DOI:10.13203/j.whugis1987.01.008

第12卷 第1期 武汉测绘科技大学学报 Vol.12 No.1
1987年 3月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Mar. 1987

罗德里格矩阵
在共线方程严密解法中的应用

张森林

摘 要

在共线方程严密解法中，人们习用的是以方位元素X_S，Y_S，Z_S，φ，ω，κ为未知数的严密公式。本文则以罗德里格旋转矩阵的三个独立元素b，a，c取代角方位元素φ，ω，κ，并推导了相应的误差方程式。理论表明，新方法在组成旋转矩阵和计算误差方程系数中只需作加、减、乘、除等运算而不需解求三角函数，因而节省了计算工作量。

【关键词】 共线方程；误差方程式；旋转矩阵；外方位元素

一、引 言

由共线方程线性化所获取的误差方程在大倾角的情况下，例如在近景摄影测量中，一般要应用严密的公式。长期以来，人们所习用的是以方位元素X_S、Y_S、Z_S、φ、ω、κ为未知数的严密公式[1]（以下简称方位元素法），该公式要求用三角函数组成旋转矩阵和误差方程式的系数。由于三角函数的计算的时间长，因而方位元素法的计算工作量较大。

本文以罗德里格矩阵的独立元素b、a、c取代方位角元素φ、ω、κ作为共线方程中的未知数，并推导了在这种前提下误差方程组成的严密公式（以下简称为独立元素法）。理论統计表明，罗德里格旋转矩阵的组成只需作加、减、乘、除等算术运算，且乘除法总次数仅为22次，因而可节省计算工作量。以下讲述这种推证与实验。为了简化推导过程，共线方程中只取X_S、Y_S、Z_S和罗德里格矩阵独立元素b、a、c等6个未知数。

二、罗德里格矩阵的计算和反对称矩阵的性质

罗德里格矩阵是指由实反对称矩阵S组成的旋转矩阵

本文1986年6月收到.

$$R=(I+S)\ (I-S)^{-1},$$

式中

$$S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -c & -b\\ c & 0 & -a\\ b & a & 0\end{bmatrix},\qquad (1)$$

式中a、b、c为罗德里格矩阵的独立元素。将S代入R并展开得

$$R=\frac{1}{\triangle}\begin{bmatrix}1+\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2) & -c-\frac{1}{2}ab & -b+\frac{1}{2}ac\\ c-\frac{1}{2}ab & 1+\frac{1}{4}(b^2-a^2-c^2) & -a-\frac{1}{2}bc\\ b+\frac{1}{2}ac & a-\frac{1}{2}bc & 1+\frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix},\qquad (2)$$

式中 $\triangle=1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$，$a_i$、$b_i$、$c_i$（$i=1,2,3$）是旋转矩阵R的方向余弦。

1. 罗德里格矩阵的计算

将（2）式中的运算合并化简如下。

设 $AA=a\times a/2$，　$BB=b\times b/2$，　$CC=c\times c/2$，

$AB=a\times b/2$，　$AC=a\times c/2$，　$BC=b\times c/2$，

$K=(AA+BB+CC)/2$，　$W_1=1+K$，　$W_2=1-K$，

则

$$\left.\begin{aligned}&a_1=(W_2+AA)/W_1, && a_2=(-c-AB)/W_1, && a_3=(-b+AC)/W_1\\ &b_1=(c-AB)/W_1, && b_2=(W_2+BB)/W_1, && b_3=(-a-BC)/W_1\\ &c_1=(b+AC)/W_1, && c_2=(a-BC)/W_1, && c_3=(W_2+CC)/W_1\end{aligned}\right\}.\qquad (3)$$

由（3）式可知，组成罗德里格矩阵的9个方向余弦总共只需做22次乘（除）法。

2. 反对称矩阵S和罗德里格矩阵的性质

$$\begin{aligned}&1)\ \ S^T=-S\\ &2)\ \ (I-S)^T=(I+S)\\ &3)\ \ R^T=R^{-1}=(I-S)\ (I+S)^{-1}=(I+S)^{-1}(I-S)\\ &4)\ \ (I+S)^{-1}=\frac{1}{2}(I+R^T)\end{aligned}\qquad (4)$$

性质1、2可直接由定义得出，现将性质3、4证明如下。

由（1）知 $R=(I+S)\ (I-S)^{-1}$，

又R为正交矩阵，故

$$R^{-1}=R^{T},$$

$$R^{-1}=((I+S)\ (I-S)^{-1})^{-1}=(I-S)\ (I+S)^{-1},$$

$$\begin{aligned}R^{T}&=((I+S)\ (I-S)^{-1})^{T}=((I-S)^{-1})^{T}(I+S)^{T}\\&=((I-S)^{T})^{-1}(I-S)=(I+S)^{-1}(I-S),\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad R^{-1}=R^{T}=(I-S)\ (I+S)^{-1}=(I+S)^{-1}(I-S),$$

性质3得证。

$$\text{又}\quad \frac{1}{2}(I+R^{T})=\frac{1}{2}[(I+S)^{-1}(I+S)+(I+S)^{-1}(I-S)]$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}(I+S)^{-1}\ (I+S+I-S)=\frac{1}{2}(I+S)^{-1}\cdot 2I\\&=(I+S)^{-1},\end{aligned}$$

故　性质4得证。

三、独立元素法严密公式推导

已知中心投影的构象方程式

$$\left.\begin{aligned}x&=-f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}\\y&=-f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}\end{aligned}\right\},\qquad(5)$$

式中a_i，b_i，c_i为旋转矩阵R的方向余弦，R取用罗德里格矩阵。

将（5）式线性化，得出误差方程式的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}V_x&=\frac{\partial x}{\partial X_S}dX_S+\frac{\partial x}{\partial Y_S}dY_S+\frac{\partial x}{\partial Z_S}dZ_S+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial a}da-\frac{\partial x}{\partial c}dc-L_x\\V_y&=\frac{\partial y}{\partial X_S}dX_S+\frac{\partial y}{\partial Y_S}dY_S+\frac{\partial y}{\partial Z_S}dZ_S+\frac{\partial y}{\partial b}db+\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial c}dc-L_y\\L_x&=x-(x)=x+f\ \frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}\\L_y&=y-(y)=y+f\ \frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}\end{aligned}\right\},\qquad(6)$$

式中(x)及(y)是用各待定值的近似值代入（5）式所算得的$x_{计}$和$y_{计}$的值，将（6）式用矩阵表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
&V = AX - L,\\
&V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}\\
&L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \end{bmatrix}, \qquad X^T = (dX_S \quad dY_S \quad dZ_S \quad db \quad da \quad dc)
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

在（5）式中引入符号：

$$
\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix}, \tag{8}
$$

于是式（5）可写作：

$$
\left.\begin{aligned}
x &= -f\frac{\overline{X}}{\overline{Z}}\\
y &= -f\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}
\end{aligned}\right\}. \tag{9}
$$

误差方程式中的各系数值为：

$$
a_{11} = \frac{\partial x}{\partial X_S} = -f\frac{-a_1\overline{Z} + a_3\overline{X}}{\overline{Z}^2} = \frac{1}{\overline{Z}}(a_1 f + a_3 x),
$$

根据相仿的步骤得出（将上式也归并在一起）：

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial X_S} = \frac{1}{\overline{Z}}(a_1 f + a_3 x)\\
a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial Y_S} = \frac{1}{\overline{Z}}(b_1 f + b_3 x)\\
a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial Z_S} = \frac{1}{\overline{Z}}(c_1 f + c_3 x)\\
a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial X_S} = \frac{1}{\overline{Z}}(a_2 f + a_3 y)\\
a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial Y_S} = \frac{1}{\overline{Z}}(b_2 f + b_3 y)\\
a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{1}{\overline{Z}}(c_2 f + c_3 y)
\end{aligned}\right\}; \tag{10}
$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{14}&=\frac{\partial x}{\partial b}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{X}}{\partial b}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial b}x\right)\\
a_{15}&=\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{X}}{\partial a}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial a}x\right)\\
a_{16}&=\frac{\partial x}{\partial c}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{X}}{\partial c}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial c}x\right)\\
a_{24}&=\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{Y}}{\partial b}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial b}y\right)\\
a_{25}&=\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{Y}}{\partial a}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial a}y\right)\\
a_{26}&=\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{Y}}{\partial c}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial c}y\right)
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

由（8）式并顾及（4）式之性质 3 可得：

$$\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}=R^{-1}\begin{pmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z-Z_s\end{pmatrix}=(I+S)^{-1}(I-S)\begin{pmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z-Z_s\end{pmatrix},$$

由正定矩阵的逆的微分公式 $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x}=-A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}A^{-1}$ [2] 可得：

$$\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial b}=-(I+S)^{-1}\frac{\partial S}{\partial b}(I+S)^{-1}(I-S)\begin{bmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z\quad Z_s\end{bmatrix}$$

$$+(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial b}\right)\begin{pmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z-Z_s\end{pmatrix}$$

$$=(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial b}\right)R^{-1}\begin{bmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z-Z_s\end{bmatrix}+(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial b}\right)\begin{bmatrix}X-X_s\\ Y-Y_s\\ Z-Z_s\end{bmatrix}$$

$$=(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial b}\right)\begin{pmatrix}X-X_s+\overline{X}\\ Y-Y_s+\overline{Y}\\ Z-Z_s+\overline{Z}\end{pmatrix}.$$

将（4）式之性质4用于上式并顾及到（1）式可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial b}=\frac{1}{4}(I+R^T)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{pmatrix}
=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+a_1)\widetilde{Z}-c_1\widetilde{X}\\ a_2\widetilde{Z}-c_2\widetilde{X}\\ a_3\widetilde{Z}-(1+c_3)\widetilde{X}\end{pmatrix};\\
&\text{同理可得：}\\
&\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial a}=(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial a}\right)\begin{pmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}b_1\widetilde{Z}-c_1\widetilde{Y}\\ (1+b_2)\widetilde{Z}-c_2\widetilde{Y}\\ b_3\widetilde{Z}-(1+c_3)\widetilde{Y}\end{pmatrix},\\
&\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial c}=(I+S)^{-1}\left(-\frac{\partial S}{\partial c}\right)\begin{pmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+a_1)\widetilde{Y}-b_1\widetilde{X}\\ a_2\widetilde{Y}-(1+b_2)\widetilde{X}\\ a_3\widetilde{Y}-b_3\widetilde{X}\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

在（12）式中，

$$\begin{pmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X-X_s+\overline{X}\\ Y-Y_s+\overline{Y}\\ Z-Z_s+\overline{Z}\end{pmatrix}.$$

将公式（8）代入（12）式并化简得：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial b} &= \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\overline{Y}+\overline{Z}\\ -\frac{a}{2}\overline{X}-\frac{c}{2}\overline{Z}\\ -\overline{X}+\frac{c}{2}\overline{Y}\end{pmatrix}\\
\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial a} &= \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2}\overline{Y}+\frac{c}{2}\overline{Z}\\ \frac{b}{2}\overline{X}+\overline{Z}\\ -\frac{c}{2}\overline{X}-\overline{Y}\end{pmatrix}\\
\frac{\partial\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}}{\partial c} &= \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}\overline{Y}-\frac{a}{2}\overline{Z}\\ -\overline{X}+\frac{b}{2}\overline{Z}\\ \frac{a}{2}\overline{X}-\frac{b}{2}\overline{Y}\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

式中，$\triangle = 1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$ 。

将（13）式代入（11）式并顾及（9）式可得：

$$\left.\begin{aligned}
a_{14} &= \frac{1}{\triangle}\left(\frac{a}{2}y+\frac{c}{2}\frac{xy}{f}-f-\frac{x^2}{f}\right)\\
a_{15} &= \frac{1}{\triangle}\left(-\frac{b}{2}y-\frac{c}{2}f-\frac{c}{2}\frac{x^2}{f}-\frac{xy}{f}\right)\\
a_{16} &= \frac{1}{\triangle}\left(\frac{a}{2}f+\frac{a}{2}\frac{x^2}{f}-\frac{b}{2}\frac{xy}{f}+y\right)\\
a_{24} &= \frac{1}{\triangle}\left(-\frac{a}{2}x+\frac{c}{2}f+\frac{c}{2}\frac{y^2}{f}-\frac{xy}{f}\right)\\
a_{25} &= \frac{1}{\triangle}\left(\frac{b}{2}x-\frac{c}{2}\frac{xy}{f}-f-\frac{y^2}{f}\right)\\
a_{26} &= \frac{1}{\triangle}\left(\frac{a}{2}\frac{xy}{f}-\frac{b}{2}f-\frac{b}{2}\frac{y^2}{f}-x\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

现对（13）式中各偏导数的值推导如下：

$$\frac{\partial\overline{X}}{\partial b}=\frac{1}{4}[(1+a_1)\widetilde{Z}-c_1\widetilde{X}]$$

$$=\frac{1}{4}[(1+a_1)(c_1\overline{X}+c_2\overline{Y}+c_3\overline{Z}+\overline{Z})-c_1(a_1\overline{X}+a_2\overline{Y}+a_3\overline{Z}+\overline{X})]$$

$$=\frac{1}{4}[(c_2+a_1c_2-c_1a_2)\overline{Y}+(1+c_3+a_1+a_1c_3-c_1a_3)\overline{Z}]$$

$$=\frac{1}{4}(k_1\overline{Y}+k_2\overline{Z}) \quad . \tag{15}$$

由（2）式可得：

$$k_1=(c_2+a_1c_2-c_1a_2)=(c_2(1+a_1)-c_1a_2)$$

$$=\frac{(a-\frac{1}{2}bc)[1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)+1+\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)]-(b+\frac{1}{2}ac)(-c-\frac{1}{2}ab)}{\triangle^2}$$

$$=\frac{(a-\frac{1}{2}bc)(2+\frac{1}{2}a^2)+(b+\frac{1}{2}ac)(c+\frac{1}{2}ab)}{\triangle^2}$$

$$=2a[1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)]/\triangle^2=\frac{2a}{\triangle} \quad ; \tag{16}$$

$$k_2=(1+c_3+a_1+a_1c_3-c_1a_3)=(1+c_3)(1+a_1)-c_1a_3$$

$$=\frac{(2+\frac{1}{2}c^2)(2+\frac{1}{2}a^2)-(b+\frac{1}{2}ac)(-b+\frac{1}{2}ac)}{\triangle^2}$$

$$=4[1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)]/\triangle^2=\frac{4}{\triangle} \quad . \tag{17}$$

将（16）、（17）式代入（15）式即得

$$\frac{\partial\overline{X}}{\partial b}=\frac{1}{\triangle}\left(\frac{a}{2}\overline{Y}+\overline{Z}\right) .$$

同理可得（13）式中其余各偏导数的值。

关于（14）式中各系数值，由（11）式知：

$$a_{14}=\frac{\partial X}{\partial b}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial\overline{X}}{\partial b}f-\frac{\partial\overline{Z}}{\partial b}X\right)$$

$$=\frac{1}{\overline{Z}\cdot\triangle}\left\{-\left(\frac{a}{2}\overline{Y}+\overline{Z}\right)f-\left(-\overline{X}+\frac{c}{2}\overline{Y}\right)x\right.$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[\left(-\frac{a}{2}\frac{\overline{Y}}{z}-1\right)f+\left(\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}-\frac{c}{2}\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)x\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{a}{2}y+\frac{c}{2}\frac{xy}{f}-f-\frac{x^2}{f}\right)\ .$$

同理可得（14）式中的各系数值。

（10）、（14）两式构成了（3）式中误差方程的全部系数。由（2）、（10）、（14）式可知，独立元素法旋转矩阵的组成和误差方程系数的计算只包含简单的加、减、乘、除运算而不出现三角函数，且形式也较简洁。

在竖直摄影的情况下，由于各角方位元素都是小角，而独立元素 b、a 、c 在一次项精度内又分别等于角方位元素 ω、φ、κ，因此在一次项精度内，可以近似地在各系数中引用a≈b≈c≈ 0 。这时（7）式中的各系数值为：

$$\left.\begin{array}{lll}
a_{11}=-\dfrac{f}{H} & a_{12}=0 & a_{13}=-\dfrac{x}{H} \\
a_{14}=-f\left(1+\dfrac{x^2}{f^2}\right) & a_{15}=-\dfrac{xy}{f} & a_{16}=y \\
a_{21}=0 & a_{22}=-\dfrac{f}{H} & a_{23}=-\dfrac{y}{H} \\
a_{24}=-\dfrac{xy}{f} & a_{25}=-f\left(1+\dfrac{y^2}{f^2}\right) & a_{26}=-x
\end{array}\right\} . \qquad (18)$$

（18）式与方位元素法的近似式完全相同，它反应了两种方法之间内在的密切关系。

四、实　验

实验采用了一组 6 个点的模拟数据，不含粗差，用两种方案进行了空间后方交会的对照运算。

方案 1：文献〔1〕中的严密方位元素法；

方案 2：按本文推导的严密独立元素法。

实验使用PC-1500计算机。模拟数据为：f = 150mm，象点的大地坐标见表 1 ，点位分布见图 1 。未知数的初始值：分别取方位元素 φ、ω、κ 和独立元素 b、a、c 为 0 ；X_S，Y_S，Z_S 的初始值为$X_S=X_{t1}$，$Y_S=Y_{t1}$，$Z_S=Mf$；M = 12000 为摄影比例尺分母。计算结果列于表 2 。

另外，用两种方法组成旋转矩阵的计算（组成100次），结果如下：

由罗德里格矩阵组成：78秒；

由三角函数组成：154秒。

表 1

点　号	X_s(m)	Y_t(m)	Z_t(m)
1	100	1300	180
2	1350	1250	200
3	50	1750	195
4	1250	1800	240
5	150	650	160
6	1300	600	170

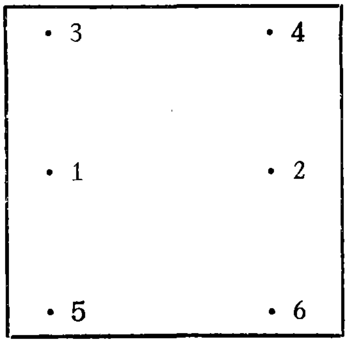

图 1

表2　　空间后方交会两种方法的对照运算

	X_t(m)	Y_s(m)	Z_s(m)	φ	ω	κ	时间(分)
理论值	1280	1200	1950	-5°	5°	-5°	
方案一	1280	1200	1950	-5°	5°	-5°	7
方案二	1280	1200	1950	-5°	5°	-5°	5.5
理论值	1300	1250	2100	-20°	20°	20°	
方案一	1300	1250	2100	-20°	20°	20°	10
方案二	1300	1250	2100	-20°	20°	20°	6.9

结论：计算空间后方交会时由计算旋转矩阵，误差方程、法方程、解方程和打印成果等步骤组成，只是由于利用本文的公式在组成旋转矩阵上提高了计算速度，而其它各步与方位元素法相似。计算程序是由BASIC语言写成的，程序解释所用的机时对二种方法是一样的，计算中迭代限差取 $d\varphi$、$d\omega$、$d\kappa<0.5E-5$（方案 1）或 db、da、$dc<0.5E-5$（方案 2），取未知数增量的绝对值进行判断。表 2 结果一方面证明独立元素严密公式的正确性，另一方面证明在计算速度上方案 2 优于方案 1，因此生产中采用本文推导的独立元素严密公式为宜。

参 考 文 献

〔1〕 王之卓，摄影测量原理，测绘出版社，1979 .

〔2〕 李德仁，摄影测量平差系统的误差处理和可靠性理论，武汉测绘学院，1985 .

Die Anwendung der Rodrigues-Matrix in der strengen Lösung von Kollinearitäts-gleichung

Zhang Senlin

Zusammenfassung

Bei der strengen Lösung der perspektiven Abbildungsgleichungen benutzt man in der Regel die Formel, in der die Außerorientierungselemente X_S, Y_S, Z_S, φ, ω, κ als Unbekaunte verwendet werden. In diesem Aufsatz werden anstatt der Elementen φ, ω, κ die drei unabhängigen Elemente b, a, c der Rodrigues-Matrix eingeführt und die Verbesserungsgleichungen streng abgeleitet. Mit dieser neuen Formel kann man bei der Berechnung der Drehmatrix und der Koeffizienten der Verbesserungsgleichung den Aufwand sparen, weil die Rechnungen nur vier Grundrechenarten sind.

[Key words] collinearity eguation; error equation; rotation matrix; external orientation