DOI:10.13203/j.whugis1986.04.008

总26期 第4期 武汉测绘科技大学学报 Sum26 No. 4
1986年12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1986

按克林索求和计算大地水准面差距垂线偏差及重力异常

管泽霖 鄂栋臣

摘 要

本文采用克林索求和的方法，应用三个重力模型计算了东经80°～120°和北纬20°～40°之间的大地水准面差距、垂线偏差和重力异常。各模型截取到22阶次为止，并且将各模型计算的5°×5°大地水准面差距和垂线偏差平均值进行了比较。另外还对模型计算的平均重力异常与实测的平均重力异常进行了比较。

【关键词】 克林索求和；重力模型；大地水准面差距；垂线偏差；重力异常。

一、

引力位V完全规格化球函数展开式的形式为：

$$V_{(\varphi\lambda)}=\frac{GM}{a}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left[\bar{C}_n^m\cos m\lambda+\bar{S}_n^m\sin m\lambda\right]\bar{P}_n^m \tag{1}$$

式中完全规格化的勒让德缔合函数$\bar{P}_n^m$可按下列两个递推公式计算：

$$\bar{P}_n^m-\left[\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n-m)(n+m)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\bar{P}_{n-1}^m+\left[\frac{(2n+1)(n-m-1)(n+m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}}\bar{P}_{n-2}^m=0 \tag{2}$$

$$\bar{P}_{m-1}^m=0$$

本文1984年4月收到.

$$\overline{P}_m^m - \left[\frac{\delta(2m+1)}{2m}\right]^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \overline{P}_{m-1}^{m-1} = 0 \qquad \left\{\begin{array}{ll} 当\ n=0 & \delta=2 \\ 当\ n\neq 0 & \delta=1 \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\overline{P}_0^0 = 1$$

如果已知引力常数与地球质量的乘积 GM 、地球长半径 a 、完全规格化的球函数 $\overline{C}_n^m$ 和 $\overline{S}_n^m$ 以及计算点的经纬度 λ 和 φ，则可按上列公式计算该点的引力位。式中 n 为球函数的阶，m 为球函数的次，N 为最高阶。

如果在球函数系数中减去相应的正常位球函数系数，则可按上式计算扰动位 T，由于两者计算方法一样，为了叙述方便起见，以后不再区分 T 与 V，一律用 V 来表示。

目前各种新的测量手段相继出现，测量精度日益提高，所获与地球重力场有关的数据愈来愈丰富，因此引力位的球函数展式所展开的阶次也愈来愈高，例为 GEM—10c 模型已展开到完整的180×180阶次，与其相应的球函数系数有三万多个。如果要求每隔1°经纬度间距，计算一个引力位的数值，全球就有六万多个值，这一计算工作是相当大的。即使用计算机计算，所用的计算时间也不会少。

计算中主要的工作是递推 $\overline{P}_n^m$，由（2）式可以看出，递推公式中包含 $\overline{P}_n^m$、$\overline{P}_{n-1}^m$ 及 $\overline{P}_{n-2}^m$，该式是在 m 相同的情况下由两个较低阶（n－1）和（n－2）的 $\overline{P}_{n-1}^m$ 和 $\overline{P}_{n-2}^m$ 递推 n 阶的 $\overline{P}_n^m$。对于此项计算，如果我们将公式（1）改变一下，将第一次求和（即第二个求和符号 $\sum\limits_{m=0}^{n}$）不按 n 阶固定对 m 次求和，而是改写成 m 次固定对 n 阶求和（即求和符号 $\sum\limits_{n=m}^{N}$），就有相应的递推公式。如按该递推公式递推就显得方便多了。并且可以连续地进行递推，最后将所有的 $\overline{P}_n^m$ 用 $\overline{P}_m^m$ 来表示，这是克林索求和的第一个特点。

克林索求和方法的第二个特点是在递推时不仅单纯地递推 $\overline{P}_n^m$，而且是直接递推球函数系数与 $\overline{P}_n^m$ 的乘积（即 $\overline{C}_n^m\,\overline{P}_n^m$ 和 $\overline{S}_n^m\,\overline{P}_n^m$）。

克林索求和方法的第三个特点是在递推球函数系数与 $\overline{P}_n^m$ 的乘积时，由最高阶 n＝N开始递推到最低阶（n＝m）。

本文用克林索求和方法在 TQ—16 机上对大地水准面差距、垂线偏差以及重力异常（点值及乘展平因子的平均值）进行了计算，并与常用计算公式（（1）式）的计算结果进行了比较，结论是在相同的条件下，用克林索求和计算的时间要比通常的计算方法少一半，而且克林索求和所占的计算机的内存单元少，因此可使一次计算的点数增多，进而又缩短了计算的时间。

克林索求和的基本原理如下，假设将 S 展开成从 n＝m 到 n＝N 的 n 阶勒让德多项式，则可写成：

$$S = S_m^N = \sum_{n=m}^{N} y_n p_n(x)$$

式中 y_n 为 n 阶多项式的系数，$p_n(x)$ 为 n 阶勒让德多项式，如果写成矩阵形式即为：

$$S = Y^T\ P(x)$$

式中 $\qquad Y^T = (y_m,\ y_{m+1},\ \cdots,\ y_N)^T$

$$P(x)=(p_m(x),\ p_{m+1}(x),\ \cdots,\ p_N(x))^T$$

同时由于勒让德多项式中相邻的三项可以递推公式来表示即：

$$p_n(x)+a_n(x)p_{n-1}(x)+b_np_{n-2}(x)=0$$

如果也写成矩阵形式，则：

$$AP(x)=P_0(x)$$

式中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{m+1} & 1 & 0 & \cdot & & 0 \\ b_{m+2} & a_{m+2} & 1 & & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_Na_N & 1 \end{pmatrix} \qquad P_0(x)=\begin{pmatrix} p_m(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此多项式S即为

$$S=Y^TA^{-1}P_0=P_0(A^T)^{-1}Y$$

A^T 是一个上三角矩阵，则解向量 $(A^T)^{-1}Y$ 就很容易地被求得。如果我们假设 $s^T=(s_m,\ s_{m+1},\ \cdots,\ s_N)$ 以及 $s=(A^T)^{-1}Y$，并且由于 $s_{N+1}=s_{N+2}=0$，则

$$s_n=-a_{n+1}s_{n+1}-b_{n+2}s_{n+2}+y_n$$

一直求到求和的上限 s_m，则多项式S即可写成：

$$S=s_mp_m(x)$$

对于S的一阶导数 D_iS 展开式，也可以用克林索求和的方法，设：

$$D_iS=\sum_{n=m}^{N}Y_nD_ip_n(x)$$

式中 $D_ip_n(x)$ 是n项勒让德多项式的一阶导数，它可以对矩阵 $S=Y^TA^{-1}P_0(x)$ 求导得出：

$$\begin{aligned} D_iS&=Y^T(D_i(A^{-1})P_0(x)+A^{-1}D_i(P_0(x)) \\ &=Y^TA^{-1}(-D_i(A)A^{-1}P_0(x)+D_i(P_0(x))) \\ &=s^T(-D_i(A)A^{-1}P_0(x)+D_i(P_0(x))) \end{aligned}$$

式中

$$D_i(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a'_{m+1} & 0 & 0 & \cdot & & 0 \\ 0 & a'_{m+1} & 0 & & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_N & 0 \end{pmatrix}$$

假设

$$s'=-(s^TD_i(A)A^{-1})^T$$

以及

$$s'_{N+1}=s'_{N+2}=0$$

则

$$s'_n=-a_{n+1}s'_{n+1}-b_{n+2}s'_{n+2}-a'_{n+1}s_{n+1}$$

同样，一直求到求和的上限 m，则得：

$$D_iS=s'_mP_m(x)+s_mD_iP_m(x)$$

顺便提一下，克林索求和不仅用于物理大地测量中，对于几何大地测量以及地图投影中的有关问题也可采用。

有关具体计算公式的推导从略，只在下节中给出最后的计算公式。

二、

用克林索求和计算公式如下：

1、大地水准面差距

$$\begin{aligned} N &= \frac{GM}{a\gamma}\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left[\overline{C_n^m}\cos m\lambda+\overline{S_n^m}\sin m\lambda\right]\overline{P_n^m} \\ &= \frac{GM}{a\gamma}\sum_{m=0}^{N}\left[l_n^{\mathrm{I}}\cos m\lambda+l_n^{\mathrm{II}}\sin m\lambda\right]\overline{P_n^m} \\ &= \frac{GM}{a\gamma}\sum_{m=0}^{N}\left[S_n^{\mathrm{I}}\cos m\lambda+S_n^{\mathrm{II}}\sin m\lambda\right] \end{aligned} \tag{4}$$

式中

$S_n^i=l_n^i\overline{P_m^m}$，$\gamma$ 为正常重力。

l_n^i 的递推公式为：

$$\left.\begin{aligned} & l_n^i=-a_{n+1}l_{n+1}^i-b_{n+1}l_{n+2}^i+w_n^i \quad \begin{cases}\text{当 } i=\mathrm{I} \text{ 则 } W_n^i=\overline{C_n^m} \\ \text{当 } i=\mathrm{II} \text{ 则 } W_n^i=\overline{S_n^m}\end{cases} \\ & a_{n+1}=-\left[\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n-m+1)(n+m+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi \\ & b_{n+2}=\left[\frac{(2n+5)(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(n+m+2)(n-m+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ & l_{N+1}^i=l_{N+2}^i=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

递推时由 $n=N$ 推到 $n=m$。

它的另一递推公式同（3）式。

以后用右上角指标表示与 $\overline{C_n^m}$（$i=\mathrm{I}$）及 $\overline{S_n^m}$（$i=\mathrm{II}$）有关的量，并不再加以说明。

2、垂线偏差

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{GM}{a\gamma}\frac{\rho''}{R}\sum_{m=0}^{N}\left[h_n^{\mathrm{I}}\cos m\lambda + h_n^{\mathrm{II}}\sin m\lambda\right] \\ \eta &= -\frac{GM}{a\gamma}\frac{\rho''}{R\cos\varphi}\sum_{m=0}^{N}\left(k_n^{\mathrm{I}}\sin m\lambda - k_n^{\mathrm{II}}\cos m\lambda\right)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中

$$h_n^i = \left[\frac{1}{\cos\varphi}\overline{l_n^i} + \operatorname{tg}\varphi\,\overline{\overline{l_n^i}}\right]\overline{P_m^m}$$

$$k_n^i = \overline{\overline{l_n^i}}\,\overline{P_m^m}$$

R 为平均地球半径

$\overline{l_n^i}$ 及 $\overline{\overline{l_n^i}}$ 的递推公式为

$$\left.\begin{aligned}\overline{l_i^i} &= -\overline{a}_{n+1}\overline{l_{n+1}^i} - \overline{b}_{n+2}\overline{l_{n+2}^i} + \overline{w_n^i} \\ \overline{a}_{n+1} &= -\left[\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi \\ \overline{b}_{n+2} &= \left[\frac{(2n+3)(n-m)(n+m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \overline{w_n^i} &= (n+m)w_n^i\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{l_n^i}} &= -a_{n+1}\overline{\overline{l_{n+1}^i}} - b_{n+2}\overline{\overline{l_{n+2}^i}} + \overline{\overline{w_n^i}} \\ \overline{\overline{w_n^i}} &= n\overline{w_n^i} \\ \overline{\overline{l_{N+2}^i}} &= \overline{\overline{l_{N+1}^i}} = 0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$\overline{\overline{l_n^i}}$ 的递推公式与（5）式相似，仅需用 mw_n^i 代替 w_n^i 即可。递推时由 $n=N$ 递推到 $n=m$。

另一个递推公式同（3）式。

h_n^i 也可用下式来计算：

$h_n^i = l_n'^i\,\overline{P_m^m} - l_n^i\,\overline{DP}_m^m$

$l_n'^i$ 的递推公式为

$$\left.\begin{aligned}l_n'^i &= -a_{n+1}l_{n+1}'^i - b_{n+1}l_{n+2}'^i - a_{n+1}'l_{n+1}^i \\ a_{n+1}' &= -a_{n+1}\operatorname{ctg}\varphi \\ \overline{DP}_m^m &= -m\operatorname{tg}\varphi\,\overline{P_m^m} \\ l_{N+1}'^i &= l_{N+2}'^i = 0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

递推时由 $n=N$ 递推到 $n=m$。

3、重力异常

（1）点重力异常

$$\Delta g = \frac{GM}{aR}\sum_{m=0}^{N}\left\{ r_n^I \cos m\lambda + r_n^{II}\sin m\lambda \right\} \tag{10}$$

（2）乘平展因子的平均重力异常

$$\Delta g_M = \frac{GM}{aR}\sum_{m=0}^{N}\left\{ u_n^I \cos m\lambda + u_n^{II}\sin m\lambda \right\} \tag{11}$$

式中

$$r_n^i = L_n^i \overline{P_m^m}$$

$$u_n^i = \overline{L_n^i} \overline{P_m^m}$$

L_n^i 及 L_n^i 的递推公式与（5）式相似，前者需用 $(n-1)w_n^i$ 代替 w_n^i，后者用 $(n-1)qw_n^i$ 代替 w_n^i，q 为展平因子，本文采用别列年的展平因子：

$$q = \frac{1}{n(n+1)}\ \mathrm{ctg}\frac{\psi}{2} P_n^1(\cos\psi)$$

$$\Psi = \left[\frac{\theta\ \sin\ \theta}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

为计算平均重力异常方块的边，例如计算5°×5°方块的平均重力异常，则θ=5°，ψ θ=2.°82 。

三、

本文计算时采用了三组地球模型：我国初期计算的两个模型（用 A 和 B 表示）及拉普模型（180×180阶次），由于拉普高阶系数对表达我国局部重力场的作用不明显，以及为了与A、B 模型相应，后者也只截取到前22阶次。

大地水准面差距及垂线偏差计算是在东经 80°—120°，北纬20°—40° 范围内进行的，每隔5°经纬度间距计算一点，共45点。重力异常是在东经75°—120°，北纬20°—45°范围内进行计算的，每5°×5°方块计算一个平均重力异常值，共45个平均值，点重力异常在相应的5°×5°中心点上进行计算，共45个点值。

全部计算采用“GRS 1980”大地测量基本参数。

从计算结果中可以看出：

（1）将 A、B 模型与拉普模型计算的我国大部分地区大地水准面差距求出差距之差

（用 ΔN_A 及 ΔN_B 来表示），表 1 中分别列出各差值的中误差。

表 1

大地水准面差距之差(m)		垂线偏差之差（″）				平均重力异常之差(mgal)	
		子午分量		卯酉分量			
$M_{\Delta N_A}$	±17.1	$M_{\Delta\xi_A}$	±2.1	$M_{\Delta\eta_A}$	±1.5	$M_{\Delta g_{MA}}$	± 8.4
$M_{\Delta N_B}$	± 5.8	$M_{\Delta\xi_B}$	±3.8	$M_{\Delta\eta_B}$	±1.7	$M_{\Delta g_{MB}}$	±11.2

从所得到的大地水准面差距之差，我们可以看出，东西方向上 ΔN_A 有一系统性的平缓的倾斜，倾斜的幅度为20米—10米。ΔN_B 则无此明显的趋势，但在我国西北部有一较为剧烈的隆起，幅度为15米，而东北部有一凹陷，幅度为－5米。

（2）分别计算了A、B模型与拉普模型的子午垂线偏差分量 ξ 之差（用 $\Delta\xi_A$ 和 $\Delta\xi_B$ 表示）及卯酉垂线偏差分量 η 之差（用 $\Delta\eta_A$ 和 $\Delta\eta_B$ 表示），从表 1 的结果中可以看出，$\Delta\eta_A$和 $\Delta\eta_B$ 的误差大致相同，而 $\Delta\eta_A$ 则带有系统趋势，东西方向也有系统的变化，幅度由 1.″5 到－2″，但对于 $\Delta\xi_B$ 来说，则不及 $\Delta\xi_A$ 误差小（见表 1），这是由于在我国西北部有一个比较剧烈的 ΔN_B 的隆起，促使 $\Delta\xi_B$ 有较大的变化，幅度为－9″，同时在东北部有一幅度为5″的变化。

（3）计算了A、B模型与拉普模型的平均重力异常 Δg_M 之差（用 Δg_{MA} 和 Δg_{MB} 表示）以及在5°×5°交叉点上的点重力异常之差。

点重力异常值与平均重力异常值的差别，只是没有乘 q 。从本文计算的结果来看，同一种模型的5°×5°平均重力异常值与点重力异常值之差最大可达 3 毫伽，因此，即使阶次不很高，计算5°×5°平均重力异常值，还是有必要顾及展平因子 q 。

与大地水准面差距相似，Δg_{MA} 从中部向东西两个方向有系统而平缓的倾斜趋势，而 Δg_{MB} 亦有一个重力异常隆起和凹陷，幅度分别为25毫伽及－10毫伽。从两者的中误差来看，$M_{\Delta g_{MA}}$要小一些。

本文将这三个模型与5°×5°方块实测重力异常的平均值比较，其结果列于表 2 中。

表 2

模型	$M_{\Delta g_M}$ (mgal)
A	± 16.1
B	± 16.3
拉普	± 17.3

从表中的结果来看，三者精度大体相似。

由上列计算结果可以看出，在我国大部分地区内A、B模型并不比拉普模型有明显的优越性。

参 考 文 献

〔1〕 C.C.Tscherning and K. Poder, Some geodetic applications of Clenshaw summation. VIII Symposium on mathematical geodesy Como. Italia, 1981.

〔2〕 M.Garstl, On the recursive computation of the integrals of the associated Legendre bunctions, manuscvita geodaetice, Vol. 5, 1980.

〔3〕 Λ. П. Пеллинен, Методика разложения гравитационного Потенциала Земли по Сферическим функциям, ТР ЦНИИГиК, Вып 171, 1966.

〔4〕 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，1965.

〔5〕 管泽霖、宁津生，地球形状及外部重力场，测绘出版社，1981.

The Computation of Geoidal Undulation Deflection of Vertical and Gravity Anomalies Using Clenshaw Summation

Guan Zelin   E Dongchen

Abstract

In the pysical geodesy, spherical harmonic series are frequently used to compute geoidal undulation, deflection of vertical and gravity anomalies. However if the Clenshaw summation were used, the computation could be made more convenient.

Some comparisons have been made between the initially developed models A and B in our country and Rapp model, by $5°\times5°$ mean geoidal undulation and deflection of vertical, covering an area of 80°—120° east longitude and 20°—40° north latitude. Each model has been truncated up to 22 degree and order. The comparison of mean gravity anomalies has been made between observational and each one of three models.

The results show that: (1) ΔN_A, the difference of geoidal undulations between A model and Rapp model, has a systematic tilt near east-west direction. ΔN_B, the difference between B model and Rapp model, has a strong ascent in North-West China and a descend in North-West China. (2) $\Delta\xi_B$, the difference of components ξ, between B model and Rapp model, has a descend in Central China, and $\Delta\eta_A$, the differnce of components η, between A model and Rapp model, has a systematic tilt. (3) The mean errors of the differences of mean gravity anomalies obtained by obsevations and each one of three models separately are similar.

The conclusion is that A and B models are not more suitable than Rapp model for our country.

[Key words] clenshaw summation; gravity model; geoidal undulation deflection; vertical; gravity anomalies