

正交三角函数导出的最小 GDOP 定位构型解集

薛树强^{1,2} 杨元喜^{3,4} 陈 武⁵ 党亚民²

1 长安大学地测学院,陕西 西安,710054

2 中国测绘科学研究院,北京,100830

3 地理信息工程国家重点实验室,陕西 西安,710054

4 西安测绘研究所,陕西 西安,710054

5 香港理工大学,香港 九龙 红磡

摘 要:由正交三角函数导出了一类最小 GDOP 测距单点定位构型集。导出了测距单点定位构型的 GDOP 极小值条件,并由此引入了最小 GDOP 测距单点定位构型解集的概念,揭示了最小 GDOP 测距单点定位构型的性质——旋转不变性和叠加不变性。对于任意给定的控制点数目 n ,由正交三角函数导出了最小 GDOP 构型的正多边形解。最后在最小 GDOP 二维测距单点定位构型的基础上,导出了三种三维最小 GDOP 测距单点定位构型:圆锥构型(锥角 108.48°)、笛卡尔构型、Walker 构型(轨道倾角 54.74°),这些构型的几何条件为讨论 GNSS 星座设计提供了参考。

关键词:定位构型;GDOP;三角函数;圆锥构型;笛卡尔构型;Walker 构型

中图法分类号:P221; P207 **文献标志码:**A

控制网优化常用的准则有 A-准则、N-准则、S-准则和 D-准则^[1-2]。在 GNSS 导航定位中的 GDOP 由 GNSS 星座的几何结构决定^[4-6]。探讨定位构型的 GDOP 极值几何条件和研究最小 GDOP 的定位构型,在 GNSS 星座优化方面具有现实意义。

已有理论研究大多局限于二维空间中的正多边形(正三角形、正方形、正六边形等)、三维空间中的正四面体、正六面体等单一定位构型^[5,7-12]。仿真分析也是研究单点定位图形的常用方法^[7,13-15]。完整的最小 GDOP 测距单点定位构型解集在大地测量、工程测量、形变监测等方面具有重要的参考价值。

Hilbert 空间是欧氏空间向无穷维空间的推广^[16],其研究对象是函数空间^[17-18]。分析正交三角函数和测距定位方程系数矩阵的方向余弦不难发现,测距定位图形优化的实质是构造一组正交基函数,使得该定位方程的坐标参数、钟差参数等在这组正交基函数下具有最佳的辨识能力。

本文借助傅立叶分析中的正交三角函数,导出了一类最小 GDOP 测距单点定位构型集,包括

二维正多边形构型,三维的圆锥构型、笛卡尔构型、Walker 构型等,并推导了测距单点定位构型的 GDOP 极小值条件,揭示了最小 GDOP 测距单点定位构型解的性质——旋转不变性和叠加不变性。

1 正交三角函数与测距单点定位构型

1.1 正交三角函数

平方可积函数 $L^2(a, b) = \{f(t) | \int_a^b f^2(t) dt < \infty\}$ 中,连续函数 $f(t), g(t) \in L^2(a, b)$ 的内积为 $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ 。令 $g(t) = f(t)$,则由内积导出的范数为 $\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$ 。若 $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$,称 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是正交的。由三角函数系 $\{1, \sin t, \cos t\}$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的正交性^[16],可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos t dt &= \int_0^{2\pi} \sin t dt = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi\end{aligned}\quad (1)$$

收稿日期:2013-06-19

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41020144004,41104018);国家科技支撑计划资助项目(2012BAB16B01);国家 863 计划资助项目(2009AA121405,2013AA122501);北斗全球连续监测评估系统资助项目(GFZX0301040309)。

第一作者:薛树强,博士生,主要从事误差理论与测量平差研究。E-mail: xuesq@casm.ac.cn

对式(1)中的积分进行等间距,可得^[20]

$$\sum_{j=1}^q \sin \Delta_j \cos \Delta_j = \sum_{j=1}^q \sin \Delta_j = \sum_{j=1}^q \cos \Delta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^q \sin^2 \Delta_j = \sum_{j=1}^q \cos^2 \Delta_j = \frac{q}{2} \quad (2)$$

式中, $q \in 3, 4, 5, \dots$; $\Delta_j = (j-1)2\pi/q$ 。

1.2 测距单点定位构型

“定位构型”是待定点与控制点构成的定位图形。本文记 $G_{n,m}$ 为图 1 所示的测距单点定位构型, n 为控制点的数目, $m=2$ 或 3 为构型的维数。

附钟差参数的测距定位观测方程为^[3-4]:

$$d_i(x) + \Delta = L_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

式中, $d_i(x) = \|x - x_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - x_{i,j})^2}$ 为第 i 个已知点 x_i 至待定点 x 的欧氏距离, Δ 为钟差等效距离误差, L_i 为伪距观测值。构型的 GDOP 定义为^[4, 5]

$$(J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} (J_e^T J_e)^{-1} + (J_e^T J_e)^{-1} J_e^T k_n (k_n^T M k_n)^{-1} k_n^T J_e (J_e^T J_e)^{-1} & (J_e^T J_e)^{-1} J_e^T k_n (k_n^T M k_n)^{-1} \\ -k_n^T J_e (k_n^T M k_n)^{-1} & (k_n^T M k_n)^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, $M = (I - J_e (J_e^T J_e)^{-1} J_e^T)$ 。此时

$$\text{GDOP}^2 = \text{tr}(J_e^T J_e)^{-1} + \{ \text{tr}[(J_e^T J_e)^{-1} J_e^T k_n k_n^T J_e (J_e^T J_e)^{-1}] + 1 \} (k_n^T M k_n)^{-1} \quad (10)$$

结合非负定矩阵的性质,可得:

$$\text{GDOP}^2 \geq \text{tr}(J_e^T J_e)^{-1} + (k_n^T M k_n)^{-1} \quad (11)$$

且当且仅当 $k_n^T J_e = 0$ 时等号成立。可以证明,当且仅当

$$J_e^T J_e = \frac{m}{n} I \quad (12)$$

时, $\text{tr}(J_e^T J_e)^{-1}$ 取得极小值 m/\sqrt{n} 。综上可得:

$$\min[\text{GDOP}(G_{n,m})] = \sqrt{m^2 + 1} / \sqrt{n} \quad (13)$$

3 最小 GDOP 测距单点定位构型

3.1 最小 GDOP 测距单点定位构型解集

对于给定的控制点数目 n , 记

$$O_{n,m} = \{G_{n,m} \mid \min \text{GDOP}(G_{n,m})\} \quad (14)$$

为最小 GDOP 测距单点定位构型解集。下面给出 $O_{n,m}$ 中元素的两条重要性质:

1) 叠加(加法)不变性。对任意的自然数 q_1 和 q_2 , 若记 $G_{q_1,m} + G_{q_2,m}$ 为定位构型 $G_{q_1,m}$ 和 $G_{q_2,m}$ 的组合定位构型, 则若 $G_{q_1,m} \in O_{q_1,m}$, $G_{q_2,m} \in O_{q_2,m}$, 则 $G_{q_1,m} + G_{q_2,m} \in O_{q_1+q_2,m}$ 。

2) 旋转不变性。若将定位构型 $G_{n,m}$ 的 n 个控制点绕待定点 x 旋转一定角度(由旋转矩阵 R

$$\text{GDOP}(G_{n,m}) = \sqrt{\text{tr}[(J^T J)^{-1}]} \quad (4)$$

式中, tr 为矩阵的迹,

$$J = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & \cdots & e_n^T \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

为非线性方程(1)的雅克比矩阵,

$$e_i = [x_{i,1} - x_1 \quad x_{i,2} - x_2 \quad \cdots \quad x_{i,m} - x_m] / d_i(x) \quad (6)$$

为待定点 x 至第 i 个已知点 x_i 的方向余弦。

2 GDOP 极值条件

记

$$J_e = [e_1^T \quad e_2^T \quad \cdots \quad e_n^T]^T \quad (7)$$

$$J = [J_e \quad k_n] \quad (8)$$

式中, $k_n = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$ 。利用高斯-约旦法可导出

确定)所得定位构型记为 $G_{n,m}$, 若 $G_{n,m} \in O_{n,m}$, 则 $G_{n,m}^R \in O_{n,m}$ 。

叠加不变性(1)由设计矩阵的分块表示法易证。旋转不变性由 GDOP 的定义和旋转矩阵的正交性质易证。推导从略。

3.2 最小 GDOP 二维测距单点定位构型集

由此将向量 e_i 参数化为

$$e_i = [\cos \theta_i \quad \sin \theta_i] \quad (15)$$

令式(2)中的 $q=n$, 由相应的单位方向矢量

按式(7)构造矩阵 J_e , 由 $J_e^T J_e = \frac{m}{n} I$ 且 $k_n^T J_e = 0$ 可导出一类最小 GDOP 二维测距单点定位构型解, 因该构型等分圆周, 称其为最小 GDOP 测距单点定位构型的正多边形解, 记为 $\bigcirc_{n,2}$ 。

构型 $\bigcirc_{n,2}$ 中最常用的即为正三角形 $\bigcirc_{3,2}$ 、正四边形 $\bigcirc_{4,2}$ 、正六边形 $\bigcirc_{6,2}$ 。其中, 正三角形是传统大地三角网的基本构成单元, 正四边形则是大地四边形的的基本构成单元。正六边形则是蜂窝网的基本构成单元。

对于任意给定的自然数 n , 除了正多边形定位构型 $\bigcirc_{n,2} \in O_{n,2}$ 外, 由最小 GDOP 测距单点定位构型集的叠加不变性、旋转不变性以及正多边形定位构型 $\bigcirc_{q_i,2}$ ($q_i \in 3, 4, 5, \dots$) 可导出一类最小 GDOP 二维单点定位构型

$$\sum_{i=1}^s \bigcirc_{q_i,2}^{R_i} = \bigcirc_{q_1,2}^{R_1} + \bigcirc_{q_2,2}^{R_2} + \cdots + \bigcirc_{q_s,2}^{R_s} \quad (16)$$

式中, $n = \sum_{i=1}^s q_i$ 为整数 n 的分解, $\bigcirc_{q_i,2}^{R_{q_i,2}}$ 表示构型 $\bigcirc_{q_i,2}$ 的旋转变换。

由上面讨论可知,除了正六边形构型 $\bigcirc_{6,2} \in O_{6,2}$ 外,由正三角构型 $\bigcirc_{3,2}$ 可导出旋转组合后的构型满足 $\bigcirc_{3,2} + \bigcirc_{3,2}^R \in O_{6,2}$ 。

3.3 最小 GDOP 三维测距单点定位构型集

1) 圆锥构型

如图 1(a),在正圆锥面(张角 $\varphi = 2\arctan \sqrt{2} \approx 109.48^\circ$)的圆形截面上存在二维构型 $G_{n,2} \in O_{n,2}$,在负圆锥截面上存在二维构型 $G'_{n,2} \in O_{n,2}$,若记 $C_{2n,2} := G_{n,2} + G'_{n,2}$,则 $C_{2n,2} \in O_{2n,2}$ 。

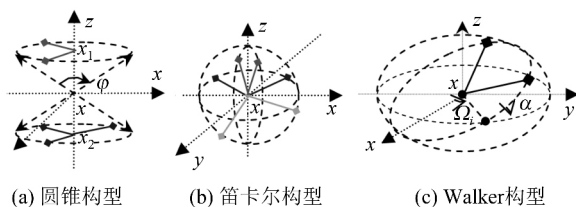


图 1 三类三维构型

Fig. 1 Three Kinds of Three-dimensionall Configuration

构型 $C_{2n,2}$ 的设计矩阵可表示为

$$J = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} J_{e,1} & \sqrt{1/3} k_n & k_n \\ \sqrt{2/3} J_{e,2} & -\sqrt{1/3} k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中, $J_{e,1}$ 和 $J_{e,2}$ 分别为构型 $G_{n,2}$ 和构型 $G'_{n,2}$ 的设计矩阵(由式(7)给出), k_n 的各分量均为 1,则由 $G_{n,2} \in O_{n,2}$ 和 $G'_{n,2} \in O_{n,2}$ 可导出 $J_{e,1} J_{e,1}^T = \frac{n}{2} I$ 和 $J_{e,2} J_{e,2}^T = \frac{n}{2} I$,由此可得

$$J_{e,2}^T = \frac{n}{2} I, \text{ 由此可得}$$

$$J^T J = \begin{bmatrix} 2n/3 I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2n} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$J_j = \begin{bmatrix} \cos \omega_{j,1} \cos \Omega_j - \sin \omega_{j,1} \sin \Omega_j \cos \alpha & \cos \omega_{j,1} \sin \Omega_j + \sin \omega_{j,1} \cos \Omega_j \cos \alpha & \sin \omega_{j,1} \sin \alpha & 1 \\ \cos \omega_{j,2} \cos \Omega_j - \sin \omega_{j,2} \sin \Omega_j \cos \alpha & \cos \omega_{j,2} \sin \Omega_j + \sin \omega_{j,2} \cos \Omega_j \cos \alpha & \sin \omega_{j,2} \sin \alpha & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \omega_{j,s} \cos \Omega_j - \sin \omega_{j,s} \sin \Omega_j \cos \alpha & \cos \omega_{j,s} \sin \Omega_j + \sin \omega_{j,s} \cos \Omega_j \cos \alpha & \sin \omega_{j,s} \sin \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

为构型 $C_{n,2}^i \in O_{n,2}$ 的设计矩阵。若设

$$N_i = J_i^T J_i \quad (23)$$

$$\begin{cases} N_{i,1,1} = \cos^2 \Omega_i \sum_{j=1}^n \cos^2 \omega_{i,j} + \sin^2 \Omega_i \cos^2 \alpha \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j} - \sin 2\Omega_i \cos \alpha \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j} \cos \omega_{i,j} \\ N_{i,2,2} = \sin^2 \Omega_i \sum_{j=1}^n \cos^2 \omega_{i,j} + \cos^2 \Omega_i \cos^2 \alpha \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j} + \sin 2\Omega_i \cos \alpha \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j} \cos \omega_{i,j} \\ N_{i,3,3} = \sin^2 \alpha \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j} \\ N_{i,4,4} = n \end{cases} \quad (24)$$

以及

由式(13)的极值条件,可得 $C_{2n,2} \in O_{2n,2}$ 。

2) 笛卡尔构型

如图 1(b)所示,在三个两两正交的平面内存在三个最小 GDOP 二维测距单点定位构型 $G_{n,2} \in O_{n,2}$, $G'_{n,2} \in O_{n,2}$ 和 $G''_{n,2} \in O_{n,2}$,记 $D_{3n,3} := G_{n,2} + G'_{n,2} + G''_{n,2}$,则 $D_{3n,3} \in O_{3n,3}$ 。

构型 $C_{2n,2}$ 的设计矩阵可表示为

$$J = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} & 0 & k_n \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,2} & k_n \\ 0 & J_{3,1} & J_{3,2} & k_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中, $J_{e,1} = [j_{1,1} j_{1,2}]$, $J_{e,2} = [j_{2,1} j_{2,2}]$ 和 $J_{e,3} = [j_{3,1} j_{3,2}]$ 分别为构型 $G_{n,2}$, $G'_{n,2}$ 和 $G''_{n,2}$ 的设计矩阵(由式(7)给出), k_n 的各分量均为 1,则由 $G_{n,2} \in O_{n,2}$, $G'_{n,2} \in O_{n,2}$ 和 $G''_{n,2} \in O_{n,2}$ 可导出 $J_{e,1} J_{e,1}^T = \frac{n}{2} I$, $J_{e,2} J_{e,2}^T = \frac{n}{2} I$ 和 $J_{e,3} J_{e,3}^T = \frac{n}{2} I$,类似于式(18),可

证明 $D_{3n,3} \in O_{3n,3}$ 。

3) Walker 构型^[22-24]

如图 1(c)所示,在 T 个与 xoy 坐标平面夹角均为 α 的平面内存在 n 个最小 GDOP 二维测距单点定位构型 $G_{n,2}^1 \in O_{n,2}$, $G_{n,2}^2 \in O_{n,2}$, ..., $G_{n,2}^T \in O_{n,2}$,若这 T 个平面中的任意相邻平面间夹角均等于 $\gamma = 2\pi/T$ (即等分圆周),即

$$\Omega_i = \Omega_0 + 2(i-1)\pi/n, i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

当 $\alpha = \arctan \sqrt{2} \approx 54.74^\circ$ 时,则这 n 个二维定位构型构成的三维定位构型称为 Walker 构型 $W_{nT,3}$,则 $W_{nT,3} \in O_{nT,3}$ 。

构型 $W_{nT,3}$ 的设计矩阵可表示为:

$$J = [J_1^T \ J_2^T \ \cdots \ J_T^T]^T \quad (21)$$

其中,

$$N_{i,1,2} = \frac{1}{2} \sin 2\Omega_i \sum_{j=1}^n \cos^2 \omega_{i,j} - \frac{1}{2} \cos \alpha \sin^2 \Omega_i \times$$

$$\sum_{j=1}^n \sin 2\omega_{i,j} + \frac{1}{2} \cos^2 \Omega_i \cos \alpha \sum_{j=1}^n \sin 2\omega_{i,j} -$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \sin 2\Omega_i \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j}$$

(25)

$$N_{i,1,3} = \frac{1}{2} \cos \Omega_i \sin \alpha \sum_{j=1}^n \sin 2\omega_{i,j} -$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \Omega_i \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j}$$

(26)

$$N_{i,1,4} = \cos \Omega_i \sum_{j=1}^n \cos \omega_{i,j} - \sin \Omega_i \cos \alpha \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j}$$

(27)

$$N_{i,2,3} = \frac{1}{2} \sin \Omega_i \sin \alpha \sum_{j=1}^n \sin 2\omega_{i,j} +$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \Omega_i \sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j}$$

(28)

$$N_{i,2,4} = \sin \Omega_i \sum_{j=1}^n \cos \omega_{i,j} - \cos \Omega_i \cos \alpha \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j}$$

(29)

$$N_{i,3,4} = \sin \alpha \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j}$$

(30)

由 $G_{n,2}^i \in O_{n,2}$ 可得:

$$\sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j} \cos \omega_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sin \omega_{i,j} = \sum_{j=1}^n \cos \omega_{i,j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \sin^2 \omega_{i,j} = \sum_{j=1}^n \cos^2 \omega_{i,j} = \frac{n}{2}$$

(31)

将式(31)代入式(24)~式(30),并结合矩阵式(23)的对称性,可得:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \cos^2 \Omega_i + \frac{n}{2} \sin^2 \Omega_i \cos^2 \alpha & \frac{n}{4} \sin 2\Omega_i - \frac{n}{4} \cos^2 \alpha \sin 2\Omega_i & -\frac{n}{4} \sin 2\alpha \sin \Omega_i & 0 \\ \frac{n}{4} \sin 2\Omega_i - \frac{n}{4} \cos^2 \alpha \sin 2\Omega_i & \frac{n}{2} \sin^2 \Omega_i + \frac{n}{2} \cos^2 \Omega_i \cos^2 \alpha & \frac{n}{4} \sin 2\alpha \cos \Omega_i & 0 \\ -\frac{n}{4} \sin 2\alpha \sin \Omega_i & \frac{n}{4} \sin 2\alpha \cos \Omega_i & \frac{n}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

(32)

结合式(32),由式(21)可得:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^T (\frac{n}{2} \cos^2 \Omega_i + \frac{n}{2} \sin^2 \Omega_i \cos^2 \alpha) & \sum_{i=1}^T (\frac{n}{4} \sin 2\Omega_i - \frac{n}{4} \cos^2 \alpha \sin 2\Omega_i) & -\sum_{i=1}^T \frac{n}{4} \sin 2\alpha \sin \Omega_i & 0 \\ \sum_{i=1}^T (\frac{n}{4} \sin 2\Omega_i - \frac{n}{4} \cos^2 \alpha \sin 2\Omega_i) & \sum_{i=1}^T (\frac{n}{2} \sin^2 \Omega_i + \frac{n}{2} \cos^2 \Omega_i \cos^2 \alpha) & \sum_{i=1}^T \frac{n}{4} \sin 2\alpha \cos \Omega_i & 0 \\ -\sum_{i=1}^T \frac{n}{4} \sin 2\alpha \sin \Omega_i & \sum_{i=1}^T \frac{n}{4} \sin 2\alpha \cos \Omega_i & \sum_{i=1}^T \frac{n}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & nT \end{bmatrix}$$

(33)

同时将以下关系

$$\sum_{j=1}^T \sin \Omega_j \cos \Omega_j = 0; \sum_{j=1}^T \sin \Omega_j = 0;$$

$$\sum_{j=1}^T \cos \Omega_j = 0; \sum_{j=1}^T \sin^2 \Omega_j = \sum_{j=1}^T \cos^2 \Omega_j = \frac{T}{2}$$

(34)

代入式(33)可得:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \sum_{i=1}^T \mathbf{N}_i = \text{diag}(\frac{Tn}{4} + \frac{Tn}{4} \cos^2 \alpha, \frac{Tn}{4} +$$

$$\frac{Tn}{4} \cos^2 \alpha, \frac{Tn}{2} \sin^2 \alpha, nT)$$

(35)

结合式(13)的极小值条件可得,当

$$\frac{Tn}{4} + \frac{Tn}{4} \cos^2 \alpha = \frac{Tn}{2} \sin^2 \alpha$$

(36)

时,即当

$$\alpha = \tan^{-1} \sqrt{2} \approx 54.74^\circ$$

(37)

时, Walker 构型的 GDOP 取得极小值,即 $\mathbf{W}_{nT,3} \in O_{nT,3}$ 。

4 结 语

1) 测距单点定位构型的最小 GDOP 条件之一是设计矩阵的列向量两两正交,条件之二是设计矩阵的前两列(二维情形)或前三列(三维情形)的长度两两相等。

2) 对于任意给定的控制点数目 n ,由正交三

角函数可导出最小 GDOP 构型的正多边形解, 及由正多边形旋转叠加构成的最小 GDOP 构型。

3) 本文构造了 3 种三维最小 GDOP 测距单点定位构型: 圆锥构型(锥角 108.48°)、笛卡尔构型和 Walker 构型(轨道倾角 54.74°)。

参 考 文 献

- [1] Grafarend E W. Optimization of Geodetic Networks [J]. *Bolletino di Geodesia a Science Affini*, 1970, 33:351-406
- [2] Teunissen P J G. Network Quality Control [M]. USA: Delft Student Press, 2006
- [3] Kihara M, Okada T. A Satellite Selection Method and Precision for the Global Positioning System [J]. *Navigation*, 1984, 31:8-20
- [4] Yang Yuanxi. Progress, Contribution and Challenges of Compass/Beidou Satellite Navigation System [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(1): 1-6(杨元喜. 北斗卫星导航系统的进展、贡献与挑战[J]. 测绘学报, 2010, 39(1):1-6)
- [5] Li Jianwen, Li Zuohu, Zhou Wei, et al. Study on the Minimum of GDOP in Satellite Navigation and Its Applications [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(S1): 86-88(李建文, 李作虎, 周巍, 等. 卫星导航中几何精度衰减因子最小值分析及应用[J]. 测绘学报, 2011, 40(S1): 86-88)
- [6] Phillips A H. Geometrical Determination of PDOP [J]. *Navigation, Journal of the Institute of Navigation*, 1984, 31:329-337
- [7] Deng Ping, Yu Lijian. GDOP Performance Analysis of Cellular Location System [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2005, 40(2):184-188(邓平, 余立建. 蜂窝定位系统 GDOP 性能分析[J]. 西南交通大学学报, 2005, 40(2):184-188)
- [8] Feng Zunde, Lu Xiushan, Guo Ying. Diagnosis of Figure Advantage in Space Intersecting Model of Distance Measurement [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2004(12): 24-26(冯遵德, 卢秀山, 郭英. 测距空间交会测量模式中交会图形优劣的诊断[J]. 测绘通报, 2004(12):24-26)
- [9] Li Deren. A Thought of Optimization and Design of Geodetic Networks in Consideration of Accuracy and Reliability [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1989, 18(4): 241-248(李德仁. 顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计的设想[J]. 测绘学报, 1989, 18(4):241-248)
- [10] Li Deren, Zhou Yongqian. Optimization and Design of Geodetic Networks in Consideration of Accuracy and Reliability [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1991, 16(2): 47-54(李德仁, 周勇前. 顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计 [J]. 武汉测绘科技大学学报, 1991, 16(2):47-54)
- [11] Gao Yang. Optimal Design of Geodetic Networks Considering Both Precision and Reliability Criteria [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1987, 16(3):232-239(高扬. 同时顾及精度和可靠性准则的控制网优化设计[J]. 测绘学报, 1987, 16(3):232-239)
- [12] Xue Shuqiang. Matrix Volume and Its Applications in Network Design [D]. Beijing: Chinese Academy of Surveying and Mapping, 2007(薛树强. 矩阵体积及其在网形设计中的应用[D]. 北京:中国测绘科学研究院, 2007)
- [13] Yao Jing, Nie Pengcheng, Yi Dongyun, et al. Dilution of Precision of Relative Positioning for Formation Flying Satellites Using GNSS [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2009, 34(1):92-96(姚静, 聂鹏程, 易东云, 等. 基于组合卫星导航系统的编队卫星分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2009, 34(1):92-96)
- [14] Cai Yanhui, Cheng Pengfei. Baseline Network Analysis of Different Underwater GPS Positioning System [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2008, 33(8):324-327(蔡艳辉, 程鹏飞. 差分 GPS 水下定位系统的解析法网形分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(8):324-327)
- [15] Xue Shuqiang, Dang Yamin, Zhang Chuanyin. Research on Setting 3D Network of Underwater DGPS [J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2006, 31(4):23-24(薛树强, 党亚民, 章传银. 差分水下 GPS 定位空间网的布设研究[J]. 测绘科学, 2006, 31(4):23-24)
- [16] Huang Zhenyou, Yang Jianxin, Hua Tahong, et al. Functional Analysis [M]. Beijing: Science Press, 2003(黄振友, 杨建新, 华踏红, 等. 泛函分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2003)
- [17] Wang Ke, Xiao Pengfeng, Feng Xuezhi, et al. The Algorithm of Image Features Detection from Phase Congruency Model Based on 2-D Hilbert Transform [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 39(6):421-427(王珂, 肖鹏峰, 冯学智, 等. 基于改进二维离散希尔伯特变换的图像边缘检测方法[J]. 测绘学报, 2012, 39(6):421-427)
- [18] Tan Kun, Du Peijun. Wavelet Support Vector Machines Based on Reproducing Kernel Hilbert Space for Hyperspectral Remote Sensing Image Classification [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(2):142-147(谭琨, 杜培军. 基于再生核 Hilbert 空间小波核函数支持向量机的高光谱遥感

- 影像分类[J]. 测绘学报 2011,40(2):142-147)
- [19] Bartle R G, Sherbert D R. Introduction to Real Analysis[M]. 4th ed. Hoboken, N J: Wiley, 2011
- [20] Spiegel M R. Mathematical Handbook of Formulas and Tables[M]. New York: McGraw-Hill, 1968
- [21] Meyer C D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra[D]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000
- [22] Walker J G. Satellite Constellations[J]. *Journal of the British Interplanetary Society*, 1984, 37: 559-571
- [23] Yang Xia, Li Jiancheng. Inter-satellite Links Analysis of Walker Constellite[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamic*, 2012,32(2):143-147(杨霞,李建成. Walker 星座星间链路分析[J]. 大地测量与地球动力学, 2012,32(2):143-147)
- [24] Han Songhui, Gui Qingming, Li Jianwen, et al. Analysis of Establishment Criteria, Connectivity and Robustness of Iner-satellite Link in Mixed Constellation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012,37(9):1 014-1 019(韩松辉, 归庆明, 李建文, 等. 混合星座星间链路的建立以及连通性和稳健性分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012,37(9):1 014-1 019)

Positioning Configurations with Minimum GDOP from Orthogonal Trigonometric Functions

XUE Shuqiang^{1,2} YANG Yuanxi^{3,4} CHEN Wu⁵ DANG Yamin²

1 School of Geological and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China

2 Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100830, China

3 National Key Laboratory for Geo-information Engineering, Xi'an 710054, China

4 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China

5 The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong, China

Abstract: In this paper, single-point-positioning configurations with minimum GDOP employing orthogonal trigonometric functions are presented. The preconditions for minimizing the GDOP are introduced, and the set composed of all configurations with minimal GDOP is defined. Some properties of the minimum GDOP configurations, including the invariance of rotation and superposition, are detailed. For arbitrary given number n of control points, regular polygon solutions are immediately deduced from the orthogonal trigonometric functions. Based on the two dimensional configurations with minimum GDOP, three kinds of three dimensional configurations with minimum GDOP, including the cone configuration with cone angle 108.48° , the Descartes configuration, and the Walker configuration with inclination angle 54.74° , are discussed. The geometrical conditions of these configurations provide us some knowledge for GNSS constellation design.

Key words: positioning configuration; GDOP; trigonometric functions; cone configuration; Descartes configuration; Walker configuration

First author: XUE Shuqiang, PhD candidate, concentrated on error theory and adjustment. E-mail: xuesq@casm.ac.cn

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41020144004, 41104018; the National Sci-tech Support Plan of China, No. 2012BAB16B01; the National 863 Program of China, Nos. 2009AA121405, 2013AA122501; the BDS Monitoring & Assessment System, No. GFZX0301040309.