号干扰误差影响在连续摆动过程中的这种无后效性，可知陀螺仪逆转点法观测中所产生的误差影响（记作 $\epsilon_i$ ）是一个 Markov-1 过程。换言之， $\epsilon_i$  的取数仅仅与获取第 $i-1$ 个逆转点观测值的误差影响 $\epsilon_{i-1}$ 有关。 $\epsilon_i$  可以通过 $\epsilon_{i-1}$ 与以前的误差影响相联系，而 $\epsilon_i$ 本身则不需顾及 $\epsilon_{i-1}$ 以前的误差影响了。

设陀螺仪观测值的观测方程为

$$L = GY + \epsilon, \quad (1)$$

式中  $L$  为观测值向量， $G$  是第一设计矩阵，它确定了衰减模型的形式； $Y$  为待定参数向量； $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)^T$  是误差向量。

对于 Markov-1 过程来说，可以用一阶差分方程的形式来描述 $\epsilon_i$ ：

$$\epsilon_i = \Delta_i + \rho \epsilon_{i-1}, \quad (2)$$

式中， $\Delta_i$  为噪声（读数误差）； $\rho$  是比例因子， $|\rho| < 1$ 。设初始状态为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &= X_0, \\ E(\Delta_i) &= 0, \quad E(X_0) = 0, \\ D(\Delta_i) &= \sigma_A^2 = \sigma_1^2, \quad D(X_0) = \sigma_x^2 = \sigma_2^2, \\ D(\Delta_i, X_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式第1式中的 $\epsilon_0$ 为初始信号。展开(2)式，有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \Delta_1 + \rho X_0, \\ \epsilon_2 &= \Delta_2 + \rho \epsilon_1 = \rho \Delta_1 + \Delta_2 + \rho^2 X_0, \\ \epsilon_3 &= \Delta_3 + \rho \epsilon_2 = \rho^2 \Delta_1 + \rho \Delta_2 + \Delta_3 + \rho^3 X_0, \\ \dots & \end{aligned} \right\}$$

$$\epsilon_n = \Delta_n + \rho \epsilon_{n-1} = \Delta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \rho^j \Delta_{n-j} + \rho^n X_0.$$

4:

用矩阵形式加以概括，得

$$\epsilon = B \underset{n \times 1}{X_0} + C \underset{n \times n}{\Delta}, \quad (4a)$$

式中，

$$B = \begin{pmatrix} \rho^1 \\ \rho^2 \\ \vdots \\ \rho^n \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \rho & 1 & & & \\ \rho^2 & \rho & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

将(4a)代入(1)中，得到

$$L = GY + BX_0 + C\Delta, \quad (1a)$$

进而可得到平差的数学模型为

$$\begin{aligned} E(L) &= GY \\ D(L) &= \sigma_1^2 CC^T + \sigma_2^2 BB^T \\ &= \sigma_1^2 Q_1 + \sigma_2^2 Q_2 = \sum_1^2 \sigma_i^2 Q_i. \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式确定的随机模型体现了用Markov-1过程描述的陀螺仪观测数据的误差影响及作用规律的特点。该随机模型是否能正确地反映出实际观测误差影响，则取决于该随机过程的过去时刻的状态影响因素被忽略得是否基本合理。为此，下面继续讨论由Markov-2过程建立随机模型的问题。

## 2.2 Markov-2过程确定的误差模型

由前述可知，Markov-1过程描述观测误差的影响，顾及了陀螺仪旋转点观测的周期性的连续性特点，对观测过程中误差影响因素进行了一定的假设，忽略了随机过程在过去时刻的状态影响因素。现在考虑随机过程在 $t_{i-1}$ 时刻的某些性质，在经过一个周期后，可能会保留到随机过程在 $t_{i+1}$ 时刻的状态中。也就是对随机过程在将来时刻 $t_{i+1}$ 的统计性质顾及过去时刻 $t_{i-1}$ 的状态影响因素，即采用Markov-2过程来进一步探讨观测数据误差影响 $\epsilon_i$ 的统计性质，显然对陀螺仪观测误差影响的这种描述比Markov-1过程的描述更加符合客观实际。在这里，对于第*i*个误差影响 $\epsilon_i$ 的确定，不仅要考虑第*i-1*个误差影响 $\epsilon_{i-1}$ ，而且还要顾及到第*i-2*个误差影响 $\epsilon_{i-2}$ 。

仿前，写出Markov-2过程对应的二阶差分方程：

$$\epsilon_i = \Delta_i + \rho_1 \epsilon_{i-1} + \rho_2 \epsilon_{i-2}, \quad (6)$$

式中， $\Delta_i$  为噪声（读数误差）， $\rho_1, \rho_2$  为比例因子。设初始状态为：

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_0 = X_1, \quad \varepsilon_{-1} = X_2; \\ E(\Delta_i) = 0, \quad E(X_1) = E(X_2) = 0; \\ D(\Delta_i) = \sigma_\Delta^2 = \sigma_1^2, \quad D(X_1) = D(X_2) = \sigma_x^2 = \sigma_2^2. \end{array} \right\} \quad (7)$$

将 (6) 式展开，有

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \Delta_1 + \rho_1 \varepsilon_0 + \rho_2 \varepsilon_{-1} = \Delta_1 + \rho_1 X_1 + \rho_2 X_2 \\ \varepsilon_2 = \Delta_2 + \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_0 = \Delta_2 + \rho_1 \Delta_1 + (\rho_1^2 + \rho_2) X_1 + \rho_1 \rho_2 X_2 \\ \varepsilon_3 = \Delta_3 + \rho_1 \varepsilon_2 + \rho_2 \varepsilon_1 \\ = \Delta_3 + \rho_1 \Delta_2 + (\rho_1^2 + \rho_2) \Delta_1 + (\rho_1^3 + 2\rho_1 \rho_2) X_1 + (\rho_1^2 \rho_2 + \rho_2^2) X_2 \\ \varepsilon_4 = \Delta_4 + \rho_1 \varepsilon_3 + \rho_2 \varepsilon_2 \\ = \Delta_4 + \rho_1 \Delta_3 + (\rho_1^2 + \rho_2) \Delta_2 + (\rho_1^3 + 2\rho_1 \rho_2) \Delta_1 \\ + (\rho_1^4 + 3\rho_1^2 \rho_2 + \rho_2^2) X_1 + (\rho_1^3 + 2\rho_1 \rho_2) X_2 \\ \dots \end{array} \right\}. \quad (8)$$

归纳为矩阵形式，得

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_i = C_{n \times n} \Delta_i + b_{n \times 1} X_1 + b_{n \times 1} X_2 \\ = C_{n \times n} \Delta_i + B_{n \times 2} X, \end{array} \right\} \quad (9)$$

式中，

$$C = (C_{i,j})_{n \times n}, \quad C_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j; \\ 0 & i>j; \\ \rho_1 & i=2, j=1; \\ \rho_1 C_{i-1,j} + \rho_2 C_{i-2,j} & \text{其它 } (i \geq 3). \end{cases}$$

$$B = (b_1 \quad b_2), \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = (b_{1,1} \quad b_{1,2} \quad \dots \quad b_{1,n})^T,$$

$$b_2 = (b_{2,1} \quad b_{2,2} \quad \dots \quad b_{2,n})^T.$$

$$b_{1,i} = \begin{cases} \rho_1 & i=1; \\ \rho_1^2 + \rho_2 & i=2; \\ \rho_1 b_{1,i-1} + \rho_2 b_{1,i-2} & \text{其它.} \end{cases}$$

$$b_{2,i} = \rho_2 C_i, \quad i=1, \dots, n.$$

上述矩阵表达形式很便于编写计算程序。将 (9) 代入 (1) 中，得

$$L = GY + \varepsilon = GY + BX + C\Delta. \quad (1b)$$

进而得到平差数学模型为

$$\begin{aligned} E(L) &= GY, \\ D(L) &= \sigma_1^2 CC^T + \sigma_2^2 BB^T \\ &= \sigma_1^2 Q_1 + \sigma_2^2 Q_2 = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 Q_i. \end{aligned} \quad (10)$$

这里  $C$  和  $B$  矩阵如 (9) 式所示。至此，我们得到由 Markov-2 过程描述的陀螺仪观测数据误差的随机模型。

为了验证按 (5) 式和 (6) 式所确定的平差模型的实际效力，下面给出实测数据的试算结果。

### 3 主要计算結果及結論

根据前述有关 Markov 过程理论建立陀螺仪观测误差随机模型的方法，笔者利用 GAK-1 型陀螺经纬仪（标称精度  $\pm 20''$ ）的 4 组观测数据和 TK-3 型陀螺经纬仪（标称精度  $\pm 30''$ ）的 1 组观测数据进行了试算。在计算中，对 Markov-1 过程中的  $\rho$  值，按 0.1 为步长，在  $0.1 \sim 0.9$  的范围内计算了不同的  $Q_1$  和  $Q_2$  矩阵；对 Markov-2 过程，使  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的值在  $-0.9 \sim 0.9$  之间，也求出了相应的  $Q_1$  和  $Q_2$  矩阵，对于所计算出的协因数矩阵  $Q_1$  和  $Q_2$ ，经过方差分量估计迭代计算，从而得到验前估计与验后估计一致的方差分量因子  $\hat{\sigma}_1$  和  $\hat{\sigma}_2$ ，它们的初值可以用数值 1 来代入。全部计算工作均按笔者编写的《陀螺经纬仪观测数据平差计算程序》在计算机上完成。按 Markov 过程建立观测值协因数矩阵的计算框图如图 1 所示。为便于比较，本文还采用由不同拟合曲线求出的协方差函数所确定的误差模型方案（即表 1 和表 2）中所列 C 类计算方案进行计算，用来与由 Markov 过程建立的误差模型计算方案进行对比（即表中所列 M 类计算方案，M-1<sub>(1)</sub> 为 Markov-1 过程， $\rho = 0.5$ ；M-2<sub>(1)</sub> 为 Markov-2

过程， $\rho_1 = 0.3$ ， $\rho_2 = -0.6$ ），表 1 和表 2 给出了主要计算结果。表 1 列出了不同组观测数据在各计算方案中平差值的精度。根据 (5) 和 (10)，

可以得到平差值  $\hat{Y} = (G^T D_L^{-1} G)^{-1} G^T D_L^{-1} L$ ，其方差-协方差阵为  $D_{\hat{Y}} = (G^T D_L^{-1} G)^{-1}$ ，取其主对角线元素即为相应未知数的平差值之方差（或中误差）。由表 1 可见，在对各组观测数据的计算中，以 Markov 过程类计算方案所得平差值的精度最高，且 M-2 方案又较 M-1 方案为好。表 2 说明了干扰信号  $X$  在不同计算方案下，对平差结果可能产生不同的影响。而对 C 类计算的平差值的影响比对 M 类方案平差值的影响显著，尤其是当观测值本身受到较大的干扰误差影响时更为明显（如数据 V）。而采用 M-2 计算方案则可以比较好地解

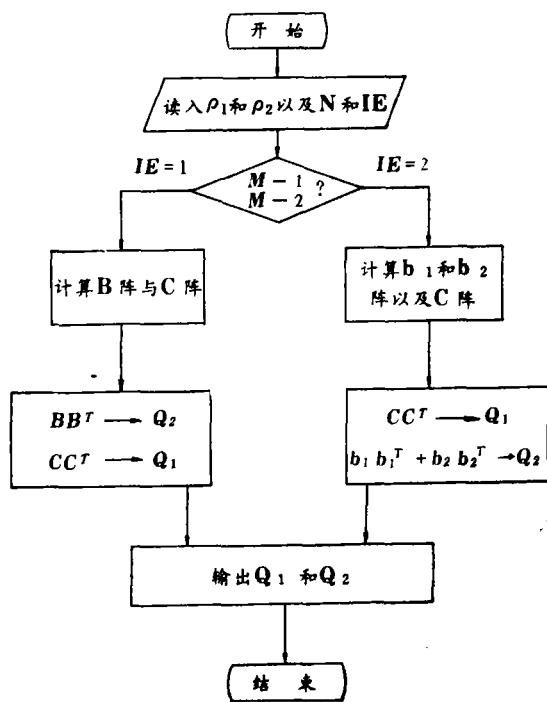


图 1

决抵抗干扰信号X对其平差值的影响问题。

表 1 平差值精度比较

(单位: 秒)

观测数据 方案		数据 I	数据 II	数据 IV	数据 V
计算方案					
C—1	$m_{\alpha_N}$	—	—	2.2	11.9
	$m_{\alpha_0}$	—	—	4.2	19.1
C—2	$m_{\alpha_N}$	—	—	3.5	5.6
	$m_{\alpha_0}$	—	—	5.2	9.3
C—3	$m_{\alpha_N}$	7.0	10.1	3.7	5.2
	$m_{\alpha_0}$	7.0	10.2	5.8	9.0
C—4	$m_{\alpha_N}$	0.7	1.4	1.1	2.5
	$m_{\alpha_0}$	5.5	8.2	6.4	15.7
M—1 (1)	$m_{\alpha_N}$	2.2	4.8	4.7	3.7
	$m_{\alpha_0}$	1.6	3.3	3.5	6.0
M—2 (1)	$m_{\alpha_N}$	1.1	2.3	1.7	4.0
	$m_{\alpha_0}$	1.6	3.4	2.7	5.9

表 2 信号 X 在不同计算方案下对平差结果的影响 (单位: 秒)

观测数据 对平差值的影响		数据 I	数据 II	数据 IV	数据 V
计算方案					
C—1	$\Delta_{\alpha_N}$	—	—	0.0	4.2
	$\Delta_{\alpha_0}$	—	—	0.9	17.9
C—2	$\Delta_{\alpha_N}$	—	—	0.0	5.8
	$\Delta_{\alpha_0}$	—	—	1.3	4.5
C—3	$\Delta_{\alpha_N}$	0.2	3.3	0.0	5.7
	$\Delta_{\alpha_0}$	0.5	4.8	0.2	7.5
C—4	$\Delta_{\alpha_N}$	0.2	0.2	0.1	0.9
	$\Delta_{\alpha_0}$	4.4	32.5	5.3	29.4
M—1 (1)	$\Delta_{\alpha_N}$	0.1	0.7	0.4	1.7
	$\Delta_{\alpha_0}$	0.0	0.4	0.7	0.8
M—2 (1)	$\Delta_{\alpha_N}$	0.0	0.1	0.0	0.3
	$\Delta_{\alpha_0}$	0.1	0.8	0.9	1.9

实际上，一个好的随机模型应在各主要方面都能表现出良好的性质。从表 1 和表 2 可见，按 Markov-2 建立的随机模型的计算方案 ( $M-2_{(1)}$ )，无论在平差结果的精度上，还是在抵制干扰信号  $X$  的能力上都体现出了较好的性质。在计算过程中，该方案还具有计算效率高的特点。这些，都说明了 Markov-2 过程建立的观测误差随机模型基本上反映出了陀螺仪观测误差的统计性质及作用规律，也说明了该法在测量实际生产中应用的现实意义。同时还应指出，合理地确定  $\rho$  值（对 Markov-1 过程）或  $\rho_1, \rho_2$  的值（对 Markov-2 过程），以及方差分量因子  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的值是很重要的。因此，还需要应用方差分量估计理论或其它方法解释和评价，对所建立的随机模型进一步探讨。

### 参 考 文 献

- [1] E.Graffarend and A.Kleusberg, Expectation and Variance Component Estimation of Multivariate Gyro-theodolite Observations I. II. AVN, 1980, 3, 1981, 3.
- [2] 陈永奇，测量工程个别问题，武汉测绘学院出版科，1984。

## Research on the Variance Component Models of Gyrotheodolite Observation Errors

Zhu Guong

### Abstract

In this paper, the main errors of gyrotheodolite observation data are analyzed. The variance component models of gyrotheodolite observation errors are discussed in the light of Markov stochastic process theory. Finally the practical examples are computed.

**[Key words]** gyrotheodolite; variance component model; Markov stochastic process