第38卷 第8期 武汉大学学报·信息科学版 Vol.38 No.8
2013年8月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Aug. 2013

文章编号:1671-8860(2013)08-0925-05 文献标志码:A

方差-协方差分量估计的概括平差因子法

刘志平[1] 张书毕[1]

(1 中国矿业大学国土环境与灾害监测国家测绘地理信息局重点实验室,徐州市大学路1号,221116)

摘 要:针对现有方差-协方差分量估计(variance-covariance component estimation,VCE)理论存在的问题,通过引入间接平差的平差因子概念,定义并研究了基于概括平差模型的概括平差因子、概括闭合差及其方差阵,进而利用二次期望公式提出了基于概括平差因子的VCE新方法。该方法适用于概括平差模型所归纳的4种函数模型形式,并通过概括平差因子揭示了平差函数模型与VCE是否存在解析估计形式的关系。实例计算结果表明,现有迭代型VCE方法改变了LS估计量的统计性质,而VCE新方法解析估计具有LS统计性质,且无需初值。

关键词:平差模型;最小二乘准则;概括平差因子;概括闭合差;方差-协方差分量估计

中图法分类号:P207.2

对于多类观测值或多因素同类观测值的测量平差问题,方差-协方差分量估计(variance-covariance component estimation,VCE)与观测值平差是同等重要的两个方面。目前,方差-协方差分量估计已经形成了基于概括平差模型的一个普遍性理论框架[1-2],并在实际工作中得到了广泛应用。文献[3-4]利用VCE方法研究了常规控制网中角度与距离观测值的定权;文献[5-6]利用VCE方法研究了融合导航自适应因子的确定;文献[7-9]利用VCE方法研究了GNSS不同类观测值权比估计。此外,文献[10]利用VCE方法研究了似大地水准面精化拟合模型,文献[11]利用VCE方法研究了CHAMP重力场恢复,文献[12-13]利用VCE方法进行了大地测量地球物理联合反演研究。

上述研究涉及的VCE估计理论均是基于残差二阶量的迭代解法,其通用的迭代停止准则是各类观测值单位权方差相等。然而,VCE迭代解一般只能保证在初值附近的局部最优[14],而且迭代估计收敛性问题在理论上还未得到解决[15]。此外,迭代型VCE估计过程不利于实时动态计算,估计结果不具有LS统计性质[16]。因此,VCE方法的研究需要借鉴新的工具,寻求具有LS统计性质且不需初值的解析估计。现有研究成果表明,平差因子以矩阵形式反映了平差结构,是平差成果质量的全面度量指标[17-19]。因此,本文首次将平差因子引入VCE方法研究,在概括平差模型的基础上提出了概括平差因子、概括闭合差及其方差阵计算方法,进而提出了基于概括平差因子的VCE新方法。

1 方差分量估计新方法

1.1 概括平差因子

设概括平差模型为:

$$\begin{cases} \underset{c\times n}{\boldsymbol{A}}\ \underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}} + \underset{c\times u}{\boldsymbol{B}}\ \underset{u\times 1}{\boldsymbol{x}} - \underset{c\times 1}{\boldsymbol{W}} = \underset{c\times 1}{\boldsymbol{0}},\ \underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_L} \\ \underset{s\times u}{\boldsymbol{C}}\ \underset{u\times 1}{\boldsymbol{x}} - \underset{s\times 1}{\boldsymbol{W}_x} = \underset{s\times 1}{\boldsymbol{0}} \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$分别表示已知的系数矩阵;$\boldsymbol{W}=-(\boldsymbol{AL}+\boldsymbol{Bx}^0+\boldsymbol{A}_0)$表示具有参数的条件方程闭合差;$\boldsymbol{W}_x=-(\boldsymbol{Cx}^0+\boldsymbol{C}_0)$表示限制条件方程闭合差;$\boldsymbol{D}_L$表示观测值$L$的方差阵;$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{x}$分别为待求的残差与参数向量;下标$c$、$s$分别表示条件方程个数和限制条件方程个数;$n$、$u$分别表示观测数和参数个数;平差模型自由度或多余观测数$r=(c+s)-u$。

收稿日期:2013-05-24。

项目来源:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(41204011);中央高校基本科研业务费专项资助项目(2010QNA20);江苏高校优势学科建设工程资助项目(SZBF2011-6-B35)。

在 $V^{\mathrm{T}}D_L^{-1}V=\min$ 准则下，参数向量的最小二乘解为：

$$\hat{x}=Q_{\hat{x}}B^{\mathrm{T}}N_a^{-1}W+N_b^{-1}C^{\mathrm{T}}N_c^{-1}W_x \tag{2}$$

式中，$N_a=AD_LA^{\mathrm{T}}$；$N_b=B^{\mathrm{T}}N_a^{-1}B$；$N_c=CN_b^{-1}C^{\mathrm{T}}$；$Q_{\hat{x}}=N_b^{-1}-N_b^{-1}C^{\mathrm{T}}N_c^{-1}CN_b^{-1}$。

将参数解式(2)代入概括平差模型式(1)第一行，整理可得残差向量与闭合差的关系式：

$$AV=R_aW-KW_x \tag{3}$$

式中，$R_a=I-BQ_{\hat{x}}B^{\mathrm{T}}N_a^{-1}$；$K=BN_b^{-1}C^{\mathrm{T}}N_c^{-1}$。

进一步地，可得式(3)中矩阵 R_a 的迹为：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R_a)&=c-\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}}B^{\mathrm{T}}N_a^{-1}B)=\\&c-u+\mathrm{tr}(N_c^{-1}CN_b^{-1}C^{\mathrm{T}})=r\end{aligned} \tag{4}$$

式中，$\mathrm{tr}(\cdot)$表示迹算子。

当概括平差模型化为间接平差模型时，有 $A=-I,C=0$，则 $R_a=I-BN_b^{-1}B^{\mathrm{T}}D_L^{-1}$，即为文献[17-19]提出的可全面反映间接平差成果质量的平差因子计算式。按此概念推广，本文称 R_a 为反映概括平差成果质量的概括平差因子。易证明，R_a 为幂等矩阵。

由于式(3)中的 W、W_x 为已知量，则 AV 的计算可以避开未知的残差向量 V。因此，将式(3)中的 AV 定义为概括闭合差 $\tilde{W}$，并结合式(3)～(4)导出其方差阵 $D_{\tilde{W}}$，可得：

$$\begin{cases}\tilde{W}=R_aW-KW_x\\D_{\tilde{W}}=R_aD_W\end{cases} \tag{5}$$

1.2 基于 R_a 的 VCE 方法

首先，给出下文推导过程中用到的二次型期望公式[1]。若有服从任一分布的 n 维随机向量 Y，其数学期望为 μ，方差阵为 Σ，则 Y 的任一二次型的数学期望可表达为：

$$E(Y^{\mathrm{T}}QY)=\mathrm{tr}(\Sigma Q)+\mu^{\mathrm{T}}Q\mu \tag{6}$$

式中，Q 为一个 n 阶对称可逆阵。

设方差分量模型为：

$$D_L=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_iQ_i) \tag{7}$$

式中，α_i 为方差分量线性组合；Q_i 为构造的协因数分量矩阵。

协因数分量矩阵 Q_i 必须满足两个性质：对称可逆和线性无关，即如下表达式成立：

$$\begin{cases}Q_i=Q_i^{\mathrm{T}},\det(Q_i)\neq 0\\\sum_{i=1}^{m}(\theta_iQ_i)\neq 0\end{cases} \tag{8}$$

式中，$\det(\cdot)$表示矩阵的行列式；$\{\theta_i\}$为任意一组非全零的实数。

根据式(7)，条件方程闭合差 W 的方差分量模型可表示为：

$$D_W=AD_LA^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\tilde{Q}_i) \tag{9}$$

式中，$\tilde{Q}_i=AQ_iA^{\mathrm{T}}$，称 $\tilde{Q}_i$ 为闭合差 W 的协因数分量矩阵。

综合式(3)、(5)，因 $E(V)=0$，可得 $E(\tilde{W})=0$。此外，由于 Q_i 对称可逆，则 $\tilde{Q}_i$ 对称可逆。继而，将式(6)中的 Q 替换为 $\tilde{Q}_i$、Y 替换为概括闭合差 $\tilde{W}$，可得：

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_i\tilde{W}&=\mathrm{tr}(D_{\tilde{W}}\tilde{Q}_i)=\\&\mathrm{tr}(R_aD_W\tilde{Q}_i)\end{aligned} \tag{10}$$

进一步地，将式(9)方差分量模型代入式(10)右边，并整理可得：

$$\tilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_i\tilde{W}=\mathrm{tr}\Big(\tilde{Q}_iR_a\cdot\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\tilde{Q}_i)\Big) \tag{11}$$

与式(11)同理，若进一步考虑 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，则可导出方差-协方差分量估计模型：

$$\begin{bmatrix}\tilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_1\tilde{W}\\\vdots\\\tilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_m\tilde{W}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\tilde{Q}_1R_a\tilde{Q}_1)&\cdots&\mathrm{tr}(\tilde{Q}_1R_a\tilde{Q}_m)\\\vdots&&\vdots\\\mathrm{tr}(\tilde{Q}_mR_a\tilde{Q}_1)&\cdots&\mathrm{tr}(\tilde{Q}_mR_a\tilde{Q}_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_1\\\vdots\\\hat{\alpha}_m\end{bmatrix} \tag{12}$$

由式(12)可知，估计式的输入量为概括闭合差 $\tilde{W}$ 和概括平差因子 R_a，又由式(5)得 $\tilde{W}$ 是 R_a 的函数，因此称为基于概括平差因子 R_a 的方差-协方差分量估计方法。其次，分析式(7)～(12)的推导过程可以看出，α_i 取值范围未作假设，可用于各类随机模型估计研究。再次，按不同平差函数模型形式分别推导 $\tilde{Q}_i$、R_a、$\tilde{W}$ 计算式，便可进一步得到与各函数模型对应的方差-协方差估计公式，具体见表1。特别说明的是，需对 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 进行线性变换，方可最终获得方差-协方差分量估计值。

表1 4种平差函数模型的 $\tilde{Q}_i$、R_a、$\tilde{W}$ 计算表

Tab.1 $\tilde{Q}_i$, R_a and $\tilde{W}$ Calculation Formula for Four Adjustment Function Models

参量	模型			
	条件平差 $B=0,C=0$	具参数的条件平差 $C=0$	间接平差 $A=-I,C=0$	附限制的间接平差 $A=-I$
$\tilde{Q}_i$	AQ_iA^{T}	AQ_iA^{T}	Q_i	Q_i
R_a	I	$I-BN_b^{-1}B^{\mathrm{T}}N_a^{-1}$	$I-BN_b^{-1}B^{\mathrm{T}}D_L^{-1}$	$I-BQ_{\hat{x}}B^{\mathrm{T}}D_L^{-1}$
$\tilde{W}$	W	R_aW	R_aW	R_aW-KW_x

分析表 1 可知，VCE 解析估计是否存在与函数模型形式有关，且可由概括平差因子 $\boldsymbol{R}_a$ 解释。当采用条件平差模型时，$\boldsymbol{R}_a$ 为单位阵，可以直接获得方差分量-协方差分量的解析估计式；当采用其他 3 种平差模型（模型中包含参数）时，$\boldsymbol{R}_a$ 为 $\boldsymbol{D}_L$ 的函数，方差-协方差分量需迭代求解。理论上，平差结果仅与观测值及其统计性质相关，不因经典平差函数模型不同而不同，方差-协方差分量估计结果也应如此。但是，由于平差参数是观测值的一次函数，而方差分量是观测值的二次函数，使方差分量估计较参数估计复杂得多。简而言之，迭代估计与解析估计的一致性需进一步讨论分析。因此，§2 基于同一问题的条件平差模型与间接平差模型分别进行方差-协方差分量估计，进而以方差一致性统计量检验平差模型的正确性并阐明两种解估计的区别。

2　算例结果与分析

算例 1　如图 1(a)所示的边角网[1]，A、B、C 是已知点，P_1、P_2 是待定点，网中观测了 12 个角度，编号为 1～12，观测了 6 条边长，编号为 13～18。先验测角中误差为 1.5″，测边中误差为 2 cm。

算例 2　如图 2(b)所示的边角网[20]，A、B 为已知点，C、D、E 为待定点，网中观测了 11 个角度，编号为 1～11，观测了 4 条边长，编号为 12～15。先验测角中误差为 1″，测边中误差为 1 cm。

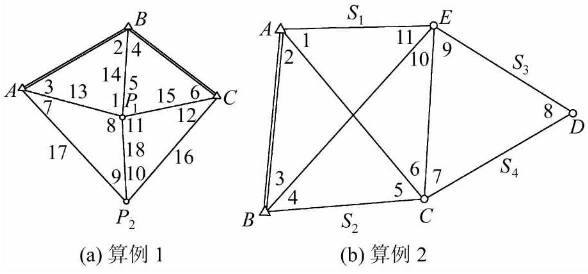

图 1　边角网

Fig. 1　Triangulateration Network

算例 1 和算例 2 均是两类观测值平差问题，若记测角方差为 σ_β^2、测边方差为 σ_S^2、维数与测角数相等的单位阵 $\boldsymbol{I}_\beta$、维数与测边数相等的单位阵 $\boldsymbol{I}_S$，则可按如下方法建立方差分量模型：

$$\boldsymbol{D}_L = \alpha_1 \boldsymbol{Q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{Q}_2 \tag{13}$$

式中，

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_\beta^2 \\ \sigma_S^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_\beta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_S \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_\beta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_S \end{bmatrix}$$

显见，$\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{Q}_2$ 对称可逆，采用基于概括平差因子的方差分量估计方法可估计 $\hat{\alpha}_1$，$\hat{\alpha}_2$，进而通过线性变换可得方差分量 $\hat{\sigma}_\beta^2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$，$\hat{\sigma}_S^2 = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1$。两个算例的计算结果见表 2。

表 2　不同方法的估计结果/cm

Tab. 2　Estimation Results Using Two Methods/cm

算例	次数	间接平差（迭代）		条件平差（解析）	
		0	1	8	—
1	σ_β^2	2.250	3.581	3.638	3.840
	σ_s^2	4.000	6.168	5.929	5.230
	χ^2	22.080	13.998	14.000	13.971
	x_1, y_1, σ_{P_1}	1.588，−0.853，1.132	1.577，−0.864，1.422	1.558，−0.883，1.421	1.499，−0.945，1.418
	x_2, y_2, σ_{P_2}	−5.518，12.506，2.008	−5.563，12.461，2.508	−5.639，12.385，2.483	−5.872，12.138，2.401
2	σ_β^2	1.000	1.446	1.358	1.282
	σ_s^2	1.000	2.401	2.548	2.739
	χ^2	15.828	8.851	9.000	9.098
	x_1, y_1, σ_{P_1}	−0.736，−0.875，0.556	−0.702，−0.985，0.706	−0.695，−1.008，0.691	−0.688，−1.031，0.678
	x_2, y_2, σ_{P_2}	−0.146，2.316，0.532	−0.064，2.520，0.673	−0.047，2.561，0.658	−0.031，2.600，0.646
	x_3, y_3, σ_{P_3}	−2.166，0.191，1.152	−1.820，0.213，1.464	−1.752，0.216，1.434	−1.686，0.219，1.409

分析算例 1，采用间接平差模型时，需要迭代求解，而采用条件平差模型时，可直接得出解析估计。分析间接平差的 VCE 迭代前后方差分量、χ^2 统计量，以及坐标参数及其点位误差的变化可以发现，坐标参数及其点位误差随迭代变化较小，但方差分量与 χ^2 统计量随迭代变化较快，且 χ^2 统计量的最终值与自由度 r 相等。分析条件平差的 VCE 估计结果可知，其 χ^2 统计量与自由度 r 并不相等。由此比较可得，正是由于迭代算法存在迭代停止准则、算法收敛性等问题，使得间接平差模型的 VCE 迭代估计与条件平差模型的 VCE 解析估计存在差异。此外，算例 2 可以得出同样的结论。

进一步分析表 2 可知，间接平差 VCE 迭代解

与 Helmert 估计结果相同[20]，其显著特点是 χ^2 统计量与自由度 r 相等，这也是现有迭代型方差分量估计方法的共性。但是，这种共性并不是 LS 统计性质所要求的[16]。此外，间接平差 VCE 迭代估计的点位误差均大于条件平差 VCE 解析估计的点位误差，表明迭代型 VCE 方法并未获得 LS 准则下的最优统计结果。因此，现有迭代型方差分量估计改变了 LS 统计性质[16]，而本文提出的基于概括平差因子的 VCE 估计方法完全保留了 LS 统计性质。

3 结　语

本文在概括平差模型基础上定义了与之相应的概括平差因子，进而利用二次型期望公式导出了方差-协方差分量解估计的新方法。该方法通过概括平差因子揭示了方差-协方差分量解估计形式与函数模型形式的关系。当采用条件平差函数模型时，概括平差因子为单位阵，该方法提供了方差-协方差分量解析估计公式。边角网应用结果与分析表明，迭代停止准则、迭代收敛性等问题使得 VCE 迭代估计量失去了 LS 统计性质，而基于概括平差因子的 VCE 解析估计有效解决了上述的问题。此外，VCE 解析法在高维多类动态测量数据处理中将更加高效实用，本文仅列举了两类观测的 VCE 估计算例，而如多频导航定位等多类观测值的协因数分量矩阵构造及 VCE 解析估计需进一步讨论。

参 考 文 献

[1] 崔希璋，於宗俦，陶本藻，等. 广义测量平差[M]. 武汉：武汉大学出版社，2005

[2] Amiri-Simkooei A R. Variance Component Estimation Theory and GPS Applications [M]. Delft: NCG, 2007

[3] 王仲锋. 导线网方差分量估计的综合研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2001，26(2)：112-118

[4] 李博峰，刘成，石德斌，等. 无碴轨道铁路控制网的 Helmert 方差分量估计[J]. 同济大学学报(自然科学版)，2010，38(2)：302-307

[5] 杨元喜，高为广. 基于方差分量估计的自适应融合导航[J]. 测绘学报，2004，33(1)：22-27

[6] 杨元喜，张晓东. 基于严密 Helmert 方差分量估计的动态 Kalman 滤波[J]. 同济大学学报(自然科学版)，2009，37(9)：1 241-1 246

[7] 段举举，沈云中. 基于方差分量估计的 GPS/GLONASS 组合单点定位[J]. 测绘通报，2011(4)：4-6

[8] Amiri-Simkooei A R, Teunissen P J G, Tiberius C C J M. Application of Least-Squares Variance Component Estimation to GPS Observables[J]. Journal of Surveying Engineering, 2009, 135(4): 149-160

[9] Li B, Shen Y, Lou L. Efficient Estimation of Variance and Covariance Components: a Case Study for GPS Stochastic Model Evaluation[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 41(1): 203-210

[10] 郭东美，许厚泽. 基于方差分量估计的局部似大地水准面精化拟合模型[J]. 地球物理学进展，2011，26(3)：813-818

[11] 徐天河，居向明. 基于方差分量估计的 CHAMP 重力场恢复方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2007，32(3)：242-246

[12] Xu Caijun, Ding Kaihua. Methods of Determining Weight Scaling Factors for Geodetic-geophysical Joint Inversion[J]. Journal of Geodynamics, 2009, 47: 39-46

[13] 王乐洋，许才军，张朝玉. 一种确定联合反演中相对权比的两步法[J]. 测绘学报，2012，41(1)：19-24

[14] 李博峰，沈云中，楼立志. 基于等效残差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报，2010，39(4)：336-341

[15] 尚艳亮. 方差分量估计迭代算法收敛性分析与改进[J]. 测绘科学，2010，35(6)：129-130

[16] 汪平，刘长建. 基于随机模型基准的 Helmert 方差分量估计[J]. 测绘科学技术学报，2007，24(3)：213-216

[17] 周江文. 再论平差因子[M]. 观测误差理论文集. 北京：测绘出版社，1999

[18] 欧吉坤. 相关观测情况的可靠性研究[J]. 测绘学报，1999，28(3)：189-195

[19] 陶本澡. 平差因子与平差结构[J]. 大地测量与地球动力学，2002，22(3)：6-10

[20] 李满苗. 边角网观测值的方差估计及其平差[J]. 勘察科学技术，1986(2)：43-50

第一作者简介：刘志平，博士，讲师，主要从事大地测量数据处理理论、导航定位算法和精密变形监测研究。

E-mail：zhpliu@cumt.edu.cn；zhpnliu@gmail.com

Variance-covariance Component Estimation Method Based on Generalization Adjustment Factor

LIU Zhiping[1]　*ZHANG Shibi*[1]

(1　NASG Key Laboratory of Land Environment and Disaster Monitoring, China University of Mining and Technology, 1 Daxue Road, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The existing variance-covariance component estimation (VCE) theory and its defects are analyzed and briefly described. A generalization adjustment factor was developed from the adjustment factor concept, and both generalization closure error and its covariance matrix are investigated based on the generalization adjustment model. A novel VCE method including four basic function models is presented using the generalization adjustment factor. The relationship between four function models and VCE analytical or iterative solution properties is effectively revealed by the generalization adjustment factor. Triangulateration network adjustment results show that the VCE iteration solution lost fewer optimal statistical properties found in the LS criterion. The VCE analytical solution, only for the condition function model provides the optimal statistical properties meeting the LS criterion.

Key words: adjustment model; least square principle; generalization adjustment factor; generalization closure error; variance-covariance component estimation

About the first author: LIU Zhiping, Ph. D, lecturer, majors in geodetic data processing theory, positioning and navigation algorithm and precise deformation monitoring.

E-mail: zhpliu@cumt.edu.cn; zhpnliu@gmail.com