

# GAAF 在星载 GPS 实时定轨中的应用研究

王甫红<sup>1</sup> 徐其超<sup>2\*</sup> 龚学文<sup>1</sup> 张蔚<sup>1</sup>

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

2 航天恒星科技有限公司,北京,100086

**摘 要:**为确保高精度星载 GPS 实时定轨算法能够应用于较低轨道卫星,提出了用地球引力近似函数法(GAAF)代替传统球谐函数递推法来计算地球引力加速度,在不降低实时定轨精度的同时,大幅减小高阶次重力场模型的轨道积分计算负荷,以满足计算能力有限的星载处理器的在轨处理要求。分析了影响 GAAF 计算精度的两个因素:伪中心位置拟合多项式的次数选取和经纬度格网大小的最优确定。用 CHAMP 卫星的实测 GPS 数据模拟实时定轨试验,结果表明,采用二次及以上伪中心拟合多项式,格网纬度小于 0.75°、经度小于 1.5°的 GAAF 时,实时定轨的轨道精度要优于 70×70 阶次重力场模型直接参与实时定轨,且大幅降低实时定轨的计算负荷。

**关键词:**地球引力近似函数法;伪中心;实时定轨;星载 GPS;计算负荷

**中图法分类号:**P228.42 **文献标志码:**A

随着航天科技的发展,高分辨率遥感卫星的对地观测与实时地理编码、科学探测卫星的编队飞行等航天任务对卫星定轨的精度、实时性和自主性提出了更高的要求<sup>[1]</sup>。近年来,具有全球性、高精度、观测数据量多和低成本等特点的星载 GPS 测量已成为低轨卫星轨道测控的主要技术手段之一。

在星载 GPS 实时定轨算法中,通常使用星载 GPS 伪距观测值结合简化的动力学模型,利用扩展卡尔曼滤波进行在轨数据处理,获得高精度的卫星轨道参数。在扩展滤波处理中,动力学轨道积分预报一般使用龙格-库塔系列的单步积分方法<sup>[2-3]</sup>,每次积分需要多次计算地球引力加速度。为了提高较低轨道卫星(低于 500 km)的实时定轨精度,地球重力场模型需要精确到 50×50 阶次甚至 70×70 阶次<sup>[2-5]</sup>。模型阶次越高,用传统球谐函数递推算法计算地球引力加速度的计算量就越大。目前,星载 GPS 接收机内部处理器和星载处理器的计算能力远低于地面 PC 处理器<sup>[6]</sup>,因此,现有的实时定轨系统大多将重力场模型的阶次截断到 30×30 来减小星上的计算负荷<sup>[7]</sup>。为了使高精度星载 GPS 实时定轨算法进入工程应用,必须提高实时定轨算法的计算效率,尤其是优

化动力学轨道积分算法,降低在轨数据处理的计算量。本文引入地球引力近似函数法(gravity acceleration approximation function,GAAF)<sup>[8-10]</sup>代替传统递推算法来计算地球引力加速度,通过 CHAMP 卫星实测数据模拟实时定轨实验,验证了该方法的可行性。

## 1 地球引力近似函数法

GAAF 的原理是假定地球内部存在某一点,卫星所受到的瞬时地球引力(包括中心引力和非球形引力)用以该点为中心的瞬时二体问题来描述,该点被称为伪中心。随着卫星位置的变化,伪中心点相对于地球质心的位置也在缓慢变化。GAAF 计算地球引力加速度分为两步:①计算拟合系数,即在某一固定经纬度上,不同轨道高度处的瞬时地球引力所对应的伪中心在地心地固系中的位置可用一组参数来拟合。这一步事先在地面完成,然后将计算得到的全球固定经纬度格网点的拟合系数保存到星上存储器。②内插计算,即利用存储的拟合系数内插当前卫星处的伪中心位置,然后根据二体问题即可获得地球引力加速度。

收稿日期:2013-10-15

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41374035)。

第一作者:王甫红,博士,副教授。主要从事卫星导航定位和卫星定轨方法的教学和研究工作。E-mail: fhwang@sgg.whu.edu.cn

\* 通讯作者:徐其超,硕士,工程师。E-mail: xqc369@qq.com

1.1 伪中心位置的拟合方法

若卫星与地球之间满足严格意义的二体问题,则卫星所受的地球引力加速度可以表示为:

$$\vec{a} = -\mu \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \tag{1}$$

式中,  $\vec{a}$  为地球引力加速度,包括中心引力和非球形引力产生的加速度;  $\mu$  为地球引力常数;  $\vec{\rho}$  为伪中心至卫星间的矢量,  $\rho$  为  $\vec{\rho}$  的模。

如图 1 所示,卫星质心  $S$ 、伪中心  $O'$  与地球质心  $O$  满足如下关系:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{c} \tag{2}$$

其中,  $\vec{c}$  为地心到伪中心的位置矢量;  $\vec{r}$  为地心到卫星的位置矢量。结合式(1)和式(2),可以推导出<sup>[8]</sup>:

$$\vec{c} = \vec{r} + \sqrt{\mu} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^{3/2}} \tag{3}$$

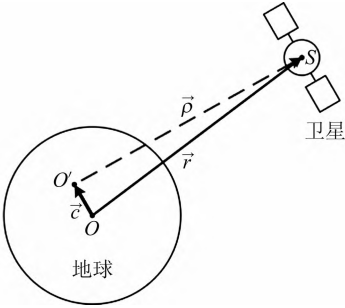


图 1 伪中心定义

Fig. 1 Definition of Earth Pseudo-Center

由式(3)可知,如果当前时刻的卫星位置向量  $\vec{r}$  已知,根据精确的重力场模型可计算出地球引力加速度  $\vec{a}$ ,从而得到伪中心的位置矢量  $\vec{c}$ 。在地球引力加速度的计算过程中,如果消除地球  $J_2$  项的影响,可以保证  $|\vec{c}| < 250$  m,以减小伪中心位置向量的量级<sup>[10]</sup>。图 2 给出了北纬 40°、东经 75°处伪中心位置随轨道高度的变化规律。可以看出,300~500 km 高度范围内,伪中心位置随卫星高度的变化较为平缓,可以使用多项式函数进行拟合。

按照固定的经纬度间隔,将地球表面划分为一定大小的格网。在某个格网点上方,在给定的轨道高度范围内,用多项式函数拟合不同卫星高度对应的伪中心位置向量。对于任一格网点的伪中心位置分量,拟合多项式函数可表示为:

$$c = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{4}$$

式中,  $c$  为轨道高度  $h$  对应的伪中心位置分量;  $a_i$  ( $i = 0, 1, \cdots, n$ ) 为拟合系数;  $x = (h - h_{\min}) / (h_{\max} - h_{\min})$ ,  $h_{\max}$  和  $h_{\min}$  分别为拟合区间的最大高度和最小高度。

采用式(4)拟合全球所有格网点的伪中心位

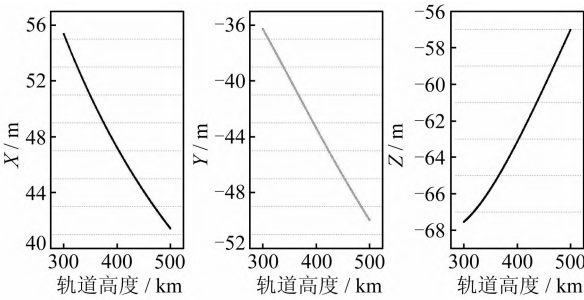


图 2 伪中心位置随轨道高度的变化  
( $B = 40^\circ \text{ N}$ ,  $L = 75^\circ \text{ E}$ ,  $H = 300 \sim 500$  km)

Fig. 2 Variations of Pseudo-Center with  
Orbital Height

置随卫星高度的变化,并将拟合系数存储在卫星上,用于星载实时定轨。

1.2 GAFF 计算地球引力加速度

根据任意时刻卫星的位置向量,利用全球格网点的拟合系数可以计算出卫星附近所有格网点相应轨道高度对应的伪中心位置;然后内插计算卫星位置处的伪中心位置向量。Hujsak 推荐六点双变量内插方法<sup>[8]</sup>。如图 3 所示,方块为用球坐标形式表示的卫星位置  $(\varphi_p, \lambda_q, h)$ ,圆点表示用来内插计算卫星处的邻近格网点,其中  $(\lambda_0, \varphi_0)$  为卫星位置左下角最近格网点的经纬度,  $\Delta\varphi$ 、 $\Delta\lambda$  分别为纬度和经度格网间隔。

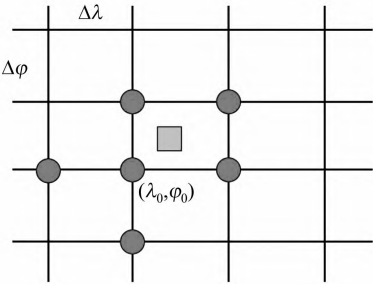


图 3 六点双变量内插方法

Fig. 3 Six-point Bi-variate Interpolation

六点双变量内插模型可表示为:

$$\begin{aligned} \vec{c}(\varphi_p, \lambda_q, h) = & \vec{c}(\varphi_0 + p\Delta\varphi, \lambda_0 + q\Delta\lambda, h) = \\ & 0.5 \cdot q \cdot (q - 1) \cdot \vec{c}(\varphi_0, \lambda_0 - \Delta\lambda, h) + \\ & 0.5 \cdot p \cdot (p - 1) \cdot \vec{c}(\varphi_0 - \Delta\varphi, \lambda_0, h) + \\ & (1 + pq - p^2 - q^2) \cdot \vec{c}(\varphi_0, \lambda_0, h) + \\ & 0.5 \cdot p \cdot (p - 2q + 1) \cdot \vec{c}(\varphi_0 + \Delta\varphi, \lambda_0, h) + \\ & 0.5 \cdot q \cdot (q - 2p + 1) \cdot \vec{c}(\varphi_0, \lambda_0 + \Delta\lambda, h) + \\ & p \cdot q \cdot \vec{c}(\varphi_0 + \Delta\varphi, \lambda_0 + \Delta\lambda, h) \end{aligned} \tag{5}$$

其中,  $\vec{c}(\varphi, \lambda, h)$  为相应位置处的伪中心位置向量;  $p = (\varphi_p - \varphi_0) / \Delta\varphi$ ,  $q = (\lambda_q - \lambda_0) / \Delta\lambda$ 。

在获得卫星处的伪中心位置向量后,考虑  $J_2$  项的影响,利用式(1)和式(2)直接计算卫星的地

球引力加速度。由此可知,使用 GAAF 方法不必进行大量的球谐函数递推计算,只需要简单的几步内插计算即可得到地球引力加速度,大幅降低在轨计算量。

## 2 影响 GAAF 计算精度的因素分析

由 GAAF 的原理可知,影响 GAAF 方法计算地球引力加速度精度的主要因素包括拟合多项式次数的选取和全球格网大小的确定。拟合次数越大,格网间隔越小,地球引力加速度的计算精度会相应提高,但是需要增加拟合系数的存储量,不利于实际应用。

### 2.1 拟合多项式的次数确定

将地球划分为  $1^\circ$  大小的格网,在距离地面 300~500 km 的高度范围内,分别采用 2 次、3 次、4 次和 5 次多项式来拟合伪中心位置随高度的变化(拟合时,使用  $120\times 120$  阶地球重力场模型),保存拟合系数。然后在每个格网点上方该高度范围内每隔 20 km 取一个测试点(共  $180\times 360\times 10=64\,800$  个测试点),利用各自的多项式拟合系数分别计算测试点对应的地球引力加速度,并与  $120\times 120$  阶地球重力场模型计算的加速度进行比较,得到不同次数拟合多项式的计算误差,统计结果如表 1 所示。其中,RMS 和 max 分别为所有测试点各方向加速度的均方根误差和误差绝对值的最大值。作为参照,这里也给出了  $70\times 70$  阶次地球重力场模型用传统递推方法计算的地球引力加速度的精度统计。可以看出,采用 2 次多项式的 GAAF 的计算精度整体上优于  $70\times 70$  阶地球重力场模型的传统递推算法的精度。多项式的次数越高,拟合系数的总量就越多,所占用的存储空间就越大。考虑到星上存储空间有限,下文均采用 2 次多项式拟合方法。

表 1 不同次数多项式的拟合精度统计/ $(10^{-8}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$   
Tab.1 Fitting Accuracy Statistics with Different Order of Polynomial/ $(10^{-8}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$

|                 | X     |          | Y     |          | Z     |          |
|-----------------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|
|                 | RMS   | max      | RMS   | max      | RMS   | max      |
| 2 次             | 6.18  | 134.37   | 6.16  | 164.13   | 6.49  | 175.47   |
| 3 次             | 0.78  | 16.44    | 0.78  | 21.28    | 0.81  | 21.61    |
| 4 次             | 0.09  | 2.16     | 0.10  | 2.74     | 0.10  | 2.37     |
| 5 次             | 0.01  | 0.24     | 0.01  | 0.32     | 0.01  | 0.27     |
| $70\times 70$ 阶 | 75.65 | 1 383.35 | 75.41 | 1 524.31 | 78.31 | 1 319.77 |

### 2.2 格网大小的确定

理论上,格网越小,内插精度越高,但需要存储多项式拟合系数的格网点就越多,占用的存储

空间就越大。因此,在满足精度要求的情况下,格网越大越有利于工程应用。

由于地球关于自转轴近似对称,地球引力加速度对纬度变化的敏感程度比经度大<sup>[11]</sup>,因此下文计算中均将格网的纬度与经度的比值统一设为 1:2。在 300~500 km 高度范围内,将格网纬度间隔分别设定为  $0.25^\circ$ 、 $0.5^\circ$ 、 $0.75^\circ$  和  $1.0^\circ$  共 4 种格网大小,用 2 次多项式进行拟合试验,分析格网大小对 GAAF 方法的影响。然后在全球 300~500 km 高度范围内选择经度、纬度和高度服从均匀分布的 100 万个随机测试点,用不同格网大小的拟合系数计算地球引力加速度,与  $120\times 120$  阶地球重力场模型的计算结果进行比较,统计结果如表 2 所示。可以看出,格网越小,GAAF 方法计算的加速度的精度越高,但对应的存储系数文件也越大。因此,在星载 GPS 实时定轨的实际应用中,在不明显降低地球引力加速度计算精度的条件下,选择拟合系数文件较小的格网大小。

表 2 不同格网的地球引力加速度的  
计算精度和系数文件大小  
Tab.2 Gravitational Acceleration Accuracy and  
Coefficient Storage of Different GAAF Grids

|                 | 纬度间隔<br>/ $(^\circ)$ | 经度间隔<br>/ $(^\circ)$ | 3D RMS<br>/ $(10^{-8}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$ | 系数文件大小<br>/MB |
|-----------------|----------------------|----------------------|--|---------------|
|                 |                      |                      |  |               |
| GAAF            | 0.25                 | 0.5                  | 27   | 17.80         |
|                 | 0.5                  | 1.0                  | 60   | 4.47          |
|                 | 0.75                 | 1.5                  | 102  | 1.99          |
|                 | 1.0                  | 2.0                  | 166  | 1.12          |
| $70\times 70$ 阶 |                      |                      | 125  | 0.12          |

## 3 GAAF 用于实时定轨模拟试验与分析

### 3.1 试验方案

为了验证 GAAF 参与实时定轨的定轨精度和计算性能,本文任选一段时间 CHAMP 卫星的 GPS 实测数据(2008 年 DOY 42~48,此时 CHAMP 卫星轨道高度约为 350 km),采用笔者自主研发的 SATODS 软件<sup>[4-5]</sup>模拟星载 GPS 实时定轨测试。该软件包括动力学模型轨道积分、星载 GPS 单点定轨、伪距观测数据的预处理和推广卡尔曼滤波等主要模块。轨道积分器采用 4 阶龙格-库塔单步法,积分步长为 30 s。利用 UD 分解的扩展卡尔曼滤波对星载伪距观测值与广播星历进行滤波处理。

试验中,首先将格网的纬度间隔(纬度与经度



间隔的比例为 1 : 2) 分别设置为  $0.5^{\circ}$ 、 $0.75^{\circ}$  和  $1.0^{\circ}$ , 均用 2 次多项式进行伪中心拟合, 保存各自的拟合系数; 然后分别用不同纬度间隔对应的拟合系数参与星载 GPS 实时定轨, 并将定轨结果与 JPL 公布的 CHAMP 精密轨道进行比较, 统计各自的定轨精度与地球引力加速度的计算耗时。为了便于比较, 这里也给出了传统球谐函数递推算法(采用 70 阶次重力场模型)计算地球引力加速度的定轨结果。

3.2 试验结果与分析

针对上述模拟试验方案, 通过 SATODS 软件进行实时定轨数据处理, 与 JPL 的精密轨道进行比较, 并将结果归算到卫星的径向(R)、切向(T)和法向(N)。DOY 46 的轨道误差如图 4 所示, 可以看出: ① 不同纬度间隔的 GAAF 方法与 70 阶次重力场模型递推算法的实时定轨误差的变化趋势总体一致; ② 4 种方案的 R、T 和 N 方向的轨道误差大多在  $\pm 2$  m 范围内波动; ③ 纬度间隔为  $1.0^{\circ}$  的 GAAF 方法的实时定轨精度稍差。

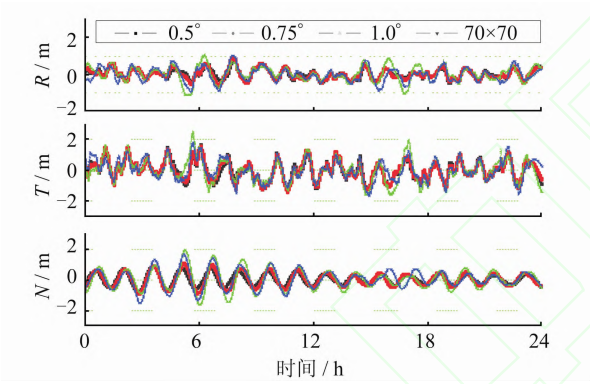


图 4 4 种方案实时定轨的轨道误差变化  
Fig. 4 Orbital Differences of Four Schemes

表 3 给出了上述 4 种方案的定轨精度和轨道积分计算耗时统计。可以看出: ① 当格网间隔设置较小时, 伪中心点的内插精度较高, 地球引力加速度的计算精度越高, 由此可提高实时定轨的精度; ② 当格网的纬度间隔为  $1.0^{\circ}$  时, GAAF 方法计算地球引力加速度的精度要低于  $70 \times 70$  阶次

表 3 实时定轨精度和计算负荷统计

Tab. 3 Statistics of Orbital Accuracy and Computational Load

| 定轨方案             | 轨道误差/m |       |       | 轨道积分<br>总耗时/s |
|------------------|--------|-------|-------|---------------|
|                  | R      | T     | N     |               |
| $0.5^{\circ}$    | 0.256  | 0.598 | 0.361 | 0.30          |
| $0.75^{\circ}$   | 0.279  | 0.609 | 0.438 | 0.24          |
| $1.0^{\circ}$    | 0.399  | 0.719 | 0.639 | 0.16          |
| $70 \times 70$ 阶 | 0.372  | 0.666 | 0.590 | 3.58          |

重力场(见表 2), 其实时定轨精度相对较差; ③ GAAF 计算地球引力加速度时, 不需要大量的递推循环计算, 只要少量的内插计算, 因此可大幅提高实时定轨算法的轨道积分效率。

4 结 语

本文引入 GAAF 代替传统球谐函数递推算法来计算地球引力加速度, 提高低轨卫星(低于 500 km)的实时定轨精度和算法效率。因为 GAAF 先在地面用高阶重力场模型进行拟合, 在星上只需要几步内插算法即可计算地球引力加速度, 不仅可以提高地球引力加速度的计算精度, 而且可以降低轨道积分算法的计算量, 因此该方法适用于较低轨道卫星的高精度实时定轨。

不同格网大小的 GAAF 用于 CHAMP 卫星实时定轨模拟试验的结果表明, 采用 2 次多项式拟合伪中心点的位置变化, 纬度间隔为  $0.75^{\circ}$ 、经度间隔为  $1.5^{\circ}$  的格网配置的 GAAF 用于低轨卫星实时定轨, 其轨道精度要优于  $70 \times 70$  阶次地球重力场模型, 并大幅减小计算耗时。

低轨卫星一般都是近圆形轨道, 轨道高度变化有限, 因此 GAAF 方法为较低轨道卫星的高精度实时定轨提供了一种有效的解决方法。

参 考 文 献

[1] Arbinger C, Amico S. Impact of Orbit Prediction Accuracy on Low Earth Remote Sensing Flight Dynamics Operations[C]. The 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, Munich, Germany, 2004

[2] Reichert A, Meehan T, Munson T. Toward Decimeter-Level Real-time Orbit Determination; a Demonstration Using the SAC-C and CHAMP Spacecraft[C]. The ION-GPS-2002, Portland, Oregon, 2002

[3] Montenbruck O, Ramos-Bosch P. Precision Real-time Navigation of LEO Satellites Using Global Positioning System Measurements[J]. GPS Solutions, 2008, 12(3): 187-198

[4] Wang Fuhong. A Kalman Filtering Algorithm for Precision Real-Time Orbit Determination with Space-borne GPS Measurements[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(6): 653-656(王甫红. 高精度星载 GPS 实时定轨卡尔曼滤波模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(6): 653-656)

[5] Wang Fuhong. Theory and Software Development

on Autonomous Orbit Determination Using Space-borne GPS Measurements[D]. Wuhan: Wuhan University, 2006 (王甫红. 星载 GPS 自主定轨理论及其软件实现[D]. 武汉: 武汉大学, 2006)

[6] De Florio S, Gill E, Amico S D, et al. Performance Comparison of Microprocessors for Space-based Navigation Applications[C]. The 7th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, Berlin, Germany, 2009

[7] Liu Feng, Ju Tao. Comparison Between Two On-board Algorithms; Satellite Single-point Orientation and Satellite Orbit Determination[J]. *Journal of Spacecraft TT&C Technology*, 2007, 26(4): 25-29(刘峰, 巨涛. 单点定位与实时定轨的星载算法的比较研究[J]. 飞行器测控学报, 2007, 26(4): 25-29)

[8] Hujsak R S. Gravity Acceleration Approximation Function[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1996, 93: 335-349

[9] Tong Kewei, Zhou Jianping, He Linshu. A Reduced Orbit Propagation Model of Low-Earth Orbit Satellite[J]. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(4): 1 327-1 333(童科伟, 周建平, 何麟书. 近地卫星简化轨道预报方法研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1 327-1 333)

[10] Goldstein D B. Real-Time Autonomous Precise Satellite Orbit Determination Using Global Positioning System [D]. Colorado: University of Colorado, 2000

[11] Zhou Ning. Onboard Orbit Determination Using GPS Measurements for Low Earth Orbit Satellites [D]. Queensland: Queensland University of Technology, 2004

Application of a Gravity Acceleration Approximation Function in the Precise Real-Time Orbit Determination Using Space-borne GPS Measurements

WANG Fuhong<sup>1</sup> XU Qichao<sup>2</sup> GONG Xuwen<sup>1</sup> ZHANG Wei<sup>1</sup>

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Space Star Technology Company Limited, Beijing 100086, China

**Abstract:** In order to minimize the computational burden of the onboard precise real-time orbit determination system, a Gravity Acceleration Approximation Function (GAAF) is introduced to compute the gravitational acceleration replacing the traditional spherical harmonic representation of the gravity field. The appropriate order of the polynomial to fit a set of pseudo-centers on various heights at a fixed location is discussed in detail, as well as the optimal geographic grid size. Then, GAAF is embedded in the SATODS software for real-time orbit determination using space-borne GPS measurements. A simulation test of real-time orbit determination was carried out using space-borne GPS dual frequency pseudo-range data from the CHAMP satellite. Results show that the GAAF can improve orbital accuracy with quadratic polynomial fitting and a global grid where the latitude increment is no more than 0.75 degrees and the longitude increment is less than 1.5 degrees, as compared with the traditional recursive method using a  $70 \times 70$  gravity field model. The proposed method reduces the computational load of orbit determination significantly.

**Key words:** gravity acceleration approximation function; pseudo-center; real-time orbit determination; space-borne GPS; computational load

**First author:** WANG Fuhong, PhD, associate professor, specializes in teaching and research on the theory and method of GPS navigation and satellite orbit determination. E-mail: fhwang@sgg.whu.edu.cn

**Corresponding author:** XU Qichao, master, engineer. E-mail: xqc369@qq.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41374035.