第 38 卷 第 8 期　　武汉大学学报 · 信息科学版　　Vol. 38 No. 8
2013 年 8 月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Aug. 2013

文章编号：1671-8860(2013)08-0954-04　　文献标志码：A

全概率公式在时间地理中的应用研究

尹章才[1]　刘清全[1]　孙华涛[1]

(1　武汉理工大学资源与环境工程学院，武汉市珞狮路 122 号，430070)

摘　要：在已知起止点时间和位置及最大速度的条件下，针对移动对象的时空不确定性，利用全概率公式构建了定向移动的概率模型。首先，根据起止点时间和位置计算平均速度(即能到达目的地的最小速度)，并在最小与最大速度之间随机离散出若干速度点，同时假设随机速度变量服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布。然后，对任一速度值计算移动对象的可达范围及其几何概型，即在该速度取值条件下移动对象的条件概率。最后，在速度概率与基于速度条件的几何概率基础上，利用全概率原理能计算定向移动的时空概率分布。实验结果表明，随最大速度的增大，该概率的方差具有收敛性和稳定性，不同于已有概率模型的方差的分散性。

关键词：概率时间地理；条件概率；正态分布；均匀分布；麦克斯韦-玻尔兹曼分布

中图法分类号：P208

概率时间地理是(经典)时间地理基于概率的扩展，即在时间地理确定的可达范围基础上分析移动对象所在位置的可能性，能为移动对象最大可能地找寻提供定量依据，也为移动 GIS 向智能 GIS 发展提供基础。时间地理提供了时空菱柱体表达定向移动的可达位置范围[1]。定性的时空菱柱体已经在交通网空间[2-4]、非均质空间[5]以及交通网约束空间[6-7]得到应用。近年来，定量时空体也得到了关注，文献[8]提出了模糊时空体但尚未研制分析工具；文献[9-11]先后提出了概率时空菱柱体，但其方差随最大速度的增大而发散[12]。本文针对这种发散性，提出了基于速度全概率的概型，其方差随最大速度增大具有收敛性。

1　研究背景

1.1　定向移动的样本空间

在时间地理中，以最大速度 $v_{\max}$ 移动的对象在时间 T 内所能到达的平面区域可用椭圆表示，也称为潜在区域(potential path area，PPA)。移动对象在任意时刻 $t\in[0,\ T]$，离开起点 F_1 的范围可用以 F_1 为圆心，以 $v_{\max}\times t$ 为半径的圆表示；到达止点 F_2 的范围可用以 F_2 为圆心，以 $v_{\max}\times(T-t)$ 为半径的圆表示。两圆的交集为菱镜，即移动对象在 t 的潜在范围或样本空间，记为 $\Omega(F_1,\ F_2;\ v_{\max};\ T|\ t)$。菱镜端点(如 I)的轨迹形成了椭圆[13]，两焦点 $F_1(-c,\ 0)$、$F_2(c,\ 0)$ 分别表示定向移动的起、止点，焦距 $2c=|F_1F_2|$，长轴 $2a=v_{\max}\times T$。连续时间 t 的菱镜序列构成了时空菱柱体。

随着 $v_{\max}$ 的增大，菱镜大小不断扩大[12]；当 $v_{\max}\to+\infty$ 时，菱镜趋于无穷大。对给定的两个速度 v_1、v_2，且 $v_1<v_2$ 时，有 $\Omega(F_1,\ F_2;\ v_1;\ T|\ t)\subset\Omega(F_1,\ F_2;\ v_2;\ T|\ t)$。

1.2　定向移动的正态概型

文献[10]根据有偏随机走提出了定向移动基于正态分布的概率模型，本文称为时间地理中定向移动的正态概型(简称为定向正态概型)，其中有偏随机走是随机走概率分布的期望，为非零值。

$$f(x,y\mid t)=\frac{1}{2\pi\sigma_{x,t}\sigma_{y,t}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_{x,t})^2}{\sigma_{x,t}^2}+\frac{(y-\mu_{y,t})^2}{\sigma_{y,t}^2}\right]}$$

数学期望 $\mu_{x,t}=\bar{v}\cdot t$，$\mu_{y,t}=0$。在时间 t，标准差 $\sigma_{x,t}$ 和 $\sigma_{y,t}$ 分别定义为菱镜最小边界盒的宽度和高度的 1/6，因而方差会随 $v_{\max}$ 增大而发散[12]。

2　定向移动的全概率模型

定向移动的全速度概率模型(简称为定向全

收稿日期：2013-05-09。

项目来源：国家自然科学基金资助项目(41071283，41171319)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012-IV-097)。

概型)，就是先将速度离散成单个的速度值，然后计算在每个速度值条件下的条件概率，最后根据全概率公式计算移动对象的概率分布。

2.1　速度概率

麦克斯韦-玻尔兹曼分布律是一个普遍的规律，它对任何物质的微粒(气体、液体、固体的原子和分子、布朗粒子)在任何保守力场中运动的情形都成立，其中布朗粒子被视为巨大分子[14]。在时间地理中，人一方面具有微粒的扩散特性，如为了避免汽车拥堵人们可选择相对宽松的诸如火车、自行车等其他方式出行，这样，人可视为原子、分子和布朗粒子等微粒基于尺度的进一步扩展；另一方面，人的移动也受保守力制约，如家、办公室等对人的向心力。因而，作为随机变量的移动速度 $v\in[0, +\infty) = \{0$, 步行, 自行车, 汽车, 火车, 飞机$\}$ 也可适用麦克斯韦-玻尔兹曼分布律。

麦克斯韦-玻尔兹曼分布是 3 个独立、呈正态分布的变量 v_x、v_y 和 v_z 的乘积，其中一个方向上的分布为 $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$。这意味着，在二维空间上的速度分布是两个独立、呈正态分布的变量 v_x 和 v_y 的乘积，即 $v_x \sim N(0, \sigma_v^2)$ 与 $v_y \sim N(0, \sigma_v^2)$ 的独立联合。速率是速度大小，二维空间的速率 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 服从瑞利分布 $v \sim \mathrm{Rayleigh}(\sigma_v)$，其中，$\sigma_v^2$ 是速度的方差：

$$p(v) = \frac{v}{\sigma_v^2}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right),\ v \in [0, +\infty)$$

2.2　条件概率

简单地说，如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型。在实际问题中，当无法区分在区域内取值的随机变量 X 取不同值的可能性有何不同时，就可以假定 X 服从区域上的均匀分布，即几何概型。

移动对象实际采用的速度称为实现速度 $v\in[\bar{v}, v_{\max}]$，其中，$\bar{v} = 2c/T$ 是移动对象能到达目的地的最小实现速度，并规定 v 与时间 $t\in[0, T]$ 无关。对任意给定的 v，移动对象在时间 t 的潜在范围菱镜为 $\Omega(F_1, F_2; v; T \mid t)$。由于不能区分对象位于不同位置的可能性有何不同，因而可以假设潜在位置服从均匀分布。根据几何概型，菱镜均匀分布：

$$p(x, y \mid v, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{A_{v,t}}, & A_{v,t} > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中，$A_{v,t}$ 是菱镜的面积；$p(x, y \mid v, t)$ 是菱镜在给定速度 v 和时间 t 条件下的概率。

2.3　全概率

根据全概率公式，由速度概率 $p(v)$ 和条件概率 $p(x, y \mid v, t)$ 可以获得定向移动的概率分布 $f(x, y \mid t)$，即：

$$f(x, y \mid t) = \sum_v p(v) p(x, y \mid v, t)$$

图 1 是在 $t = T/2$ 时，由 5 个几何概型(以菱镜为底面的柱体)构成的全概率。其中，形成每个菱镜的速度：$\bar{v} < v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5 < v_{\max}$，速度越小对应的菱镜面积越小，并包含于速度大的菱镜。当速度之间的间隔越小时概率分布将越光滑。

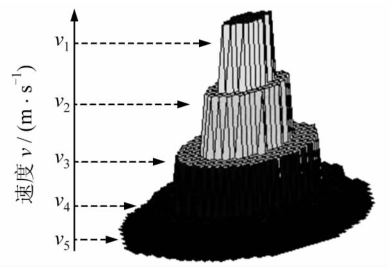

图 1　基于 5 个离散速度值的全概率分布

Fig. 1　A Probability Distribution Based on Velocity's Total Probability at Middle Time

3　实例分析

3.1　概率分布

设起点 $F_1(-10, 0)$、止点 $F_2(10, 0)$ 位于 X 轴，$T = 20$ s。一般情况下，人的最大步行速度 $v_{\max} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，设 $\sigma_x = 1$，$\bar{v} = |F_1 F_2|/T = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。将这些数据代入速度全概率公式，可以计算任意时刻 t 的概率分布(见图 2)。

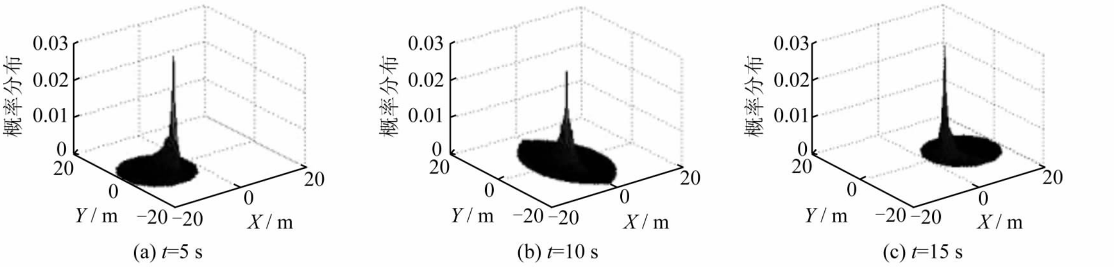

图 2　概率分布

Fig. 2　Probabilistic Distribution

3.2 数学期望

在定向移动的概率分布基础上，通过边缘概率分布可计算 X 方向和 Y 方向的数学期望。其中，Y 方向的数学期望随时间的函数为水平直线（见图 3(a)），表示移动对象在 Y 方向的期望值为 0；X 方向的期望则为曲线，且其期望位置位于 $[F_1, F_2]$ 内。X 和 Y 方向上的数学期望基于时间的导数分别为钟型曲线和水平直线（见图 3(b)），这种导数描述了数学期望随时间的变化率，或期望位置点的移动速度。

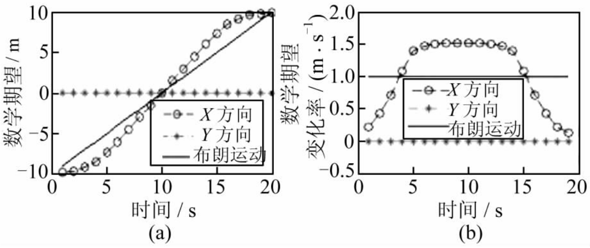

图 3 数学期望和数学期望变化率

Fig. 3 Mathematical Expectation and Mathematical Expectation Changing Rate

布朗运动或定向正态概型的数学期望是连接 $(F_1, 0)$ 与 (F_2, T) 的对角直线（图 3(a)），其导数则是水平直线 $\bar{v}=1$（图 3(b)）。速度两端小、中间大的钟型曲线，能描述不同速度组合或移动方式的出行过程，如出发地 F_1→步行→乘坐汽车等交通工具→步行→目的地 F_2；水平直线型变化率，则描述匀速的出行过程或单一移动方式。当 T 不断减小时，定向全概型在 X 方向的数学期望曲线趋于对角直线。

3.3 方 差

在定向移动的概率分布基础上，通过边缘概率分布也可计算 X 方向和 Y 方向的方差（见图 4），它们关于中间时刻对称并开口向下。其中，Y 方向的方差只有一个极大值，类似于布朗桥方差的抛物线；X 方向的方差则具有两个极大值和在中间时刻 $(T/2)$ 的一个极小值，左边的极大值点对应的时间为 $(a-c)/v_{\max}$[10]。

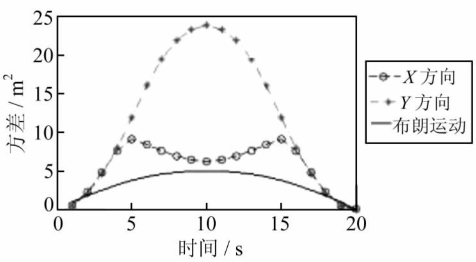

图 4 方差的时间函数

Fig. 4 Variance Function of Time

3.4 数字特征的变化趋势

随着最大速度 $v_{\max}$ 的增大，定向移动的概率模型的数学期望和方差也会发生相应的变化。

对特定的时间 $t=5$ s，当 $v_{\max}$ 增大时，Y 方向的期望值始终为 0，X 方向的期望值则不断减小并收敛于直线 $y=-8$（图 5(a)）。由于布朗桥与速度无关，因而也为直线。对特定的时间 $t=10$ s，当 $v_{\max}$ 增大时，X、Y 方向的方差趋于稳定（图 5(b)）；作为常数的布朗桥方差也具有稳定性。

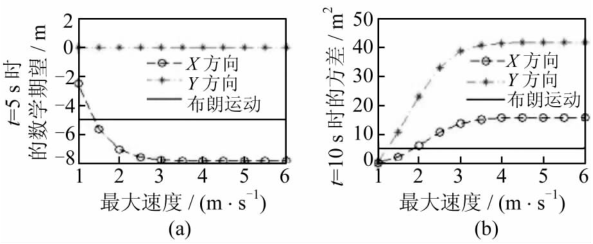

图 5 最大速度增大时数学期望和方差的变化趋势

Fig. 5 Mathematical Expectation Function of Maximum Speed and Variance Function of Maximum Velocity

4 结 语

本文在已有概率时间地理的基础上，提出了一种新的定量描述定向移动不确定性的方法，其具有如下特点：① 数学期望变化率是钟型曲线，能描述人们出行的一般模式；② 随最大速度的增大，方差趋于稳定。进一步的研究，主要是通过实际应用来完善本文提出的模型，如障碍空间概率时间地理的修正问题。

参 考 文 献

[1] Hägerstrand T. What About People in Regional Science[J]. Regional Science, 1970, 24(1): 7-21

[2] Miller H J. Modeling Accessibility Using Space-time Prism Concepts Within Geographical Information Systems[J]. International Journal of Geographical Information Science, 1991, 5 (3): 287-301

[3] Bart K, Walied O. Modeling Uncertainty of Moving Objects on Road Networks via Space-time Prisms [J]. International Journal of Geographical Information Science, 2009, 23(9): 1 095-1 117

[4] 戚铭尧，樊艳伟，彭昕，等. 一种基于交通网络的时空棱柱表示[J]. 武汉大学学报 · 信息科学版，2010，35(12)：1 491-1 495

[5] Miller H J, Bridwell S A. A Field-based Theory for Time Geography[J]. Annals of the Association of

American Geographers, 2009, 99(1): 49-75
[6] 方志祥,李清泉,萧世伦. 利用时间地理进行位置相关的时空可达性表达[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2010, 35(9):1 091-1 095
[7] Yin Zhangcai, Duan Q Y, Sun H T, et al. Time Geographic Network Modeling for Restraint Space of Transportation Network[C]. The Fifth International Conference on Advanced Geographic Information Systems, Applications, and Services, Nice, 2013
[8] Neutens T, Witlox F, Weghe N, et al. Space-time Opportunities for Multiple Agents: A Constrained-Based Approach[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2007, 21 (10): 1 061-1 076
[9] Winter S. Towards a Probabilistic Time Geography [C]. The 17th ACM SIGSpatial GIS, Bellevue, WA, 2009
[10] Winter S, Yin Zhangcai. Directed Movements in Probabilistic Time Geography [J]. International Journal of Geographical Information Science, 2010, 24(9):1 349-1 365
[11] Winter S, Yin Zhangcai. The Elements of Probabilistic Time Geography[J]. Geoinformatica, 2011, 15(3): 417-434
[12] 尹章才,何晓蓉,张晓盼,等. 基于布朗桥概率模型的定向移动[J]. 测绘科学技术学报,2012, 29(6): 397-400
[13] Miller H J. A Measurement Theory for Time Geography[J]. Geographical Analysis, 2005, 37(1):17-45
[14] 向义和. 大学物理导论(上册)[M]. 北京:清华大学出版社,1999

第一作者简介:尹章才,博士,副教授。研究方向为时间地理与 Web 2.0 地图。
E-mail:yinzhangcai@163.com

Probability Model of Directed Movements Based on Total Probability Theorem

YIN Zhangcai[1]　*LIU Qingquan*[1]　*SUN Huatao*[1]
(1 School of Resources and Environmental Engineering, Wuhan University of Technology, 122 Luoshi Road, Wuhan 430070, China)

Abstract: When the locations of an agent at two times, and its maximum velocity are known, the agent's location between both those time instances is uncertain. We present a practical method, the total probability theorem, to approximate that uncertainty. First, the minimum (average) velocity from starting point to destination can be computed, and then many discrete speed values between the minimum and maximum velocity can be chosen randomly. The random speed variable V follows the Maxwell-Boltzmann distribution that describes particle speeds, and thus the probability density function of V, $p(V)$, becomes applicable. Second, for a discrete speed value v, we calculate the agent's reachable range (x, y) at any time t in time geography. The range follows a uniform distribution, and so at t we may obtain $p(x, y \mid v, t)$, which is the conditional probability of (x, y) given the value of the random variable V, $V=v$. Finally, according to the total probability theorem, the probability distribution of the agent at time t, $p(x, y|t)$, is obtained by the equation $\sum p(V=v) \cdot p(x, y \mid v, t)$ where the parameter V takes all values. When increasing the maximum velocity, experiments show that the total probability' variance has a good convergence and steadiness, an improvement over the existing method' divergence.

Key words: probabilistic time geography; conditional probability; normal distribution; uniform distribution; Maxwell-Boltzmann distribution

About the first author: YIN Zhangcai, Ph.D, associated professor, majors in time geography and Web 2.0 mapping.
E-mail: yinzhangcai@163.com