

文章编号:1671-8860(2012)10-1155-05

文献标志码:A

# 适用于大尺度速度场建模的 MQ-B 新模型

姚宜斌<sup>1</sup> 刘 强<sup>1</sup> 彭文飞<sup>1</sup> 陈 鹏<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路129号,430079)

**摘要:**基于 MQ-B 方法的基本数学原理提出沿大地线度量距离构造核函数,得到一种适于大尺度范围速度场建模的 MQ-B 新模型,该速度场在参考椭球面上建立。将适于标量场的 MQ-B 方法推广到适于矢量场,拓宽了多面函数拟合方法的应用领域。实际算例表明,提出的基于大地线核函数的多面函数拟合模型与传统的通过经纬度坐标差构造核函数的多面函数拟合模型在中国区域内精度相当,但理论上更完善,可用于大尺度速度场建模。

**关键词:**多面函数拟合;大地线核函数;坐标差核函数;大尺度范围;速度场建模

**中图法分类号:**P226

多面函数拟合法由 Hardy 提出,1990 年最终将其定义为多面函数双调和法(multiquadric-biharmonic method, MQ-B)<sup>[1]</sup>。该方法自提出以来,在国际上曾被广泛应用于大地测量、地球物理、摄影测量与遥感、地图学、DEM 模型的建立及海道测量中。国内对此方法也进行了大量的应用研究,特别是基于离散的 GPS 复测观测值,多面函数拟合法被用于进行地壳平面速度场和垂直速度场模型的建立,取得了良好的应用效果<sup>[1-9]</sup>。

考虑构造具有更严密几何意义的核函数,本文提出了基于 MQ-B 方法的原理在参考椭球面建立速度场的思想,并沿大地线度量距离构造“大地线核函数”,得到一种适于大尺度范围代替只适于小尺度范围的平面近似拟合模型,在参考椭球面上描述速度场的多面函数拟合新模型。

## 1 多面函数拟合模型

多面函数拟合模型的基本数学原理是:任何一个圆滑的数学表面总可以用一系列规则的数学表面(特别是二次曲面)的总和以任意精度逼近<sup>[1-9]</sup>。

设有  $m$  个已测点  $S(x, y)$ ,  $S_i$  为在点  $(x_i, y_i)$  上的观测量,可用  $n$  个核函数的总和去逼近函数  $S(x, y)$ ,即

$$S(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \theta(x, y; x_j, y_j) \quad (1)$$

式中,  $n$  为所选取的已知点数, 即结点数,  $n \leq m$ ,  $\alpha$  为待定系数,  $\theta(x, y; x_j, y_j)$  为核函数。

核函数的一般形式为:

$$\theta(x, y; x_j, y_j) = [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + \delta^2]^\beta \quad (2)$$

式中,  $\delta$  为光滑因子。Hardy 在文献[1]中已证明,该因子可以改变拟合曲线或曲面的光滑效果。 $\beta$  的取值决定了核函数的类型,  $\beta = 1/2$  为正双曲面模型,  $\beta = -1/2$  为倒双曲面模型,  $\beta = 3/2$  为三次曲面模型。

对于  $m$  个已知点  $S_i(x_i, y_i)$ , 由式(1)可列  $m$  个方程, 其矩阵形式为:

$$S = \theta \alpha \quad (3)$$

式中,  $S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^T$ ;  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ ;

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta(x_1, y_1, x_{j1}, y_{j1}) & \dots & \theta(x_1, y_1, x_{jn}, y_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \theta(x_m, y_m, x_{j1}, y_{j1}) & \dots & \theta(x_m, y_m, x_{jn}, y_{jn}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $x_{j1}, y_{j1}$  表示所选的第一个结点的坐标,  $x_{jn}, y_{jn}$  表示所选的第  $n$  个结点的坐标。在最小二乘估计准则下, 可求得待定系数  $\alpha$ 。

## 2 基于大地线核函数的 MQ-B 新模型

在利用多面函数拟合法进行大尺度的 GPS 数据处理中,由于 GPS 测量结果在参考椭球面上表示,其坐标为大地坐标  $(B, L)$ ,但在 Hardy 的文献中没有大地坐标系形式下的多面函数拟合模型的构造方法。

多面函数拟合中的核函数是结点和观测点之间距离相关的函数,椭球面上两点间的距离应沿这两点的大地线量度,为此,本文基于 Hardy 原来定义多面函数拟合的数学原理及大地测量学中解算大地线长度的白塞尔方法,提出了基于大地线核函数的多面函数拟合新模型。

式(2)中,Hardy 的多面函数拟合模型的核函数中的  $d^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$  是两点间直线距离  $d$  的平方,当  $\beta = 1/2$ ,  $\theta(x, y; x_j, y_j) = [d^2 + \delta^2]^{1/2}$  通常称为正双曲面模型,适合于小尺度范围多面函数拟合。

在参考椭球面上由于子午线向两极收敛,不同纬度带相同经度差和纬度差所代表的实际距离不同,此时用传统方法所构造的核函数  $\theta(B, L; B_j, L_j) = [(B - B_j)^2 + (L - L_j)^2 + \delta^2]^\beta$  不再表示距离的平方。顾及大地线的定义——椭球面上两点间的最短曲线为大地线<sup>[10]</sup>,在椭球体面上进行测量计算时,距离量度应以两点间的大地线为依据。同时对于大范围的建模而言,地球表面两点之间的大地高高差对两点之间距离计算的影响很小,可以忽略。故本文采用大地线来代替  $(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$  构造多面函数拟合的核函数。基于大地线的多面函数拟合模型的核函数的形式为:

$$\theta(B, L; B_j, L_j) = [L^2(B, L; B_j, L_j) + \delta^2]^\beta \quad (5)$$

式中,  $L(B, L; B_j, L_j)$  为用白塞尔方法反算公式系列计算的大地线距离,详见文献[10];  $\delta$  为光滑因子;  $\beta$  的取值决定了核函数的类型,其意义同式(2)。

## 3 矢量场多面函数拟合模型的拓展

通常多面函数拟合只适合对标量场采样点的拟合。因此,对诸如速度这样的矢量场观测采样数据的拟合,目前的方法是将任意方向的矢量分解为两个给定正交方向的分量,将分量的模作标

量分别用多面函数拟合,最后按矢量加法将两个拟合的标量场合成还原为矢量场,运算过程包括分解-拟合-合成 3 步<sup>[9]</sup>。

以下导出一个矢量场多面函数拟合的统一模型,或称扩展模型。椭球面上任意速度矢量  $\mathbf{V}$  可分解为  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_n \mathbf{i}_n + \mathbf{v}_e \mathbf{i}_e$ , 其中  $\mathbf{i}_n$  和  $\mathbf{i}_e$  分别为子午圈指北和卯酉圈指东单位矢量,  $\mathbf{v}_n$  和  $\mathbf{v}_e$  分别为  $\mathbf{V}$  的北向分量和东向分量,均视为标量。由于  $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_e = 0$ , 则  $\mathbf{v}_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_n = v \cdot \cos A$ ,  $\mathbf{v}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_e = v \cdot \sin A$ , 其中  $v = |\mathbf{V}| = \sqrt{v_n^2 + v_e^2}$  是  $\mathbf{V}$  的模,  $A$  为  $\mathbf{V}$  的大地方位角。

按照文献[9]中所提及的矩阵形式多面函数拟合模型:

$$\mathbf{v} = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a} \end{matrix} \quad (6)$$

传统方法认为将  $N$  方向及  $E$  方向速度分别考虑即为一维问题,即有:

$$\mathbf{v}_n = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a}_n \end{matrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_e = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a}_e \end{matrix} \quad (8)$$

由于在  $N$  或者  $E$  方向进行计算时其核函数是相同,式(7)和式(8)可分别表示为:

$$\mathbf{v}(n, 0) = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a}(n, 0) \end{matrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}(0, e) = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a}(0, e) \end{matrix} \quad (10)$$

所以按矩阵加法,式(9)加式(10)得:

$$\mathbf{v}(n, e) = \begin{matrix} \theta & \mathbf{a}(n, e) \end{matrix} \quad (11)$$

$\theta$  和  $\mathbf{v}$  已知,求  $\mathbf{a}$ 。又因为:

$$\mathbf{v}(n, e) = \begin{bmatrix} v_1 \cos A_1 & v_1 \sin A_1 \\ v_2 \cos A_2 & v_2 \sin A_2 \\ \vdots & \vdots \\ v_m \cos A_m & v_m \sin A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos A_m & \sin A_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

即式(11)可写成:

$$\text{diag}(\mathbf{v})_{m \times m} \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{s})_{m \times 2} = \theta_{m \times j} (\alpha_n, \alpha_e)_{j \times 2} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $\mathbf{c} = (\cos A_1, \cos A_2, \dots, \cos A_m)^T$ ,  $\mathbf{s} = (\sin A_1, \sin A_2, \dots, \sin A_m)^T$ 。

设矩阵  $\mathbf{P} = (c, s)_{m \times 2}$ ,  $\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{s}^T \end{pmatrix}_{2 \times m}$  则式(13)

可写为:

$$\text{diag}(\mathbf{v})_{m \times m} \cdot \mathbf{P}_{m \times 2} \cdot \mathbf{P}_{2 \times m}^T = \theta_{m \times j} (\alpha_n, \alpha_e)_{j \times 2} \cdot \mathbf{P}_{2 \times m}^T \quad (14)$$

设

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{m \times m} &= \mathbf{P}_{m \times 2} \cdot \mathbf{P}_{2 \times m}^T = \begin{pmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos A_m & \sin A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos A_1 & \cos A_2 & \cdots & \cos A_m \\ \sin A_1 & \sin A_2 & \cdots & \sin A_m \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2 & \cdots & \cos A_1 \cos A_m + \sin A_1 \sin A_m \\ \cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2 & 1 & \cdots & \cos A_2 \cos A_m + \sin A_2 \sin A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos A_1 \cos A_m + \sin A_1 \sin A_m & \cos A_2 \cos A_m + \sin A_2 \sin A_m & \cdots & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

我们称  $\mathbf{T}_{m \times m}$  为投影矩阵。

令  $\mathbf{A} = \theta_{m \times j}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{P}_{2 \times m}^T$ ,  $\mathbf{C} = (\text{diag } (v)_{m \times m} \cdot \mathbf{T}_{m \times m})$ ,  $\mathbf{X} = (\alpha_N, \alpha_E)_{j \times 2}$ , 则有一般矩阵方程:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  为已知系数矩阵,  $\mathbf{X}$  为待解矩阵, 由此导出了一个矢量场多面函数拟合的统一模型, 或称扩展模型。

当式(15)为相容矩阵方程时, 其有解的充要条件是  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{C}$ , 此时, 式(15)的一般解为  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T + \mathbf{M} - \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ , 其中  $\mathbf{M}$  是与  $\mathbf{X}$  同类型的任意矩阵。当式(15)为不相容矩阵方程时, 其最小范数最小二乘解是  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^+\mathbf{C}\mathbf{B}^+$ , 其中  $\mathbf{A}^+$ 、 $\mathbf{B}^+$  分别是  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  的 Moore-Penrose 广义逆。 $\hat{\mathbf{X}}$  是这样一个矩阵, 在使  $\|\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^T\mathbf{C}\|$  最小的一切矩阵  $\mathbf{X}$  中,  $\hat{\mathbf{X}}$  矩阵的范数  $\|\hat{\mathbf{X}}\|$  是最小的。

## 4 算例分析

本文算例采用中国地壳运动观测网络(CMONOC)的 GPS 速度场观测数据, 其中包括 25

个基准网点、56 个基本网点及 846 个区域网点的大地坐标、站心坐标系下的速率和方向及速率的精度。

利用精度较高的 25 个基准站、56 个基本站作为多面函数拟合模型的结点, 将 846 个点间隔区分开, 其中图 1 三角形的 423 个点作为求系数  $\alpha$  时的多余观测, 圆形的 423 个点作为推估目标点, 见图 2。采用两种核函数模型, 一种核函数模型为文献[9]中所描述的:

$$\begin{aligned}
 \theta(\mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathbf{B}_j, \mathbf{L}_j) = & \\
 [(\mathbf{B} - \mathbf{B}_j)^2 + (\mathbf{L} - \mathbf{L}_j)^2 + \delta^2]^{1/2} & \quad (16)
 \end{aligned}$$

为叙述方便, 本文将上述核函数模型称为 BL 坐标差核函数; 另一种核函数模型为本文提出的大地线核函数(见式(5))。采用最小二乘法拟合圆形的 423 个目标点的速率值, 最后将 BL 坐标差核函数的多面函数拟合模型拟合的速率结果、大地线核函数的多面函数拟合模型拟合的速率结果与实测的速率结果进行比较, 以检验结果的可靠性。其中大地线采用高斯平均约束及白塞尔公式计算, 详细步骤参见参考文献[8]。

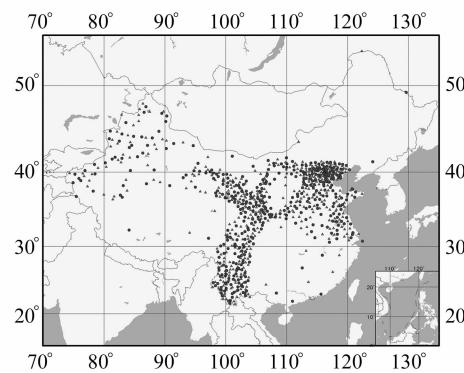


图 1 被选择点的分布

Fig. 1 Selected data Points and Predicted Points in CMONOC

为更好地检验模型效果, 我们对两种模型分别进行了内、外符合精度的检核。

首先利用参与建模的 423 个目标点进行模型的内符合精度检验, 即利用求得的系数  $\alpha$ , 拟合参与建模的 423 个观测点的速率, 将其与实测速度

进行比较, 其结果如图 2 和图 3 所示。

由图 2、图 3, 对于参与建模的已知点, 其拟合残差基本在  $\pm 4$  mm/a 以内, 且采用两种不同的核函数模型拟合的结果非常相近。

由于两种模型所用结点相同、已知点相同, 所

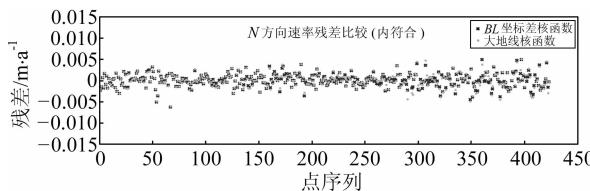


图2 N方向速率的残差结果比较(内符合精度)

Fig. 2 Comparison of N Direction Velocity's Residual Error (Inner Comparison)

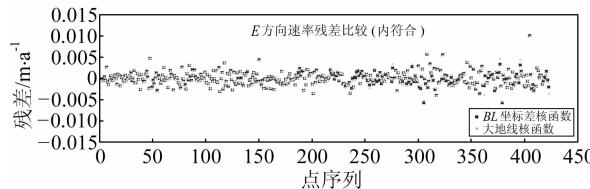


图3 E方向速率的残差结果比较(内符合精度)

Fig. 3 Comparison of E Direction Velocity's Residual Error (Inner Comparison)

以其自由度也相同,为进一步比较两种模型的结果,我们统计了两种模型计算结果的残差平方和,见表1。

表1 两种模型内符合拟合结果的残差平方和比较/( $m^2 \cdot a^{-2}$ )

Tab. 1 Comparison of the Square Summation of Velocity's Residual Error

	N方向	E方向
BL坐标差核函数	0.001 0	0.001 1
大地线核函数	0.001 0	0.001 0

从表1可以看出,两种模型的残差平方和无显著性差异,说明两种模型的内符合精度相当。

另外,利用未参与建模的423个目标点进行模型的外符合精度检验,即利用求得的系数 $\alpha$ ,拟合未参与建模的423个观测点的速率,将其与实测速度进行比较,其结果如图4和图5所示。

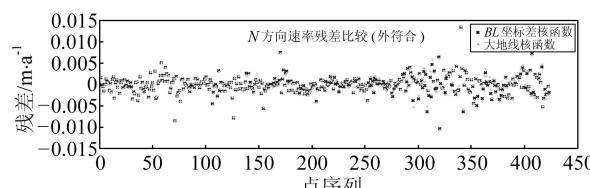


图4 N方向速率的残差结果比较(外符合精度)

Fig. 4 Comparison of N Direction Velocity's Residual Error (Outer Comparison)

由图4、图5知,对于未参与建模的已知点,其拟合残差基本在±5 mm/a以内,采用两种不同的核函数模型推估待求点的结果非常相近。

同样统计了两种模型计算结果的残差平方和,见表2。

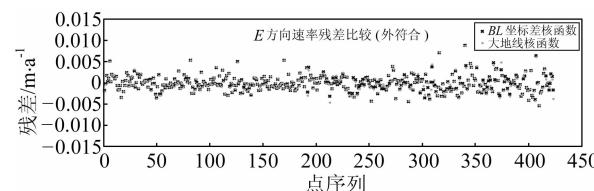


图5 E方向速率的残差结果比较(外符合精度)

Fig. 5 Comparison of E Direction Velocity's Residual Error (Outer Comparison)

从表2可以看出,两种模型的残差平方和也没有显著性差异,其外符合精度也相当。

表2 两种模型外符合拟合结果的残差平方和比较/( $m^2 \cdot a^{-2}$ )

Tab. 2 Comparison of the Square Summation of Velocity's Residual Error

	N方向	E方向
BL坐标差核函数	0.001 9	0.001 4
大地线核函数	0.001 9	0.001 5

传统的BL坐标差核函数的多面函数拟合模型和本文所提出的基于大地线核函数的多面函数拟合新模型都适用于拟合大尺度区域速度场,两种方法拟合结果精度基本相当,但大地线核函数的多面函数拟合模型的几何意义更明确。

## 5 结语

本文基于多面函数拟合的基本数学原理提出在参考椭球面上沿大地线度量距离构造核函数,使几何意义更明确,理论上更合理。同时将适于小尺度范围的平面拟合扩展到适于大尺度范围的椭球面拟合。

此外,将标量场多面函数拟合扩展到矢量场的拟合,导出了矢量场多面函数拟合的统一模型,其中引入了一个投影矩阵,建立了标量场拟合与矢量场拟合的转换关系。

利用中国地壳运动观测网络GPS速度场观测数据,对大地线核函数拟合模型计算了算例,并与常用的BL坐标差核函数拟合模型计算结果作了比较,结果表明两种拟合模型精度非常相近,检验了新模型的可靠性。对本文导出的矢量场多面函数拟合的统一模型,限于篇幅,未给出算例,计算过程和算例将在另文给出。

## 参 考 文 献

- [1] Hardy R L. Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method[J]. Computers Math Applic, 1990, 19:163-208

- [2] 姚宜斌. 利用高精度复测 GPS 网进行中国大陆区城地壳运动特征分析[J]. 地球物理学进展, 2008, 23(4): 1 030-1 037
- [3] 武艳强, 江在森, 杨国华, 等. 利用多面函数整体求解 GPS 应变场的方法及应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2009, 34(9): 1 085-1 089
- [4] 陶本藻, 姚宜斌. 基于多面核函数配置型模型的参数估计[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2003, 28(5): 547-550
- [5] 姚宜斌, 刘经南, 施闯, 等. ITRF97 参考框架下的中国大陆区域地壳板块运动背景场的建立及应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2002, 27(4): 363-366
- [6] 王新洲, 陶本藻, 邱卫宁, 等. 高等测量平差[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006
- [7] 黄立人, 陶本藻, 赵承坤. 多面函数拟合在地壳垂直运动研究中的应用[J]. 测绘学报, 1993, 22(1): 25-32
- [8] 陶本藻, 姚宜斌, 赵美超. 论多面函数推估与协方差推估[J]. 测绘通报, 2002, (9): 4-6
- [9] 刘经南, 施闯, 姚宜斌, 等. 多面函数拟合法及其在建立中国地壳平面运动速度场模型中的应用研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(6): 500-503
- [10] 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京: 解放军出版社, 1988

**第一作者简介:** 姚宜斌, 教授, 博士生导师, 主要从事高精度 GPS 数据分析理论与方法、地壳形变与地球动力学解释方面的研究。  
E-mail: ybyao@sgg.whu.edu.cn

## A New MQ-B Method Suitable for Large Scale Velocity Field Modeling

YAO Yibin<sup>1</sup> LIU Qiang<sup>1</sup> PENG Wenfei<sup>1</sup> CHEN Peng<sup>1</sup>

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** The MQ-B (multiquadric-Biharmonic method) proposed by Hardy as a geometry fitting method was widely used in geodesy, geophysics, etc. In this paper, we firstly expanded a MQ-B method that suitable for large scale velocity field establishment on the Reference ellipsoid. The method we expanded use the geodesicto establish the kernel function, the way we establish the Kernel Function is more reasonable than the traditional *B* and *L* differential kernel function as to Hardy's theory. Secondly, we find that this method can be extended in vector fieldas if we can calculate the projection matrix, andthe form of projection matrix is shown in this paper. Finally, this new geodesic Kernel Function MQ-B method was tested through an experiment. It shows that this new method has a same precisionas the traditional *B* and *L* differential kernel function method in the region of china. However, this new method has a more rational theoretical accountthan the traditional *B* and *L* differential kernel function method, It can be used to establish the large scale velocity field.

**Key words:** multiquadric-biharmonic method; geodesic kernel function; differential kernel function; large scale; velocity field modeling

**About the first author:** YAOYibin, Professor, Ph. D Supervisor, majors in high-precision GPS data processing, crustal deformation and geodynamics interpretation.

E-mail: ybyao@sgg.whu.edu.cn

### 下期主要内容预告

- |                          |        |
|--------------------------|--------|
| ▶ 海岛礁及周边复杂环境动态三维建模       | 李德仁, 等 |
| ▶ 月球重力异常及其计算方法           | 杜劲松, 等 |
| ▶ 电离层总电子含量时空特征分析及分区建模    | 刘志平, 等 |
| ▶ 地下立体交通箱涵管幕双重置换自动导向技术研究 | 潘国荣, 等 |
| ▶ 在线 PPP 服务系统对钟跳的处理能力分析  | 郭斐, 等  |