第 38 卷 第 5 期
2013 年 5 月

武 汉 大 学 学 报 · 信 息 科 学 版
Geomatics and Information Science of Wuhan University

Vol. 38 No. 5
May 2013

文章编号:1671-8860(2013)05-0580-04　　　　文献标志码:A

方差分量估计的通用公式

赵　俊[1]　郭建锋[1,2]

(1　信息工程大学理学院,郑州市科学大道 62 号,450001)
(2　中国科学院测量与地球物理研究所,武汉市徐东大街 340 号,430077)

摘　要:应用最小二乘原理将方差分量估计公式从参数平差模型推广到概括函数平差模型。通过选取恰当的权阵,基于概括函数模型的最小范数二次无偏估计及赫尔默特法得到的公式均是本文的特例。视协方差矩阵为权逆阵,得到了最小方差估计,并证明了该公式与最优二次无偏估计的通用公式等价,从而表明最优二次无偏估计和极大似然估计的通用公式也是本文的特例。除此之外,本文还给出了最小二乘方差分量估计的简化公式,并对其进行了扩展。最小二乘方差分量估计的假设检验理论同样得到了推广。

关键词:最小二乘方差分量估计;最小范数二次无偏估计;最优不变二次无偏估计;赫尔默特法;极大似然估计;简化公式

中图法分类号:P207

最近几十年,方差分量估计方法得到了广泛而又深入的研究[1-10]。其中 Teunissen[3] 提出的最小二乘方差分量估计(least-squares variance component estimation ,LS-VCE),基于最小二乘估计准则,从函数模型推广到随机模型,统一了估计原则,便于理解和操作。随后 Amiri-Simkooei[4] 对其相关理论进行了完善,并应用到 GPS 数据处理中[5]。

於宗俦提出了概括函数平差模型[6],随后在该模型的基础上,运用各种方法推导了方差分量估计通用公式。本文基于该模型,运用 LS 原理,得到了一般化公式,并给出了统计检验量的通用公式;另一方面,给出了 LS-VCE 的简化公式,并对其进行了拓展。通过选取合理的权阵,Amiri-Simkooei[4] 证明了最小范数二次无偏估计(MINQUE),得出了极大似然估计(maximum likelihood estimation, MLE)公式的特例。因而易知,MINQUE 的通用计算公式[7] 也是本文的特例。将协方差矩阵当作权逆阵,得到最小方差估计,并证明了该公式与最优线性无偏估计(BIQUE)的通用公式[8-9] 等价,表明它也是本文的特例,同时也说明基于概括函数平差模型的赫尔默特(Helmert)[11] 公式和 MLE[12] 公式均是本文的特例。本文给出了几乎所有方差分量方法的统一理论,相比其他方法的方差分量通用计算公式推导而言,LS 方法过程简单,易于理解,具有较强的应用价值[4,13]。

1　模型描述

1.1　含未知参数的条件平差模型[14]

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B\varepsilon} = \boldsymbol{f} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{W} \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $k\times u$ 和 $k\times n$ 设计矩阵($n>k>u$);$\boldsymbol{X}$ 为 $u\times 1$ 未知参数向量;$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 $n\times 1$ 误差向量;$\boldsymbol{f}$ 为 $k\times 1$ 已知向量;$\boldsymbol{Q}$ 为 $n\times n$ 正定协方差矩阵;$\boldsymbol{W}$ 为观测量的权阵。这里设 $\boldsymbol{Q}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{Q}_i$,$\boldsymbol{Q}_i$($i=1,\cdots,s$)为正定或半正定协因子阵,$\sigma_i^2$($i=1,\cdots,s$)为待估的方差分量,此处 s 表示方差分量的个数。为讨论方便,引入记号 $\boldsymbol{\theta}=(\sigma_1^2\ \sigma_2^2\cdots\ \sigma_s^2)^{\mathrm{T}}$。

1.2　概括函数平差模型[15]

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B\varepsilon} = \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{CX} = \boldsymbol{f}_X \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0\ ,\ E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q} \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2013-03-27。
项目来源:国家 973 计划资助项目(2012CB825604);国家自然科学基金资助项目(40874007,41004005)。

式中，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times u(u>m)$ 的已知矩阵；$\boldsymbol{f}_X$ 为 $m\times 1$ 的已知向量，其他参数要求同模型(1)。

2　基于 LS 原理的方差分量通用公式

2.1　模型(1)的公式推导

由式(1)不难得到：

$$E\{(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{AX})(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}\}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

令 $\boldsymbol{Z}$ 为 $k\times(k-u)$ 列满秩矩阵，满足 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=0$。

对上式两边左乘 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$ 和右乘 $\boldsymbol{Z}$，则式(3)转换为：

$$E\{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f})^{\mathrm{T}}\}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z} \tag{4}$$

令 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$，并对式(4)作 vh 变换，即取出对称矩阵的上三角元素，按照相应的顺序构成一个列向量。于是，式(4)转换为：

$$E\{\mathrm{vh}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}})\}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}\theta\ ,\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}} \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{vh}=[\mathrm{vh}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})\ \mathrm{vh}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})\ \cdots\ \mathrm{vh}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{Z})]$。当权阵选取为 $\boldsymbol{W}_{vh}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_t\otimes\boldsymbol{W}_t)\boldsymbol{D}$[4] 的时候，该方差分量估计公式与 MINQUE 等价[4]，$\boldsymbol{W}_t$ 为 $\boldsymbol{t}$ 的权阵，$\boldsymbol{D}$ 为列满秩阵且满足 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{D}\mathrm{vh}(\boldsymbol{M})$，其中 $\boldsymbol{M}$ 是任意一个对称矩阵，vec 为拉直变换算子[16]。

由 LS 原理，有：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}})^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}}\mathrm{vh}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}) \tag{6}$$

令 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}=(n_{kj})$，$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}}\mathrm{vh}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{l}_k$，则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_{kj}&=\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{W}_t\otimes\boldsymbol{W}_t]\cdot\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{+}\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})=\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}}\cdot\\ &[\boldsymbol{W}_t\otimes\boldsymbol{W}_t]\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z})=\\ &\mathrm{tr}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_t)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_k&=\mathrm{tr}[\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{W}_t]=\\ &\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{W}_t\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{t}\end{aligned} \tag{8}$$

当矩阵 Z 未知时，可通过如下等式：

$$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W})=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R} \tag{9}$$

得到关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的方差分量计算公式：

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{l}_k=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}\boldsymbol{f} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{W}$ 为模型(1)中观测量的权阵；$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$ 为平差因子阵[17]，具有如下性质

$$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}=0$$

2.2　模型(2)的方差分量估计公式

由于模型(2)中含约束条件，很难像通常一样运用 LS 原理，最自然的想法就是对其进行变换，转化成模型(1)，就可以直接运用 §2.1 的结论得到基于概括函数模型的通用公式。

模型(2)中约束条件是由于参数之间不独立而产生的[8]，于是，可设在 u 个参数中有$(u-m)$个的独立的函数。不失一般性，设 $u_1=u-m$，表示为独立参数的个数，并记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1\quad\boldsymbol{A}_2]$，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}\quad\boldsymbol{C}_2]$，$\boldsymbol{C}_2$ 为 m 阶可逆矩阵[9]。于是对模型(2)作如下分解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}1}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{f}_X\end{cases} \tag{12}$$

通过式(12)中第二式可以得到：

$$\boldsymbol{X}_2=-\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}1}+\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{f}_X \tag{13}$$

将其带入到式(12)中第一式即得：

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\boldsymbol{f}} \tag{14}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}$，$\bar{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{f}_X$。

由 LS 原理[15]：

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{Q}_A\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_a^{-1}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{N}_b^{-1}\ C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_c^{-1}\boldsymbol{f}_X \tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{N}_a=\boldsymbol{W}^{-1}$，$\boldsymbol{W}$ 为权阵，$\boldsymbol{N}_b=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_a^{-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{N}_c^{-1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_b^{-1}\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_A=\boldsymbol{N}_b^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_c^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_b^{-1})$，并有关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{A}}]^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$。

设 $\lambda=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}}$，利用 §2.1 的结论，于是关于 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵的 LS-VCE 的通用公式为：

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{l} \tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{n}_{kj})$，它的第$(k,j)$元素为：

$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_\lambda\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}Z\boldsymbol{W}_\lambda)$，$\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{l}_k)$，$\boldsymbol{l}_k=\lambda^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{W}_\lambda\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}_\lambda\lambda$，$\boldsymbol{W}_\lambda$ 为 λ 的权阵。同理，可以得到关于设计阵的 LS-VCE 的通用公式为：

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{l} \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{n}_{kj})$，$\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{l}_k)$，法矩阵第$(k,j)$个元素为：

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}],$$

$\boldsymbol{l}_k=\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}\bar{\boldsymbol{f}}$。容易证明 $\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}=\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}\ [\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{A}}]^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$ 是投影阵，具有平差因子阵的性质。运用相关等式，得到如下公式：

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_A\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_A],$$

$\boldsymbol{l}_k=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{WBV}$，这里 $\boldsymbol{R}_A=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{V}$ 为残差。

2.3　最小方差估计公式

在线性 Gauss-Markov 模型中，把观测值的协因子阵当作权逆阵，可以得到最优线性无偏估计(BLUE)。同理，当观测量服从正态分布时，把权阵取为 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$，可以得到最小方差分量估计。其计算公式中法矩阵和右端项变为：

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{n}_{kj}),\boldsymbol{l}=(l_k),\text{其中}$$

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{R}_{\bar{A}}\boldsymbol{BQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot \boldsymbol{R}_{\bar{A}}]l_k=\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_{\bar{A}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{R}_{\bar{A}}\bar{\boldsymbol{f}},$$

$\boldsymbol{R}_{\bar{A}}=\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}]^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}$，为平差因子阵。运用如下等式，

$$\boldsymbol{R}_{\bar{A}}\boldsymbol{BV}=\boldsymbol{R}_{\bar{A}}\bar{\boldsymbol{f}}=\bar{\boldsymbol{f}}-\bar{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{X}}_1=\boldsymbol{BV}$$

可以得到方差分量的另外一个表达式，相应的法矩阵和右端项为 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{n}_{kj})$，$\boldsymbol{l}=(l_k)$，其中

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{BQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}],$$

$$\boldsymbol{l}_k=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{AV}$$

$$\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AQ}_{\hat{X}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

式中，$\boldsymbol{AQ}_{\hat{X}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}]^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，具体关于该模型的未知参数估值求解见文献[6,8]。该公式与於宗俦的 BIQUE 的通用公式是等同的，同时也说明了该公式推导的合理性。与此同时，也证明了 Helmert 和 BIQUE 之间的等价性[8]，综上所述，Helmert 和 MLE 均是上述公式的特例。

2.4 精度评定

LS 的一个优势是法矩阵的逆矩阵即为估值的协方差矩阵。对于 LS-VCE，该原则同样适用。于是方差分量的协方差矩阵为：

$$\mathrm{var}(\hat{\theta})=\boldsymbol{N}^{-1}\tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}_{kj}$，$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}\cdot\boldsymbol{BQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}]$。

2.5 残差二次型

仿照一般 LS 残差二次型的求法，并结合上述部分结论，易知相对应模型(1)的残差二次型为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{vh}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{vh}}=[\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{e}}]^2-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{l}\tag{19}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{Rl}$，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WA})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$。这里的 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{l}$ 分别如式(10)和式(11)所示；同理，相应地，模型(2)的残差二次型为仍为式(19)，但其中 $\hat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}=\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$。这里的 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{l}$ 对应于式(17)。

2.6 统计检验量

函数模型中，针对粗差的检验量，Baarda 构造了 w 统计量[17]。同样可以对协方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_Z$ 进行数据探测，进而得到相应的 w 统计量，于是可构造如下假设

$$H_0:\boldsymbol{Q}_Z=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}$$

$$H_1:\boldsymbol{Q}_{C_Z}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{C}_Z\nabla,\nabla\neq 0\tag{20}$$

式中，$\boldsymbol{C}_Z=\boldsymbol{C}_i c_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}$，$i\neq j$，$\boldsymbol{C}_i=(0\cdots1\cdots0)^{\mathrm{T}}$，$\nabla$ 为常量[4]，这里权阵取为 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}$，基于上述假设可得如下 w 统计量：

$$\boldsymbol{w}_{ij}=\frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1}(\boldsymbol{C}_Z-[\boldsymbol{g}_k^{(ij)}\boldsymbol{n}_{kl}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}])\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\lambda}{[(\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\boldsymbol{C}_i)^2+\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\boldsymbol{C}_i*\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\boldsymbol{C}_j-\boldsymbol{g}^{(ij)\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{g}^{(ij)}]^{1/2}}\tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{g}_k^{ij}=\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZQ}_Z^{-1}\boldsymbol{C}_j$；$\boldsymbol{g}^{ij}=[g_1\ g_2\cdots g_s]$；$\boldsymbol{g}_k=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_Z\boldsymbol{Q}_Z^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Z^{-1})$。

$\boldsymbol{N}$ 由式(16)给出。同样可以求出关于 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的 w 统计量，首先构造相应假设检验

$$H_0:\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{BQ}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

$$H_1:\boldsymbol{Q}_{C_{\bar{f}}}=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2\boldsymbol{BQ}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\bar{f}}\nabla,\nabla\neq 0$$

式中，$\boldsymbol{C}_{\bar{f}}=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}$，$i\neq j$，$\boldsymbol{C}_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，则 w 统计量转换为：

$$w=\frac{w^n}{w^d}=\frac{\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}^{-1}R(\boldsymbol{C}_{\bar{f}}-[\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{n}_{kj}^{-1}\boldsymbol{BQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}])\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}^{-1}R\bar{\boldsymbol{f}}}{[(c_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}^{-1}\boldsymbol{RC}_j)^2-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{g}]^{1/2}}\tag{22}$$

式中，$\boldsymbol{g}_k=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_{\bar{f}}\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}^{-1}\boldsymbol{RBQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\bar{f}}^{-1}\boldsymbol{R})$；$\boldsymbol{g}=[g_1\ g_2\cdots g_s]$，其他参数要求服从式(17)。具体关于间接平差模型下的 w 统计量的推导可参见参考文献[4]。

3 LS-VCE 的通用简化公式

仿照 Helmert 简化公式的基本思想，给出了最小二乘方差分量估计的简化计算公式，式(17)中的元素为 $\boldsymbol{N}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{n}_k)$，$\boldsymbol{l}=(l_k)$，$\boldsymbol{n}_k=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZW}_{\lambda}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZW}_{\lambda})$，$\boldsymbol{l}_k$ 与式(16)中相同。同样，可以给出式(17)的简化公式：

$$\boldsymbol{n}_k=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}]\tag{23}$$

当 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}$，式(23)变为：

$$\boldsymbol{n}_k=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BQB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp}]\tag{24}$$

其他变量跟上述相同。

4 LS-VCE 的特殊形式

1) 当 $\boldsymbol{C}=0$ 时，模型(2)退化为模型(1)，则 LS-VCE 的计算公式变为：

$$\boldsymbol{n}_{kj}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WRBQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WR}]\tag{25}$$

$$\boldsymbol{l}_k=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WBQ}_k\boldsymbol{BWRf}\tag{26}$$

这与§2.1的结论一致，同样证明了该结论的正确性。

2) 当 $\boldsymbol{C}=0$ 和 $\boldsymbol{A}=0$，式(2)简化为条件平差模型，LS-VCE 的计算公式变为：

$$\boldsymbol{n}_{kj} = \mathrm{tr}[\boldsymbol{BQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WBQ}_j\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}] \tag{27}$$

$$\boldsymbol{l}_k = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WBQ}_k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wf} \tag{28}$$

3）当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$,式(2)简化为附有限制条件的间接平差模型,LS-VCE 的计算公式为：

$$\boldsymbol{n}_{kj} = \mathrm{tr}[\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}] \tag{29}$$

$$\boldsymbol{l}_k = \bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\bar{A}}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WQ}_k\boldsymbol{WP}_{\bar{A}}^{\perp}\bar{\boldsymbol{f}} \tag{30}$$

4）当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时,式(2)变为间接参数平差模型,LS-VCE 的计算公式为：

$$\boldsymbol{n}_{kj} = \mathrm{tr}[\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{WRQ}_j\boldsymbol{WR}] \tag{31}$$

$$\boldsymbol{l}_k = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WQ}_k\boldsymbol{WRf} \tag{32}$$

该公式即为 Amiri-Simkooei 所给出的公式[4,13]。

5　结　语

本文以概括函数模型为基础,运用 LS 原理,给出了部分方差分量估计方法的通用公式。相比其它方法的推导而言,LS 方法简单、易懂。另一方面,通过选取合适的权阵,基于概括函数平差模型的 MINQUE、Helmert、BIQUE 及 MLE 的通用计算公式均是本文的特例。同时,也给出 LS-VCE 的简化公式,并对其进行了推广,其假设检验理论也得到了扩展。

参　考　文　献

[1] 杨元喜，徐天河. 基于移动开窗法协方差估计和方差分量估计的自适应滤波[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2003，28(6)：714-717

[2] 徐天河,居向明. 基于方差分量估计的 CHAMP 重力场恢复方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2007，32(3)：242-250

[3] Teunissen P J G. Towards a Least-Squares Framework for Adjusting and Testing of both Functional and Stochastic Models[R]. Delft University of Technology，Netherland，1988

[4] Amiri-Simkooei A R. Least-Squares Variance Component Estimation：Theory and GPS Applications[D]. Netherland：Delft University of Technology，2006

[5] Amiri-Simkooei A R，Teunissen P J G，Tiberius C. Application of Least Squares Variance Component Estimation to GPS Observables[J]. Journal of Surveying Engineering，2009，135：14-17

[6] 於宗俦,陶本藻,刘大杰,等. 平差模型误差理论及其应用论文集[M]. 北京:测绘出版社,1993

[7] 王志忠，朱建军. 方差分量的 MINQUE 通用公式[J]. 中南工业大学学报，2001，32(4)：390-393

[8] 於宗俦. 方差-协方差分量估计的统一理论[J]. 测绘学报，1991，20：161-171

[9] Yu Z. A Generalization Theory of Estimation of Variance-covariance Components[J]. Manuscipta Geodaetica，1992，17：295-301

[10] Li B，Shen Y，Lou L. Efficient Estimation of Variance and Covariance Components：a Case Study for GPS Stochastic Model Evalution[J]. IEEE，2011，49(1)：203-210

[11] 於宗俦. Helmert 型方差-协方差分量估计的通用公式[J]. 武汉测绘学院学报,1991,16(2)：8-17

[12] Yu Z. A Universal Formula of Maximum Likelihood Estimation of Variance-covariance Components[J]. Journal of Geodesy，1996，70：233-240

[13] Teunissen P J G，Amiri-Simkooei A R. Least-square Variance Component Estimation[J]. Journal of Geodesy，2008，82：65-82

[14] Sjberg L. On the Best Quadratic Minimum Bias Non-Negative Estimatior of a Two-Variance Component Model[J]. Journal of Geodetic Science，2011，1(3)：280-285

[15] 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京:解放军出版社,1990

[16] Magnus J，Neudecker H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics[M]. Hoboken：John Wiley&Sons，2007

[17] Baarda W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks[J]. Netherlands Geod Comm，Publ on Geod，New Series，1968，2(5):1-97

[18] Hermann B，Zuheir A，Bernhard H. Variance Component Estimation for Combination of Terrestrial Reference Frames[R]. Schriftenreihe des Studiengangs Geodasie und Geoinformatioc，2007

[19] 吴芸芸,朱建军,左廷英. RMSE 的平方与平滑度的线性组合的平方根作为 Vondrak 滤波评价标准的探讨[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2012,37(10):1 212-1 214

[20] 张正禄,范国庆,张松林,等. 测量的广义可靠性研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2012,37(5):577-581

[21] 宋迎春,惠沈盈,刘杰,等. 基于分枝远界算法的整数最小二乘估计[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2011,36(10):1 241-1 245

第一作者简介:赵俊,硕士生,主要从事测量数据处理方面的研究。

E-mail:zhaojun4368@163.com

(下转第 588 页)