

自协方差最小二乘噪声估计的改进算法

罗志才^{1,2,3} 林 旭¹ 周波阳¹

(1 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(2 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(3 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘 要:针对现有自协方差最小二乘噪声估计结果非正定的问题,提出了一种能够有效克服数据长度不够以及先验信息不准的改进算法,保证噪声估计结果的正定性,从而提高自协方差最小二乘噪声估计的精度。数值仿真实验验证了该方法的正确性和有效性。
关键词:卡尔曼滤波;噪声估计;自协方差最小二乘法;改进算法
中图法分类号:P207.2; P228.41

Kalman 滤波理论被广泛应用于卫星导航定位、系统控制、信号处理等方面^[1,2]。标准 Kalman 滤波需建立在数学模型确定以及噪声特性已知的基础上,但实际应用中,噪声信息基本都是未知的,使得滤波结果次优,甚至发散。目前,主要有 4 类自适应 Kalman 滤波方法用于噪声协方差估计,包括贝叶斯法、极大似然法、相关法和协方差匹配法^[3-6]。其中贝叶斯法和极大似然法计算效率较低,协方差匹配法得到的结果是有偏的,相关法则被应用得最为广泛,但需要两步计算状态噪声和观测噪声协方差^[7-9]。Odelson 提出了一种自协方差最小二乘 (autocovariance least-squares, ALS) 算法,该方法可同时计算状态噪声和观测噪声协方差,且其计算精度明显优于相关法^[10];相关法和 ALS 算法的主要缺陷在于无法保证计算结果的正定性,Rajamani 在此基础上提出了 ALS-SDP 算法,该方法对最小二乘估计进行半正定约束,无法保证观测噪声协方差矩阵的正定性,亦无法克服数据长度不够、先验噪声协方差矩阵偏差较大或构造的最小二乘估计法方程系数阵病态对估计结果带来的误差影响^[11]。本文提出了一种自协方差最小二乘噪声估计的改进算法 (improved algorithm of autocovariance least-squares, IALS), 用于保证计算结果的正定性,提高噪声估计的精度。

1 自协方差最小二乘噪声估计

根据相关法的基本思想, ALS 算法通过构造基于新息的状态空间模型, 将原本需两步进行的计算整合为一步, 避免了分步计算可能带来的误差, 最后通过最小二乘估计得到最优的结果^[10,11]。

离散线性时不变系统为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{1}$$

式中, $\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q})$, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R})$, \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 不相关。状态噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 及观测协方差矩阵 \mathbf{R} 一般假定为对称正定矩阵。

用 $\mathbf{x}_{k+1|k}$ 表示预测状态向量, \mathbf{L} 表示稳态的卡尔曼滤波增益, $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 表示预测状态向量的误差, 令 $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{L}\mathbf{C})$, $\bar{\mathbf{G}} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{A}\mathbf{L}]$, $\bar{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_k \quad \mathbf{v}_k]^T$, 新息 $\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_{k|k-1}$ 。构造基于新息的状态空间模型为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{Y}_k &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{2}$$

预测状态向量协方差 $\mathbf{P} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^T)$, 稳态滤波时, 其满足 Lyapunov 等式:

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{G}}\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}\bar{\mathbf{G}}^T \tag{3}$$

由式(3)可知, 预测状态向量协方差 \mathbf{P} 与状态噪

声协方差矩阵 \mathbf{Q} 、观测协方差矩阵 \mathbf{R} 相关。同时令 $\mathbf{R}(N)=[E(\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_k^T) \cdots E(\mathbf{Y}_{k+N}\mathbf{Y}_k^T)]^T$, 由此, 新息 $\{\mathbf{Y}_k\}$ 的相关函数 $\mathbf{R}(N)$ 可表示为:

$$\mathbf{R}(N)=\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix}}_o\mathbf{P}\mathbf{C}^T+\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{CAL} \\ \vdots \\ -\mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{AL} \end{bmatrix}}_r\mathbf{R} \quad (4)$$

$\mathbf{R}(N)$ 是关于 \mathbf{P} 和 \mathbf{R} 的函数, 顾及 \mathbf{P} 与 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 相关, 将式(3)代入式(4), 并进行克罗内克积运算, 最后整理为:

$$\mathbf{R}(N)_s=[(\mathbf{C}\otimes\mathbf{O})(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}\otimes\bar{\mathbf{A}})^{-1}](\mathbf{G}\otimes\mathbf{G})\mathbf{Q}_s+[(\mathbf{C}\otimes\mathbf{O})(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}\otimes\bar{\mathbf{A}})^{-1}(\mathbf{AL}\otimes\mathbf{AL})+(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})]\mathbf{R}_s \quad (5)$$

式中,“ \otimes ”表示克罗内克积算子,下标“ s ”表示矩阵按列序排列。通过构造基于新息的状态空间模型,将新息 $\{\mathbf{Y}_k\}$ 的相关函数 $\mathbf{R}(N)$ 表示为状态噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 和观测协方差矩阵 \mathbf{R} 的函数,由此可同时对 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 进行估计。

新息 $\{\mathbf{Y}_k\}$ 的相关函数 $\mathbf{R}(N)$ 中各元素可由下式计算得到:

$$E(\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_{k+j})=\frac{1}{N-j}\sum_{i=1}^{N-j}\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_{i+j},j=0,1,\cdots,N-1 \quad (6)$$

可采用最小二乘估计的方法对状态噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 和观测协方差矩阵 \mathbf{R} 进行估计:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{QR}}=(\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{A}_{\text{LS}})^{-1}\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{R}(N)_s \quad (7)$$

式中, $\mathbf{X}_{\mathbf{QR}}=[\mathbf{Q}_s \quad \mathbf{R}_s]^T$; $\mathbf{A}_{\text{LS}}=[\mathbf{A}_Q \quad \mathbf{A}_R]^T$; $\mathbf{A}_Q=(\mathbf{C}\otimes\mathbf{O})(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}\otimes\bar{\mathbf{A}})^{-1}(\mathbf{G}\otimes\mathbf{G})$; $\mathbf{A}_R=(\mathbf{C}\otimes\mathbf{O})(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}\otimes\bar{\mathbf{A}})^{-1}(\mathbf{AL}\otimes\mathbf{AL})+(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})$ 。

2 改进算法

ALS 估计的噪声协方差是否正定与先验噪声协方差以及最小二乘估计精度有着直接的关系。先验噪声协方差偏差越大,由此计算得到的新息及其相关函数也存在着较大误差,同时易导致最小二乘法方程病态,估计结果不稳定;数据长度不够时,即使法方程良态,若某一未知数的方差较大,估计精度也较低。这两种情况均无法保证 ALS 噪声协方差估计结果的正定性。

ALS 法方程的病态问题一般也是由于先验噪声协方差的误差引起的,迭代计算则是克服先验噪声误差影响的有效方法,但必须满足每次迭代计算结果的正定性。ALS 算法无法保证中间

迭代结果的正定性,无法进行迭代计算;ALS-SDP 算法只能保证结果的半正定性,无法保证观测噪声矩阵的正定性,也无法保证稳态滤波增益有唯一稳定解。本文通过直接对中间迭代结果的对角线元素进行绝对值运算,实现对其正定约束,满足迭代要求;也减小了噪声协方差矩阵中的负对角线元素的真误差,使其更加逼近其真值。

数据长度不足时,由式(6)计算的新息 $\{\mathbf{Y}_k\}$ 的相关函数 $\mathbf{R}(N)$ 将存在较大误差,如果噪声协方差矩阵中某一对角线元素的估计精度较差,受 $\mathbf{R}(N)$ 误差影响明显,此时即使 ALS 法方程良态,也无法保证噪声估计结果的正定性。为了改善这一情况,本文对式(7)附加约束条件:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{X}=0 \quad (8)$$

式中, \mathbf{G} 可通过求解以下线性方程得到:

$$\mathbf{N}_{\text{LS}}\mathbf{G}=\left|\mathbf{N}_{\text{LS}}\right|\mathbf{e} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{N}_{\text{LS}}=\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{A}_{\text{LS}}$, $\mathbf{e}=[1,1,\cdots,1]^T$ 。则附加约束条件的最小二乘函数模型为^[12]:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{A}_{\text{LS}}\mathbf{X}_G+\mathbf{G}\mathbf{K}-\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{R}(N)_s=0 \\ \mathbf{G}^T\mathbf{X}_G=0 \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{K}=(\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_q\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_q\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{R}(N)_s$, $\mathbf{Q}_q=(\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\cdot\mathbf{A}_{\text{LS}}+\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}$ 。此时附加约束条件的最小二乘估计为:

$$\mathbf{X}_G=\mathbf{CQ}_q\mathbf{A}_{\text{LS}}^T\mathbf{R}(N)_s \quad (11)$$

式中, $\mathbf{C}=\mathbf{I}-\mathbf{Q}_q\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_q\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$ 。

附加约束条件的最小二乘估计满足以下性质。

性质 1 附加约束条件的最小二乘估计 \mathbf{X}_G 是 \mathbf{X} 的无偏估计:

$$E(\mathbf{X}_G)=\mathbf{CQ}_q\mathbf{A}_{\text{LS}}^TE[\mathbf{R}(N)_s]=\mathbf{CQ}_q\mathbf{N}_{\text{LS}}\mathbf{X} \quad (12)$$

同时顾及, $\mathbf{C}=\mathbf{I}-\mathbf{Q}_q\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_q\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$, $\mathbf{Q}_q\mathbf{N}_{\text{LS}}=\mathbf{I}-\mathbf{Q}_q\mathbf{G}\mathbf{G}^T$, $\mathbf{G}^T\mathbf{X}=0$, 由此可得:

$$E(\mathbf{X}_G)=\mathbf{X} \quad (13)$$

性质 2 附加约束条件的最小二乘估计 \mathbf{X}_G 的均方根误差小于最小二乘估计 $\mathbf{X}_{\mathbf{QR}}$ 的均方根误差。

\mathbf{X}_G 的均方根误差 $\text{MSE}(\mathbf{X}_G)=\text{tr}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}_G})=\sigma^2\text{tr}(\mathbf{CQ}_q\mathbf{N}_{\text{LS}}\mathbf{Q}_q\mathbf{C}^T)$, $\mathbf{X}_{\mathbf{QR}}$ 的均方根误差 $\text{MSE}(\mathbf{X}_{\text{LS}})=\sigma^2\text{tr}(\mathbf{N}_{\text{LS}}^{-1})$, 可证明 $\text{tr}(\mathbf{CQ}_q\mathbf{N}_{\text{LS}}\mathbf{Q}_q\mathbf{C}^T)<\text{tr}(\mathbf{N}_{\text{LS}}^{-1})$, 具体的推导过程可参考文献[12], 由此可得:

$$\text{MSE}(\mathbf{X}_G)<\text{MSE}(\mathbf{X}_{\mathbf{QR}}) \quad (14)$$

附加约束条件,等效于加入了虚拟观测量,改善了法方程的条件数,可有效克服最小二乘法方程病态所带来的误差影响,提高最小二乘估计中精度较差的未知量的估计精度,使得噪声协方差矩阵的估计精度将得到改善;并采用模型(10)代

替最小二乘估计函数模型,保证估计的无偏性。

由此本文提出一种 IALS 算法,计算流程如图 1 所示,具体的计算步骤如下。

- 1) 给定先验的 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} ;
- 2) 构造 ALS 法方程系数阵,并判读其是否病态,如果法方程良态,则转入步骤 3),否则转入步骤 4);
- 3) 进行最小二乘估计,转入步骤 5);
- 4) 附加约束条件进行最小二乘估计;
- 5) 判断 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是否收敛,如果未收敛,转入步骤 6),否则转入步骤 7);
- 6) \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 的对角线元素直接取其绝对值,即 $\mathbf{Q}_{ii}=|\mathbf{Q}_{ii}|,\mathbf{R}_{ii}=|\mathbf{R}_{ii}|$,并转入步骤 2)。
- 7) 判断 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是否正定,如果 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 非正定,则转入步骤 4),否则输出结果。

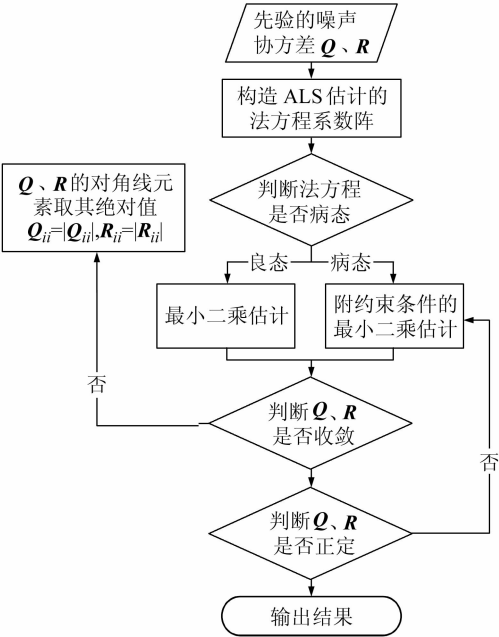


图 1 自协方差最小二乘估计的改进算法流程图
Fig.1 Flow Chart of the Improved Algorithm for Autocovariance Least-squares

通过附加约束条件,使法方程的病态性得到

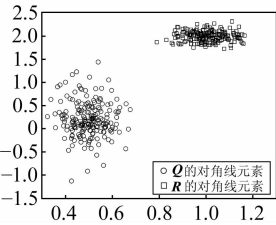


图 2 先验噪声无偏差时 ALS 估计结果
Fig.2 Noise Estimates with Unbiased Prior Noise from ALS

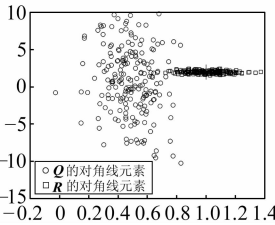


图 3 先验噪声有偏时 ALS 估计结果
Fig.3 Noise Estimates with Biased Prior Noise from ALS

改善,估计结果更加稳定,估计精度也得到提高。通过步骤 2)~步骤 6)的迭代计算能有效克服先验噪声不准以及由此引起的法方程病态所带来的估计误差;迭代收敛且法方程良态、但估计结果非正定,仍然可采用附加约束条件的最小二乘估计来提高估计精度,保证估计结果的正定性。

3 数值仿真实验

采用文献[11]中的算例为例:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.732 & -0.086 \\ 0.172 & 0.990 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{w}_k$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

(15)

式中, $\mathbf{w}_k \sim N(0, \text{diag}[0.5, 0.2])$, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \text{diag}[1, 2])$ 。

为了对本文提出的 IALS 与其他算法进行比较分析,设定数据长度为 1 000,分别按以下 4 个方案各进行 200 次蒙特卡洛仿真。

- 方案 1) 采用 ALS,先验 $\mathbf{Q} = \text{diag}[0.5 \ 0.2], \mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 2]$;
- 方案 2) 采用 ALS,先验 $\mathbf{Q} = \text{diag}[50 \ 20], \mathbf{R} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$;
- 方案 3) 采用 ALS-SDP,先验 $\mathbf{Q} = \text{diag}[50 \ 20], \mathbf{R} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$;
- 方案 4) 采用 IALS,先验 $\mathbf{Q} = \text{diag}[50 \ 20], \mathbf{R} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$ 。

图 2~图 5 给出了各方案的噪声估计结果统计图。从图 2 看出,虽然先验噪声无偏差,且法方程良态,但由于数据长度不足,造成 $\mathbf{Q}(2,2)$ 的估计精度较差,采用 ALS 并不能保证其估计结果的正定性。可以看出,先验噪声偏差较大,使得 ALS 法方程病态,估计结果不稳态,此时,方案 2 的估计精度明显低于方案 1 的估计精度,表明采用 ALS 的估计结果受先验噪声的影响明显。可以看出,采用 ALS-SDP 仅是将原本非正定的估计结果约束到不

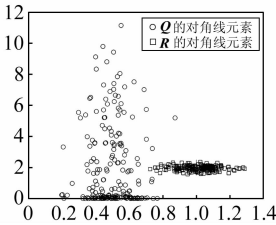


图 4 先验噪声有偏时 ALS-SDP 估计结果
Fig.4 Noise Estimates with Biased Prior Noise from ALS-SDP

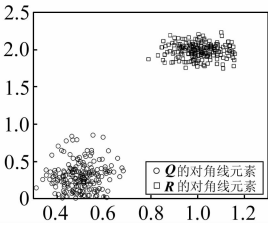


图 5 先验噪声有偏时 IALS 估计结果
Fig.5 Noise Estimates with Biased Prior Noise from IALS

等式约束的边界上,并不能保证估计结果的正定性,也无法克服先验噪声偏差所带来的误差影响。从图 5 中可以看出,采用 IALS 不仅能有效克服先验噪声偏差所带来的误差影响,也能有效保证估计结果的正定性,并且估计结果的精度明显改善。

表 1 给出了各方案的噪声估计的平均值和标准差。方案 1 中 $Q(2,2)$ 分量的估计精度相对较差,无法保证其估计结果的正定性。当先验噪声偏差较大时,导致构造的 ALS 法方程系数阵病态,使得方案 2)和方案 3)的估计结果的精度明显低于方案 1),特别是 $Q(2,2)$ 分量受先验噪声偏差的影响明显,通过半正定约束后,方案 3 的估计精度整体上略优于方案 2);方案 4)中, $Q(1,1)$ 和 $R(1,1)$ 分量的估计精度与先验噪声无偏差时的 ALS 估计精度一致,通过迭代计算和附加约束条件的最小二乘估计,有效提高了 $Q(2,2)$ 和 $R(2,2)$ 分量的估计精度,其估计精度最高。同时可以发现,采用 IALS 算法时, $Q(2,2)$ 的估计结果是有偏的。对迭代收敛但非正定的估计结果再进行附加约束条件的最小二乘估计,通过提高估计精度来保证估计结果的正定性,使得噪声估计的验后误差不再服从高斯正态分布,估计结果必然是有偏的。

表 1 噪声估计平均值和标准差
Tab. 1 Mean and Standard Deviation of Noise Estimation

		$Q(1,1)$	$Q(2,2)$	$R(1,1)$	$R(2,2)$
平均值	方案 1	0.499	0.208	1.007	1.998
	方案 2	0.488	0.721	1.014	1.983
	方案 3	0.497	2.121	1.006	1.964
	方案 4	0.500	0.298	1.001	1.987
标准差	方案 1	0.069	0.374	0.076	0.111
	方案 2	0.144	4.432	0.117	0.179
	方案 3	0.113	2.673	0.106	0.154
	方案 4	0.070	0.188	0.076	0.098

4 结 语

自协方差最小二乘噪声估计结果非正定主要是由于某一对角线元素对应的估计精度较差所引起的,而用于噪声估计的数据长度不够以及先验噪声协方差偏差较大是引起这一问题的主要因素。本文提出的自协方差最小二乘改进算法通过迭代计算克服先验信息的影响,迭代策略简单有效,在迭代过程中,采用附加约束条件的最小二乘估计算法来克服由先验噪声误差引起的法方程病态问题,加快迭代收敛的速度;对迭代收敛且法方程良态、但仍然非正定的估计结果再进行一次附

加约束条件的最小二乘估计,可有效克服数据长度不够所带来的影响,通过牺牲估计结果的无偏性来提高估计精度,从而保证噪声估计结果的正定性。需要说明的是,当噪声矩阵的某一对角线元素数值较小但精度较高时,采用本文算法也无法保证结果的正定性。

参 考 文 献

[1] 陶本藻. 卡尔曼滤波模型误差的识别[J]. 地壳形变与地震, 1999, 19(4): 15-20

[2] 付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010

[3] 徐天河, 杨元喜. 改进的 Sage 自适应滤波方法[J]. 测绘科学, 1997, 14(2): 79-84

[4] 杨元喜. 动态 Kalman 滤波模型误差的影响[J]. 测绘科学, 2006, 31(1): 17-18

[5] 杨元喜, 何海波, 徐天河. 论动态自适应滤波[J]. 测绘学报, 2001, 30(4): 193-298

[6] Mehra R. On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1970, 15(2): 175-184

[7] Mehra R. Approaches to Adaptive Filtering[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17: 693-698

[8] Carrew B, Bellanger P. Identification of Optimum Filter Steady State Gain for System with Unknown Noise Parameters[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1973, 18(60): 582-587

[9] Oussalah M, Schutter J D. Adaptive Kalman Filter for Noise Identification[C]. The 25th International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 2000

[10] Odelson B J. Estimating Disturbance Covariance from Data for Improved Control Performance[D]. Madison: University of Wisconsin-Madison, 2003

[11] Rajamani M R. Data-based Techniques to Improve State Estimation in Model Predictive Control[D]. Madison: University of Wisconsin-Madison, 2007

[12] 王新洲. 在无偏估计类中改进最小二乘估计的方法[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1995, 20(1): 46-50

[13] 宋迎春, 惠沈盈, 刘杰, 等. 基于分枝定界算法的整数最小二乘估计[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36(10): 1 241-1 245

[14] 张正禄, 范国庆, 张松林, 等. 测量的广义可靠性研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(5): 577-581

第一作者简介: 罗志才, 教授, 博士生导师。现主要从事物理大地测量学和卫星重力学研究。
E-mail: zhcluo@sgg. whu. edu. cn