

总体最小二乘研究进展

王乐洋^{1,2,3} 许才军²

(1 东华理工大学测绘工程学院,南昌市广兰大道 418 号,330013)

(2 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

(3 江西省数字国土重点实验室,抚州市市府路 56 号,344000)

摘要:综述了总体最小二乘解的性质、算法及应用等方面的研究成果及最新进展,特别是总体最小二乘方法在测量数据处理领域的应用及相关算法,展望了总体最小二乘方法在大地测量反演等数据处理领域的算法及应用等问题。

关键词:参数估计;总体最小二乘;系数矩阵;奇异值分解;大地测量反演

中图分类号:P207

在数据处理问题中,将观测数据和模型参数联系起来的数学表达式为函数模型,虽然数据处理问题千差万别,但函数模型却只有线性和非线性两大类,而非线性问题可以通过线性化变成线性模型。数据处理问题最常用、最基本的方法是总体最小二乘(least squares, LS)法,该方法仅考虑观测值的误差;在实际参数估计问题中,对于大部分线性模型来说,一般由于数据采样大小、模型化及测量等原因引起了系数矩阵的误差,其系数阵并非常数阵(如全部由 0 或 1 等常数元素组成的矩阵),而是由其他方法计算得到的具有一定误差的变量矩阵,因此,如何处理系数矩阵和观测向量同时存在的误差,是数据处理领域研究的新课题之一。总体最小二乘(total least squares, TLS)方法是近 30 多年来发展起来的一种能同时顾及观测值误差和模型系数矩阵误差的数学方法,其理论及应用研究是目前国内外研究的热点问题^[1]。

关于 TLS 的研究最早可以追溯到 1877 年 Adcock^[2]研究单变量直线拟合问题,随后,Adcock^[3]、Pearson^[4]、Koopmans^[5]、Madansky^[6]和 York^[7]均发表了相关文献进行研究。这一数据拟合方法最早在统计学领域称为正交回归(orthogonal regression)、变量误差(errors-in-vari-

bles, EIV)和测量误差(measurement errors)等。Sprent^[8]和 Gleser^[9]将该研究扩展到多维变量模型。TLS 的概念是由 Golub 和 van Loan^[10]于 1980 年提出的,随后,由于奇异值分解(singular value decomposition, SVD)这一稳健计算方法的引入和顾及系数矩阵误差的应用领域需求的不断增大,使得 TLS 的研究逐渐得到深入^[11]。

本文从 TLS 解的性质、算法和应用三个方面详细论述了 TLS 研究的主要进展,并对未来的相关研究进行了展望。

1 TLS 解的性质

TLS 解的性质研究主要有:Fuller^[12]研究了 EIV 模型估值的一些性质;Reilly 和 Patino-Leal^[13]基于贝叶斯方法研究了 EIV 模型;Gal-lo^[14]系统性地研究了 EIV 模型估计的性质,得出了 EIV 模型参数 TLS 的一致性估计;van Huffel 和 Vandewalle^[15]从代数学角度研究了 TLS 和 LS 之间的关系,包括它们的解、残差、改正数的关系及在数据拟合和近似空间中的应用,同时,他们还研究了 TLS 问题的统计特性,当观测值和系数矩阵元素在独立、等精度时, TLS 给出了 EIV 参

收稿日期:2013-04-13。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41204003, 41074007, 41021061);国家教育部博士点基金资助项目(20090141110055, 20110141130010);东华理工大学博士科研启动基金资助项目(DHBK201113);江西省数字国土重点实验室开放研究基金资助项目(DLLJ201207)。

数的一致性估计、LS 有偏、TLS 无偏等重要性质^[16];Stoica 和 Viberg^[17]研究了加权最小二乘和总体最小二乘的渐进等价性,即加权 LS 可以得出与 TLS 渐近等价的结果;de Groen^[18]从几何角度比较了 LS 和 TLS 解;Lemmerling 等^[19]研究了约束 TLS 与结构 TLS 的等价性;俞锦成^[20]在 van Huffel 等的多右端 TLS 问题有解的充分条件的基础上进一步研究给出了其必要条件;刘新国^[21]给出了完整的 TLS 可解性分析,建立了 TLS 解的扰动上界;黄开斌和俞锦成^[22]讨论了 TLS 问题的解集与极小范数解;严涛和尤兴华^[23]给出了加权总体最小二乘(weighted TLS, WTLS)问题可解的充分必要条件,并在其可解时,给出了其原始 TLS 解集及极小范数解的显式公式;刘永辉和魏木生^[24]细致分析了 TLS 解集、LS 解集、TLS 极小范数解和 LS 极小范数解之间的差异,比较了它们的残量、加权残量和极小范数修正矩阵;Schuermans 等^[11]研究了 TLS 和极大似然主成分分析的等价性;Nayak 等^[25]比较了 LS、TLS 和 GTLS 及其何时最优的问题;王学锋^[26]给出了 TLS 问题在一般酉不变范数下可解的充分必要条件。

2 TLS 问题的算法

2.1 TLS 问题的基本算法

TLS 问题的计算方法主要分为两大类:基于奇异值分解(SVD)的方法^[10,27]和 Schaffrin 等发展的基于拉格朗日求极值的迭代法^[28-29]。此外,还有从线性回归角度讨论顾及自变量误差的方法^[30]及一些改进算法等^[31-32]。Whittemore^[33]提出了一种利用未观测实际方差的压缩估计和包含方差测量误差的数据来估计回归参数的方法,可以给出经典线性 EIV 模型中斜率参数的一致性估计,并用于非线性回归的广大领域中,前提假设是测量误差是具有未知方差的高斯噪声。这些方法都存在着计算复杂、很难被测量数据处理人员接受等缺点,极大地阻碍了 TLS 方法的应用,因而迫切需要一种易于被人们接受和使用的 TLS 问题计算方法。

2.2 TLS 问题的扩展算法

除了基本的 TLS 问题之外,还发展了一系列的扩展 TLS 问题的方法(见图 1),主要包括观测值与待估参数之间是非线性关系时的非线性总体最小二乘(nonlinear TLS, N-TLS)^[34];系数矩阵的少数列是精确没有误差的,只有部分含有误

差时的混合总体最小二乘(mixed TLS-LS, TLS-LS)^[16];观测值与系数矩阵元素相关(或不相关)、不等精度(或等精度)时的加权总体最小二乘(W-TLS)^[28];元素之间的测量误差大小不同,更一般地,矩阵行与行之间的相关误差方差阵不同,矩阵同一行元素之间是可以相关的,而不同行元素之间是不相关的,权矩阵是一个特殊的分块对角阵时的元素加权总体最小二乘(element-wise-weighted TLS, EW-TLS)^[35];处理混合总体最小二乘与加权总体最小二乘综合问题的广义总体最小二乘(generalized TLS, G-TLS)^[36];观测值与系数矩阵的验前单位权方差不相等,或目标函数中观测值误差与系数矩阵误差所占权重不同的标度总体最小二乘(scaled TLS, S-TLS)^[37];主模型附加等式约束的限制总体最小二乘(restricted TLS, R-TLS)^[38];在 L_p 范数下求解总体最小二乘问题的总体 L_p 近似(total L_p approximations, T- L_p -A)^[39];为了提高总体最小二乘解的稳健性或系数矩阵病态情况下附加正则化准则的正则化总体最小二乘(regularized TLS, RTLS)^[40];主模型附加等式约束或不等式约束,约束矩阵可以是含有误差的随机矩阵的约束总体最小二乘(constrained TLS, C-TLS)^[19];观测值和待估参数都是多元的,即都以矩阵的形式出现在模型中的多元总体最小二乘(multivariate TLS, M-TLS)^[16];系数矩阵病态时,采用截断奇异值求解总体最小二乘问题的截断总体最小二乘(truncated TLS, TTLS)^[41];观测值与系数矩阵组成的增广矩阵的改正数矩阵与该增广矩阵须有相同结构的结构总体最小二乘(structured TLS, STLS)^[42];解不存在时的总体最小二乘问题,即系数矩阵秩亏或方程高度矛盾的非一般总体最小二乘(nongeneric TLS, NTLS)^[43];将部分奇异值分解方法用于总体最小二乘问题的部分总体最小二乘(partial TLS, P-TLS)^[16];解存在但不唯一时的最小范数总体最小二乘问题(minimum norm TLS, MN-TLS)^[16]等。在 TLS 得到广泛研究的同时,EIV 模型^[9,44]以及正交距离回归^[45]的研究也一直未间断,总体最小二乘的求解与降秩问题^[46]的求解是很相近的。Scitovski 和 Jukic^[47]研究了指数函数的 TLS 问题;Markovsky 等^[48]对总体最小二乘的产生、发展及 TLS 的相关文献等进行了详细的论述。

病态情况下,TLS 问题的处理方法主要有正则化方法^[40,49]、截断奇异值分解方法(TS-VD)^[50]、截断总体最小二乘方法(TTLS)^[41]和核心问题转化法^[51]。Lu 等^[52]提出了双正则化

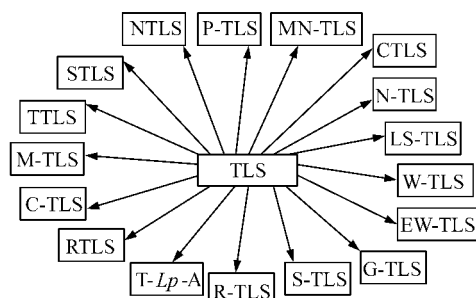


图1 TLS研究扩展图

Fig.1 Extended Figure of TLS Research

TLS(dual regularized TLS)问题,统一了LS、DLS和RTLS问题,给出了求解正则化参数的方法。截断方法的一个关键问题是截断水平的选择,Sima等^[41]研究了TTLS中截断水平的选择,使用了差异原则、 L 曲线法、基于信噪比的方法等。TSVD方法并不适用于所有的病态问题,一般的截断法适用于轻微的病态问题,而且小范数的截断方法因子解并不总是最优值^[41]。

约束情形下,TLS的研究主要有:de Moor^[53]研究了不等式约束的总体线性最小二乘问题;Feng等^[54]研究了TLS在三维激光扫描中的应用,比较了LS、TLS和约束TLS方法,发现与LS和非约束TLS相比,约束TLS可以确定一个更好的转换参数,并能给出更好的拟合效果;Schaffrin^[55]在研究附有随机约束的最小二乘问题的基础上推导了附有随机约束的总体最小二乘求解公式,并得出与特征值问题相同的形式。在线性系统的参数估计中加入线性和二次约束是非常重要的,这些约束可以避免平凡解,减小偏差,保证解的稳定性,对线性系统施加自然结构,并可以加入先验信息等。Schaffrin和Felus^[56]基于拉格朗日方法推导了附有线性和二次约束的TLS问题的求解公式。在这些研究中,约束和主模型都是独立等精度的,并没有考虑加权问题,因此,在实际的数据处理中是不实用的。

标度总体最小二乘(scaled TLS,STLS)方法是一种可以统一TLS方法、LS方法和数据最小二乘(data LS,DLS)方法的一种同时顾及观测值和系数矩阵误差的数据处理方法。在经典总体最小二乘中,目标函数中观测值与系数矩阵元素的相对权比取为1,即是等权比处理的,但是由于观测值与系数矩阵元素的单位权方差并不相等,等权比处理是不合理的,因而Rao^[37]于1997年提出了标度总体最小二乘(scaled TLS),并称之为加权总体最小二乘(WTLS);随后,标度总体最小二乘方法的研究主要集中于标度总体最小二乘问

题的计算方法^[37]、与最小二乘的关系^[57]、扰动分析^[57-58]等。Park和O'Leary^[59]研究了标度总体最小二乘问题,并将之定义为隐含加权总体最小二乘,研究了权比因子的作用及权比因子未知时如何求解总体最小二乘的问题。但正确确定合理的相对权比,并给出有效的计算方法仍然没有彻底解决,因而附有相对权比的总体最小二乘方法是今后研究的一个重要方向^[60]。

3 TLS的应用

TLS的应用领域非常广泛,主要有信号处理^[61]、化学工程^[35]、运动分析^[62]、图像处理^[63]等。TLS自从20世纪80年代以来在数学领域得到广泛的研究,但却很少在大地测量领域应用,并不是大地测量领域不存在系数矩阵含有误差的情况,而是因为TLS复杂的数学公式很难在大地测量领域展开应用;同时,大地测量数据采集过程中往往由于人为误差、仪器误差及精度不同和数据采样误差等原因造成了观测值的强相关性和不等精度等,而已有成熟的TLS方法大都是处理等权、独立情况下的,所以不能直接在大地测量反演问题中应用。由于测量数据处理领域同样存在大量的TLS问题,因而20世纪90年代以来逐渐得到应用,但应用还不是很广泛,并且趋于简单。

在测量领域,国外的研究最早主要是Schaffrin等于2005年开始的,随后,Schaffrin及其合作者进行了一系列的研究,包括给出了基于拉格朗日极值的算法及在坐标转换中的应用等^[28,56];国内的研究主要是简单的应用,即应用SVD法处理等权总体最小二乘问题,最早的是丁克良^[64]对不同情况的曲线拟合同时顾及因变量和自变量的误差,采用正交最小二乘法来拟合曲线,以正交距离残差平方和极小为准则导出了适于间接平差解算的模型和算法。测量领域的TLS研究主要有(见图2)测量学中的水准测量^[65]、克里格插值^[66]、摄影测量中的空间后方交会^[27]、GPS接收机自主完好性监测^[67]、接收机机动的GPS跟踪解算^[68]、基于时差信息^[69]、基于角度信息^[70]、同时基于角度和时差信息^[69]的无源定位、目标几何定位^[71]、天文学中的银河系运动参数估计^[72]、工业测量中的激光扫描^[54]、地震学中的未知地震仪记录的改正^[73]、直线拟合、曲线拟合、平面拟合等^[28-30,65]、坐标转换^[74]、地壳应变参数反演^[75-76]等。这些应用都是系数矩阵比较简单情况,当TLS的理论问题得到解决之后,在大地测量反演

等数据处理问题中将会得到更加广泛的应用。

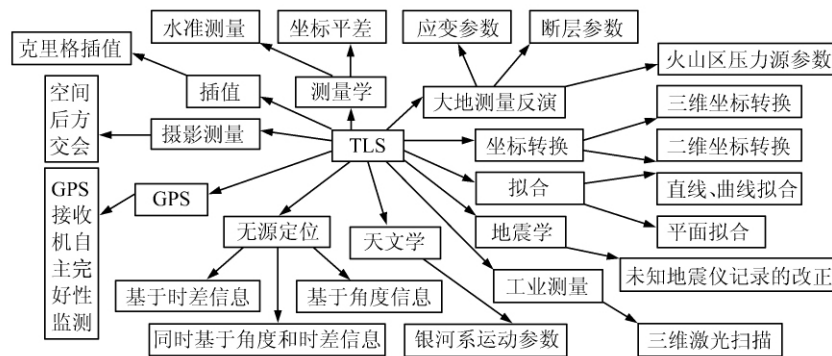


图 2 TLS 测量相关领域的应用研究图

Fig. 2 TLS Application Research Figure on Surveying

4 TLS 研究展望

目前,几乎所有关于 TLS 性质的研究都是复杂的纯数学讨论,从大地测量数据处理的角度详细推导并证明 TLS 解的性质的文献较少, TLS 方法的适用性等问题还需要进一步的研究。大地测量数据处理包括两个重要的任务:参数估计和精度评定。误差传播是测量数据处理中精度评定的重要依据,而 TLS 的误差传播定律在国内外已有文献中鲜有涉及,因此, TLS 的误差传播定律的研究也非常必要。

LS 的扰动分析得到了广泛研究,并形成了成熟的理论,而关于 TLS 的扰动分析的研究不是很多,主要有 TLS 问题的统计特性和解扰动的上限值的研究;基于标度 TLS 解存在且唯一的 Golub-Van Loan 条件下的标度 TLS 问题的扰动分析等。因为 TLS 及标度 TLS 问题并没有 LS 问题那样简单的范数表示的条件数,而分量条件数考虑了数据分量之间的关系,所以标度 TLS 问题的扰动分析是基于分量条件数的,而且由标度 TLS 问题的条件数可以得到 TLS 问题的条件数^[58]。标度 TLS 扰动分析的研究^[58]所给出的条件数是整个标度 TLS 问题的,从数值分析的角度进行扰动分析研究一般具有简单、直接的优点,进一步从测量数据处理和数值分析的角度研究 TLS 的扰动分析对于在测量数据处理领域深入认识和使用该方法具有重要的理论意义。

目前,已有的 TLS 研究大都是基于观测值与系数矩阵元素之间是独立的,或仅考虑等权的情况,或观测值与系数矩阵元素独立、分别加权时仅考虑系数矩阵元素行与行之间是相关的而列不相关的加权情况,即 EW-TLS。但是在实际的数据

处理和参数估计问题中,加权都是非常复杂的,模型中观测值与系数矩阵元素是相关的,且都是不等精度的,因此,如何处理这种情况下的 TLS 问题是一个亟待解决的重要问题。标度 TLS 方法最早由 Rao 于 1997 年提出,已有的标度 TLS 的算法主要是基于奇异值分解的方法,而且处理的大都是观测值与系数矩阵元素等精度、独立情况下的标度 TLS 问题,关于如何选取标度因子(相对权比)的研究相对较少^[60]。

通常情况下,会有反演问题的一些先验信息,如有关断层的几何参数、地下介质速度的信息等。如何合理正确地应用这些先验信息将对反演过程起着重要作用,因为先验信息的约束对于反演不唯一的问题可以提供很好的约束,同时能提高反演速度。先验信息的表达方式有等式约束和不等式约束等^[77]。当反演问题需要顾及系数矩阵误差,且先验信息十分明确时,需要采用附有等式或不等式约束的基于 TLS 的反演方法。目前,附有等式约束的 TLS 问题的研究主要是观测值和系数矩阵元素等权、独立的情况^[56]; Tong Xiaohua 等^[78]虽然给出了加权情况下的附有等式约束的 TLS 方法,但是该方法是将等式约束直接写进主模型后再加权计算的。已有研究^[79]发现,等式约束反演的两种目标函数构造方法(将等式约束直接写进主模型和拉格朗日求极值)在最终的反演中会得出相差较大的结果,主要原因是等式约束条件在反演中所起的作用不同而导致的。由于约束条件仅能当作一种先验信息或限制条件使用,其与主模型(反演模型)同等对待(直接写进主模型)的解法^[78]是不合理的,因此,在等式约束反演中,建议使用拉格朗日法来构建目标函数进行求解;加权情况下附有等式约束的 TLS 问题需要进一步的研究。

由于观测数据的不足以及对研究对象物理机制了解不够,因此大地测量反演常常出现病态问题,而且在控制网平差、GPS快速定位及重力场向下延拓等数据处理中也存在大量的病态问题。当系数阵病态时,普通 TLS 将得不到稳定的解,且估值的均方误差也较大,因而必须针对系数矩阵的病态性进行处理,这就需要一种稳健的病态 TLS 解算方法。在等权条件下,病态 TLS 模型的研究都是基于正则化方法的,且都没有考虑加权问题。截断奇异值方法是处理病态问题最常用的方法之一,观测值与系数矩阵元素独立且等精度情况下的 TLS 病态问题可以通过截断奇异值方法很好地解决,其中最关键的因素是截断水平的选择,而应用于 LS 病态问题的 L 曲线法、AIC (Akaike's information criterion) 准则等可以直接用于选择合适的截断水平^[41]。但是,观测值与系数矩阵元素相关加权情况下的病态性问题^[80]是大地测量数据处理中最普遍的问题,求解该问题的严密算法是今后研究的一个重要方向。

大地测量反演问题是大地测量学科深入地学研究领域的核心问题之一。随着大地测量学以及地球物理学、地震学、地质学、海洋学等的发展,各种高精度、高分辨率数据的获得成为可能。在地壳应变参数反演、地震断层参数反演、火山区地壳形变、地震滑动分布反演等大地测量反演问题中,存在着大量的系数矩阵存在误差的问题,这些问题的有效解决都可以借助 LS 方法得以完成。深入研究 TLS 方法在大地测量反演等大地测量数据处理领域的应用,可以进一步完善测量数据处理理论体系,获取更加合理的参数结果,提高地球物理解释的真实性和有效性,进而推动大地测量在地球物理等领域的研究。

参 考 文 献

- [1] 王乐洋. 基于总体最小二乘的大地测量反演理论及应用研究[J]. 测绘学报, 2012, 41(4):629
- [2] Adcock R. Note on the Method of Least Squares [J]. Analyst, 1877(4): 183-184
- [3] Adcock R. A Problem in Least Squares[J]. Analyst, 1878(5): 53-54
- [4] Pearson K. On Lines and Planes of Closest Fit to Points in Space[J]. Philos Mag, 1901(2):559-572
- [5] Koopmans T C. Linear Regression Analysis of Economic Time Series[M]. de Erven F, Bohn N V. Nederlands Ecdnomisch Instituut,1937
- [6] Madansky A. The Fitting of Straight Lines When Both Variables are Subject to Error[J]. J Amer Statist Assoc, 1959, 54: 173-205
- [7] York D. Least Squares Fitting of a Straight Line [J]. Can J Phys, 1966, 44: 1 079-1 086
- [8] Sprent P. Models in Regression and Related Topics [M]. Elizabeth;Methuen & Co Ltd, 1969
- [9] Gleser L J. Estimation in a Multivariate 'Errors in Variables' Regression Model; Large Sample Results [J]. Ann Statist, 1981, 9(1): 24-44
- [10] Golub G H, van Loan C F. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. SIAM J Numer Anal, 1980,17: 883-893
- [11] Schuermans M, Markovsky I, Wentzell P D, et al. On the Equivalence Between Total Least Squares and Maximum Likelihood PCA[J]. Anal Chim Acta, 2005, 544: 254-267
- [12] Fuller W A. Properties of Some Estimators for the Errors-in-Variables Model[J]. Ann Statist, 1980, 8 (2): 407-422
- [13] Reilly P M, Patino-Leal H. A Bayesian Study of the Error-in-Variables Model [J]. Technometrics, 1981, 23(3): 221-231
- [14] Gallo P P. Properties of Estimators in Errors in Variables Model[D]. NC:University of North Carolina, 1982
- [15] van Huffel S, Vandewalle J. Algebra Connection Between the Least Squares and Total Least Squares Problems[J]. Numerical Math, 1989, 55: 431-449
- [16] van Huffel S, Vandewalle J. The Total Least Squares Problem; Computational Aspects and Analysis[D]. Philadelphia;SIAM, 1991
- [17] Stoica P, Viberg M. Weighted LS and TLS Approaches Yield Asymptotically Equivalent Results [J]. Signal Processing, 1995, 45: 255-259
- [18] de Groen P. An Introduction to Total Least Squares [J]. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1996,14: 237-253
- [19] Lemmerling P, de Moor B, van Huffel S. On the Equivalence of Constrained Total Least Squares and Structured Total Least Squares[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(11): 2 908-2 911
- [20] 俞锦成. 关于整体最小二乘问题的可解性[J]. 南京师大学报(自然科学版), 1996, 19(1): 13-16
- [21] 刘新国. 关于 TLS 问题的可解性及扰动分析[J]. 应用数学学报, 1996, 19: 254-262
- [22] 黄开斌, 俞锦成. 整体最小二乘问题的解集与极小范数解[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 1997, 20(4): 1-5
- [23] 严涛, 尤兴华. 加权总体最小二乘问题的可解性及其原始解集[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 2001, 24(3): 10-17

- [24] 刘永辉, 魏木生. TLS 和 LS 问题的比较[J]. 计算数学, 2003, 25(4): 479-492
- [25] Nayak A, Trucco E, Thacker N A. When are Simple LS Estimators Enough? An Empirical Study of LS, TLS, and GTLS[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 68(2): 203-216
- [26] 王学锋. 整体最小二乘和 KKT 系统[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2007
- [27] 陈义, 陆珏, 郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(12): 1 271-1 274
- [28] Schaffrin B, Wieser A. On Weighted Total Least-Squares Adjustment for Linear Regression [J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7): 415-421
- [29] 鲁铁定, 宁津生. 总体最小二乘平差理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2011
- [30] 鲁铁定, 陶本藻, 周世健. 基于整体最小二乘法的线性回归建模和解法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(5): 504-507
- [31] 邱卫宁, 齐公玉, 田丰瑞. 整体最小二乘求解线性模型的改进算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(6): 708-710
- [32] 孔建, 姚宜斌, 吴寒. 整体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(6): 711-714
- [33] Whittemore A S. Errors-in-Variables Regression Using Stein Estimates[J]. The American Statistician, 1989, 43(4): 226-228
- [34] Jukic D, Scitovski R, Spah H. Partial Linearization of One Class of the Nonlinear Total Least Squares Problem by Using the Inverse Model Function[J]. Computing, 1999, 62: 163-178
- [35] Schuermans M, Markovsky I, van Huffel S. An Adapted Version of the Element-wise Weighted TLS Method for Applications in Chemometrics[J]. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 2007, 85: 40-46
- [36] van Huffel S, Vandewalle J. Analysis and Properties of the Generalized Total Least Squares Problem $\mathbf{AX} \approx \mathbf{B}$ When Some or All Columns in \mathbf{A} are Subject to Error[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1989, 10(3): 294-315
- [37] Rao B D. Unified Treatment of LS, TLS and Truncated SVD Methods Using a Weighted TLS Framework[C]. van Huffel S. Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors-in-Variables Modelling. Philadelphia PA: SIAM Publications, 1997
- [38] van Huffel S, Zha H. The Restricted Total Least Squares Problem: Formulation, Algorithm and Properties[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1991, 12: 292-309
- [39] Watson G A. Numerical Methods for Linear Orthogonal L_p Approximation[J]. IMA J Numer Anal, 1982, 2: 275-287
- [40] Renaut R A, Guo H. Efficient Algorithms for Solution of Regularized Total Least Squares[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2005, 26: 457-476
- [41] Sima D M, van Huffel S. Level Choice in Truncated Total Least Squares[J]. Comput Stat Data Anal, 2007, 52(2): 1 103-1 118
- [42] de Moor B. Structured Total Least Squares and L_2 Approximation Problems[J]. Linear Algebra Appl, 1993, 188/189: 163-207
- [43] van Huffel S, Vandewalle J. Analysis and Solution of the Nongeneric Total Least Squares Problem[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1988, 9: 360-372
- [44] Jukic D, Markovic D. On Nonlinear Weighted Errors-in-Variables Parameter Estimation Problem in the Three-Parameter Weibull Model[J]. Appl Math Comput, 2010, 215: 3 599-3 609
- [45] Nievergelt Y. Total Least Squares: State of the Art Regression in Numerical Analysis [J]. SIAM Review, 1994, 36: 258-264
- [46] Markovsky I. Structured Low-Rank Approximation and Its Applications [J]. Automatica, 2008, 44: 891-909
- [47] Scitovski R, Jukic D. Total Least Squares Problem for Exponential Function[J]. Inverse Probl, 1996, 12: 341-349
- [48] Markovsky I, van Huffel S. Overview of Total Least Squares Methods [J]. Signal Processing, 2007, 87: 2 283-2 302
- [49] Lampe J, Voss H. A Fast Algorithm for Solving Regularized Total Least Squares Problems[J]. Electron Trans Numer Anal, 2008, 31: 12-24
- [50] 王晓陵. 长记录和病态 TLS 问题的处理方法[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1987, 8(2): 12-23
- [51] Paige C C, Strakoš Z. Core Problems in Linear Algebraic Systems[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2006, 27(3): 861-875
- [52] Lu S, Pereverzev S V, Tautenhahn U. Dual Regularized Total Least Squares and Multi-parameter Regularization [J]. Comput Meth Appl Math, 2008, 8: 253-262
- [53] de Moor B. Total Linear Least Squares with Inequality Constraints[R]. ESAT-SISTA Report 1990-02, Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1990
- [54] Feng Xi, Nanoo D, Knopf G. Total Least-Squares Methods for Active View Registration of Three-Dimensional Line Laser Scanning Data[J]. Transac-

- tions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2005, 127: 50-56
- [55] Schaffrin B. A Note on Constrained Total Least-Squares Estimation[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 417: 245-258
- [56] Schaffrin B, Felus Y A. An Algorithmic Approach to the Total Least-Squares Problem with Linear and Quadratic Constraints [J]. Studia Geophysica et Geodaetica, 2009, 53(1):1-16
- [57] Xu Wei, Qiao Sanzheng, Wei Yimin. A Note on the Scaled Total Least Squares Problem[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008,428: 469-478
- [58] Zhou Liangmin, Lin Lijing, Wei Yimin, et al. Perturbation Analysis and Condition Numbers of Scaled Total Least Squares Problems [J]. Numer Algorithms, 2009, 51: 381-399
- [59] Park S, O'Leary D P. Implicitly-Weighted Total Least Squares[J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435 (3): 560-577
- [60] 王乐洋, 许才军. 附有相对权比的总体最小二乘平差方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36 (8): 887-890
- [61] Schuermansa M, Lemmerlinga P, de Lathauwera L, et al. The Use of Total Least Squares Data Fitting in the Shape-from-Moments Problem[J]. Signal Processing, 2006, 86:1 109-1 115
- [62] Sühling M. Myocardial Motion and Deformation Analysis from Echocar Diograms [D]. Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology Lausanne (EPFL), 2006
- [63] 杨鸿森. 基于总体最小二乘的红外图像去噪[J]. 激光与红外, 2008, 38(9): 961-964
- [64] 丁克良. 整体最小二乘理论及其在测量数据处理中的若干应用研究[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所, 2006
- [65] Kupferer S. Application of the Total Least-Squares Technology with Geodetic Problem Definitions[D]. Karlsruhe:University of Karlsruhe, 2005
- [66] Felus Y A, Schaffrin B. A Total Least-Squares Approach in Two Stages for Semivariogram Modeling of Aeromagnetic Data[C]. IAMG2005, Toronto, 2005
- [67] 杨永波, 刘峻宁, 张黎. 基于总体最小二乘法的 RAIM 算法研究[J]. 城市勘测, 2009(6): 55-57
- [68] 汤卉, 王大鸣, 胡捍英. 一种结合 UKF 与 TLS 的 GPS 机动跟踪算法[J]. 测绘科学, 2007, 32(6): 99-101
- [69] 王鼎, 吴瑛, 田建春. 基于总体最小二乘算法的多站无源定位[J]. 信号处理, 2007, 23(4): 611-614
- [70] 王鼎, 张莉, 吴瑛. 基于角度信息的结构总体最小二乘无源定位算法[J]. 中国科学(F 辑), 2009, 39 (6): 663-672
- [71] Dogancay K. Reducing the Bias of a Bearings-only TLS Target Location Estimator Through Geometry Translations[C]. The 12th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2004, Vienna, Austria, 2004
- [72] Branham R L J R. Astronomical Data Reduction with Total Least Squares[J]. New Astronomy Reviews, 2001,45: 649-661
- [73] Chanerley A A, Alexander N A. Using the Total Least Squares Method for Seismic Correction of Recordings from Unknown Instruments[J]. Advances in Engineering Software, 2008, 39: 849-860
- [74] Neitzel F. Generalization of Total Least-Squares on Example of Unweighted and Weighted 2D Similarity Transformation[J]. J Geod, 2010,84(12): 751-762
- [75] 王乐洋, 许才军, 鲁铁定. 边长变化反演应变参数的总体最小二乘方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(2): 181-184
- [76] Xu Caijun, Wang Leyang, Wen Yangmao, et al. Strain Rates in the Sichuan-Yunnan Region Based upon the Total Least Squares Heterogeneous Strain Model from GPS Data[J]. Terr Atmos Ocean Sci, 2011, 22(2): 133-147
- [77] 王乐洋, 许才军, 汪建军. 附有病态约束矩阵的等式约束反演问题研究[J]. 测绘学报, 2009, 38(5): 397-401
- [78] Tong Xiaohua, Jin Yanmin, Li Lingyun. An Improved Weighted Total Least Squares Method with Applications in Linear Fitting and Coordinate Transformation[J]. Journal of Surveying Engineering, 2011, 137(4): 120-128
- [79] 王乐洋, 许才军. 等式约束反演与联合反演的对比研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2009, 29(1): 74-78
- [80] 王乐洋, 许才军, 鲁铁定. 病态加权总体最小二乘平差的岭估计解法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(11): 1 346-1 350

第一作者简介:王乐洋,博士,讲师。主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。

E-mail:wleyang@163.com

(下转第 878 页)

Voxels and the Construction of a Virtual Geographic Environment

JIANG Bingchuan^{1,2} YOU Xiong¹ XIA Qing¹ TIAN Jiangpeng¹

(1 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University,

66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

(2 61363 Troops, Xi'an 710054, China)

Abstract: A Virtual Geographical Environment is the expression and simulation of a geographical environment. It not only includes the simulation of the terrain surface information, but includes natural phenomena geospatial and processing simulation. 3D terrain visualization is an indispensable part of Virtual Geographic Environment. Due to the nature of two-dimensional features it is difficult, to realistically simulate real three-dimensional volumes based on the traditional "Face model" typically used to build a virtual geographic environment. In this paper, we fully explore the basic concepts of voxels and features, based on the analysis of several common voxel models. We focus on the voxels in a virtual three-dimensional topography of the geographical environment for the simulation of natural phenomena, geographical expression of the process, spatial analysis based on geographic environment and applications. The virtual geographic environment based on "volume model" is discussed.

Key words: voxel; virtual geographic environment; octree; Marching Cubes algorithm

About the first author: JIANG Bingchuan, Ph. D candidate. His major research is virtual reality and battle environment simulation.

E-mail: sunnybc021@yahoo.com.cn

.....
(上接第 856 页)

Progress in Total Least Squares

WANG Leyang^{1,2,3} XU Caijun²

(1 Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, 418 Guanglan Road, Nanchang 330013, China)

(2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(3 Jiangxi Province Key Lab for Digital Land, 56 Xuefu Road, Fuzhou 344000, China)

Abstract: The achievements and new progresses in the estimation properties, algorithms, and applications of total least squares in the recent decade are summarized in this paper. Related algorithms and applications of total least squares for processing surveying data are discussed. Moreover, the prospects for algorithms and application of total least squares in geodetic inversion are discussed.

Key words: parameter estimation; total least squares; coefficient matrix; singular value decomposition; geodetic inversion

About the first author: WANG Leyang, Ph. D, lecturer. His interests include geodetic inversion and geodetic data processing.

E-mail: wleyang@163.com