

两种渐消滤波与自适应抗差滤波的综合比较分析

杨元喜¹ 高为广^{2,3}

(1 西安测绘研究所, 西安市雁塔路中段1号, 710054)
(2 信息工程大学测绘学院, 郑州市陇海中路66号, 450052)
(3 61081部队, 北京市5128信箱, 100094)

摘要:给出了两种渐消滤波解及其相应的原则,介绍了自适应抗差滤波原理和相应的解,分别从原理和解的表达式上分析了两种渐消滤波和自适应抗差滤波解算的基本性能。利用一个实际算例比较了渐消滤波与自适应抗差滤波解在控制状态异常影响方面的能力。

关键词: Kalman 滤波; 渐消滤波; 自适应抗差滤波; 渐消因子
中图分类号: P207

为了控制过时状态误差对当前状态参数估计的影响, 统计学界采用遗忘因子限制 Kalman 滤波器的记忆长度, 以便充分利用现时的观测数据^[1,2]。基于抗差估计原理, 文献[3]提出了一种整体状态信息自适应滤波, 自适应因子基于观测信息与模型状态信息的不符值自适应地确定, 具有整体稳健性和可靠性。这种基于整体状态信息的自适应滤波优于现有的渐消滤波和其他自适应滤波^[4]。文献[2]将自适应因子构造成两段函数, 并考虑多因子自适应估计, 对于不同类型的状态参数可采用不同类型的自适应因子。

因为渐消滤波和自适应滤波理论都是在正常 Kalman 滤波基础上发展起来的, 先给出正常 Kalman 滤波解的形式。

设观测误差方程为:

$$V_k = A_k X_k - L_k \quad (1)$$

动力模型方程为:

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + w_k \quad (2)$$

其中, L_k 为观测向量, 其协方差矩阵为 Σ_k ; V_k 为残差向量; X_k 为状态参数向量; A_k 为设计矩阵; X_k 为 k 时刻状态参数预测向量; X_{k-1} 为 $k-1$ 历元的状态向量, 其估值为 \hat{X}_{k-1} , X_{k-1} 的残差向量为 $V_{X_{k-1}}$; w_k 为动力模型误差向量, 相应协方差阵为 Σ_w ; $\Phi_{k,k-1}$ 为状态转移矩阵。假设在 k 时刻增加

新观测 L_k , 相应的 $k-1$ 历元的状态 X_{k-1} 的更新估计为 \hat{X}_k , 误差方程分别为:

$$V_{X_{k-1}} = X_{k-1} X_{k-1}^T \quad (3)$$

$$\hat{w}_k = X_k - \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} \quad (4)$$

基于式(1)和式(2), 可得滤波解:

$$X_k = \hat{X}_k + K_k (L_k - A_k \hat{X}_k) \quad (5)$$

其中, K_k 为增益矩阵:

$$K_k = \Sigma_{X_k} A_k^T (A_k \Sigma_{X_k} A_k^T + \Sigma_k)^{-1} \quad (6)$$

对于正常 Kalman 滤波, Σ_{X_k} 为:

$$\Sigma_{X_k} = \Phi_{k,k-1} \Sigma_{X_{k-1}} \Phi_{k,k-1}^T + \Sigma_w \quad (7)$$

1 两种渐消滤波原理

若对前一个历元的状态估计值 X_{k-1} 的协方差进行膨胀, 即在处理历史信息 and 观测信息时, 将 $k-1$ 历元的状态估值单独作为随机量, 相应的极值条件为^[9]:

$$\Omega(k) = V_k^T \Sigma_k^{-1} V_k + \frac{1}{\lambda} V_{X_{k-1}}^T \Sigma_{X_{k-1}}^{-1} V_{X_{k-1}} + \hat{w}_k^T \Sigma_w^{-1} \hat{w}_k = \min \quad (8)$$

式中, λ 为遗忘因子, 且 $\lambda \geq 1$ 。这时 Σ_{X_k} 为:

$$\Sigma_{X_k} = \lambda \Phi_{k,k-1} \Sigma_{X_{k-1}} \Phi_{k,k-1}^T + \Sigma_w \quad (9)$$

这里, $\Sigma_{X_{k-1}}$ 为 $k-1$ 历元状态估值的协方差矩阵,

此时的滤波解即为渐消滤波解。

上述解与正常 Kalman 滤波解的显著区别在于将验前状态协方差矩阵膨胀 λ_k 倍, 使历史信息的使用效率降低, 从而达到重用现时测量信息的目的。

另一种渐消滤波基于如下原则:

$$\Omega(k) = V_k^T \Sigma_k^{-1} V_k + V_{X_{k-1}}^T \Sigma_{X_{k-1}}^{-1} V_{X_{k-1}} + \frac{1}{\lambda_k} \hat{w}_k^T \Sigma_{w_k}^{-1} \hat{w}_k = \min \quad (10)$$

则:

$$\Sigma_{X_k} = \Phi_{k, k-1} \Sigma_{X_{k-1}} \Phi_{k, k-1}^T + \lambda_k \Sigma_{w_k} \quad (11)$$

上面的两种渐消滤波基本等价, 它们均有别于正常 Kalman 滤波原则:

$$\Omega(k) = V_k^T \Sigma_k^{-1} V_k + V_{X_{k-1}}^T \Sigma_{X_{k-1}}^{-1} V_{X_{k-1}} + \hat{w}_k^T \Sigma_{w_k}^{-1} \hat{w}_k = \min \quad (12)$$

或

$$\Omega(k) = V_k^T \Sigma_k^{-1} V_k + V_{X_{k-1}}^T \Sigma_{X_{k-1}}^{-1} V_{X_{k-1}} = \min \quad (13)$$

式中, V_X 为 X_k 的残差向量。

渐消滤波的关键是 λ 的确定。基于最优化理论, 构造两类遗忘因子, 其解式为:

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{1}{n} \text{tr}(N_k M_k^{-1}) \right\} \quad (14)$$

式中, $\text{tr} \cdot |$ 是矩阵迹的符号; M_k 和 N_k 的表达式为:

$$M_k = A_k \Phi_{k, k-1} \Sigma_{X_{k-1}} \Phi_{k, k-1}^T A_k^T \quad (15)$$

$$N_k = \Sigma_{V_k} - A_k \Sigma_{w_k} A_k^T - \Sigma_k \quad (16)$$

其中, Σ_{V_k} 为预测残差的协方差矩阵:

$$\Sigma_{V_k} = E(M_k M_k^T) \quad (17)$$

式中,

$$M_k = A_k X_k - L_k \quad (18)$$

称为预测残差^[4,5]。一般用开窗估计法确定 Σ_{V_k} ^[6], 类似于 Sage 滤波^[4]:

$$\Sigma_{V_k} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k M_i M_i^T \quad (19)$$

式(19)的一种简化算法为^[7]:

$$\lambda_k = \max \{ 1, \text{tr}(N_k) / \text{tr}(M_k) \} \quad (20)$$

上述遗忘因子的算法具有理论上的最优性, 即当预报残差 V_{X_k} 增大时, 将引起式(17)计算的 Σ_{V_k} 增大, 最佳遗忘因子相应增大, 使滤波器达到最佳。

文献[9]对式(19)又作了改进:

$$\Sigma_{V_k} = \begin{cases} \frac{\lambda_{k-1} M_k M_k^T}{1 + \lambda_{k-1}}, & k > 1 \\ \frac{1}{2} M_0 M_0^T, & k = 1 \end{cases} \quad (21)$$

其中, M_0 为 $k=0$ 时的预测残差向量。

经过修改后的 Σ_{V_k} 的表达式(21)比式(19)更能敏感地反映当前历元动力学模型误差的现状, 因为由式(21)表示的 Σ_{V_k} 未对历史信息取平均, 而直接采用当前历元的信息。

2 渐消滤波与自适应滤波的比较

笔者曾提出一种自适应滤波, 该滤波介于渐消滤波与 Kalman 滤波之间, 即与 Kalman 滤波一样, 将 X_k 作为一个整体, 不特意区分 X_{k-1} 的误差和动力学模型误差, 采用 $\alpha V_{X_k}^T \Sigma_{X_k}^{-1} V_{X_k}$ 为极小的原则, 且 α 的取值在 $[0, 1]$ 之间。当 X_k 误差较大时, α 小于 1, 甚至等于 0; 而 X_k 误差较小时, $\alpha=1$, 即近似于正常 Kalman 滤波解的形式。

抗差自适应滤波的基本原则为:

$$\Omega(k) = \sum_{i=1}^{n_k} p_{k_i} \rho(V_{k_i}) + \alpha_k V_{X_k}^T \Sigma_{X_k}^{-1} V_{X_k} = \min \quad (22)$$

式中, ρ 为一个凸函数; α_k 为自适应因子; p_{k_i} 为观测测量 L_{k_i} 的权元素。自适应抗差滤波的解为:

$$X_k = (A_k^T P_k A_k + \alpha_k P_{X_k})^{-1} (A_k^T) P_k L_k + \alpha_k P_{X_k} X_k \quad (23)$$

式中, P_k 为观测向量的等价权阵^[3-5]; P_{X_k} 为 X_k 的权矩阵, $P_{X_k} = \Sigma_{X_k}^{-1}$ 。若 $\Sigma_k = P_k^{-1}$, 则上述抗差自适应滤波可表示成式(5)的形式。其中增益矩阵为:

$$K_k = \frac{1}{\alpha_k} \Sigma_{X_k} A_k^T \left[\frac{1}{\alpha} A_k \Sigma_{X_k} A_k^T + \Sigma_k \right]^{-1} \quad (24)$$

抗差自适应滤波与渐消滤波的主要区别在于以下方面。

- 1) 抗差自适应滤波对观测信息采用了抗差估计原则, 能够控制观测异常的影响;
- 2) 自适应因子 α 作用于预测状态向量 X_k 的协方差矩阵, 而渐消滤波的渐消因子作用于前历元状态估计向量 X_{k-1} 的协方差矩阵;
- 3) 渐消滤波的渐消因子经常出现负定现象, 导致滤波失败; 自适应滤波若用式(23)解算, 则自适应因子在 $[0, 1]$ 之间变化, 若用式(5)和式(24)解算, 则自适应因子在 $(0, 1]$ 之间变化。自适应因子由观测信息与状态预测信息不符值确定, 具有实时自适应功能。

3 实际计算与比较

本文算例所用数据为一组机载动态 GPS 观测数据。有两台 Trimble 4000 SSI 型接收机, 一台固定于参考站, 另一台安置于飞机上。用高精度的载波相位双差解作为参考值, 而用双差单 P

码进行各种滤波解算,其结果与参考值作差进行比较。滤波模型采用常速度模型。位置、速度和P码的初始方差分别取 0.2 m^2 、 $9.0 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}^2$ 和 1 m^2 ,而速度的谱密度取 $0.01\text{ m}^2/\text{s}^2$ 。状态模型方差-协方差阵直接采用文献[6,8]中的模型。在此进行3个方案的解算:经典Kalman滤波(CKF);渐消Kalman滤波(FKF);抗差自适应Kalman滤波(ARKF)。

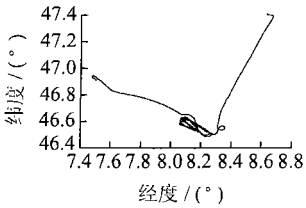


图1 飞机运动平面图

Fig.1 Floor Plan of Airplane

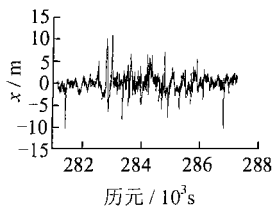


图2 经典Kalman滤波误差图

Fig.2 Errors of Classical Kalman Filtering

X轴方向误差图分别绘于图2~图4,RMS比较见表1。

表1 3种算法精度比较/m
Tab.1 Comparison of RMS/m

	CKF	FKF	ARKF
X	2.006	1.415	1.331
Y	1.338	0.759	0.675
Z	1.936	1.539	1.452

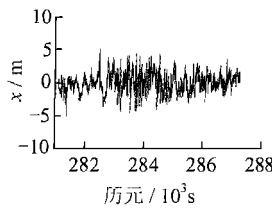


图3 渐消Kalman滤波误差图

Fig.3 Errors of Fading Kalman Filtering

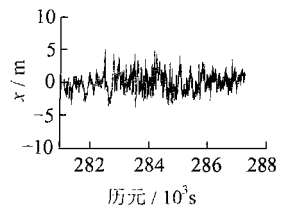


图4 抗差自适应Kalman滤波误差图

Fig.4 Errors of Adaptive Robust Kalman Filtering

分析上述计算结果,可以得出以下结论。

1) 飞机在飞行过程中的多处“机动”对经典Kalman滤波有明显的影 响,见图2、表1。

2) 由图3、表1可以看出,渐消Kalman滤波能够较好地抑制状态异常的影响,滤波精度和动态跟踪能力相对经典Kalman滤波有很大改进。

3) 图4、表1表明,抗差自适应滤波解的精度相对渐消Kalman滤波仍有提高。该算法不但能够有效地抑制动态载体扰动异常的影响,而且能控制观测异常的影响,在整体上提高了滤波的精度和可靠性。

总之,渐消Kalman滤波算法相对经典Kalman滤波在精度和动态性能方面都有明显改善。渐消滤波在一定程度上具有控制动力模型误差影响的能力,它通过增大前一个历元状态参数估计向量的协方差矩阵来减弱状态模型误差对当前历元状态参数的影响。但是,这种滤波难以区分模型误差和前一历元状态估计误差,当动力学模型存在较大误差时, λ 就很难有效地控制动力学模型误差的影响。

参 考 文 献

[1] Fagin S L. Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis of Optimal System[J]. IEEE Int Convent Record, 1964 (12): 216-240
 [2] Ou Jikun, Chai Yanju, Yuan Yunbin. Adaptive Filter for Kinematic Positioning by Selection of the Par

ameter Weights[M]. Progress in Geodesy and Geodynamics. Wuhan: Hubei Science & Technology Press, 2004

[3] Yang Yuanxi, He Haibo, Xu Guochang. Adaptively Robust Filtering for Kinematic Geodetic Positioning[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75(2): 109-116
 [4] Yang Yuanxi, Xu Tianhe. An Adaptive Kalman Filter Based on Sage Windowing Weights and Variance Components[J]. The Journal of Navigation, 2003, 56(2): 231-240
 [5] Yang Yuanxi, Xu Tianhe, He Haibo. On Adaptively Kinematic Filtering[J]. English of Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 2001: 25-32
 [6] Xia Qijun, Sun Youxian, Zhou Chunhui. An Optimal Adaptive Algorithm for Fading Kalman Filter and Its Application[J]. Acta Automatic Sinica, 1990, 16(3): 210-216
 [7] Sorenson H W, Sacks J E. Recursive Fading Memory Filtering[J]. Inform, SCI, 1971(3): 101-119
 [8] Fang Jiancheng. The Study and Application of the Optional Estimation Theories and Method in Integrated Navigation System[D]. Nanjing: Dongnan University, 1998
 [9] Koch K R. Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Model[M]. New York: Springer Verlag, 1987

第一作者简介:杨元喜,博士,研究员,博士生导师,现从事动态大地测量和大地测量数据处理研究。
E-mail: yuanxi@pub.xaonline.com

(下转第1026页)

Dynamic Analysis on China's Ecological Footprint Supply and Demand from 1978 to 2004

ZHONG Xiaoqing^{1,2,3} ZHAO Yongliang² ZHONG Shan^{1,3} SI Huan^{1,3}

(1 School of Life Science, Zhongshan University, West Xingang Road, Guangzhou 510275, China)

(2 Lingnan College, Zhongshan University, West Xingang Road, Guangzhou 510275, China)

(3 State Key Laboratory for Biological Control, Zhongshan University, West Xingang Road, Guangzhou 510275, China)

Abstract: On the basis of the theory of ecological footprint, China's ecological footprint in main years from 1978 to 2004 is analyzed. Depending on the long-term data, the curve of the general demand and supply of ecological footprint is depicted, and the trend of the long-term ecological footprint is observed to judge whether it was in equilibrium. The result is that ecological deficit has been increasing in the long-term. And in the end the ecological consistency of China is analyzed using econometric model.

Key words: environmental and ecological economics; ecological footprint; ecological carrying capacity; ecological productive land; dynamic analysis

About the first author: ZHONG Xiaoqing, Ph. D, associate professor, researching area is ecological economics.

E mail: ls102@zsu.edu.cn

(上接第 982 页)

Comparison of Two Fading Filters and Adaptively Robust Filter

YANG Yuanxi¹ GAO Weiguang^{2,3}

(1 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an 710054, China)

(2 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

(3 61081 Troops, P. O. Box 5128, Beijing 100094, China)

Abstract: Two kinds of fading filters and their principles are introduced. An adaptive robust filter is given with corresponding principle. The basic abilities of the fading filters and adaptively robust filter in controlling the influences of the kinematic model errors are analyzed. A practical example is given. The results of the fading filter and adaptively robust filter are compared and analyzed.

Key words: Kalman filtering; fading filtering; adaptive filtering; fading factor

About the first author: YANG Yuanxi, Ph. D, professor, Ph. D supervisor, his research direction is kinematic geodesy and geodetic data processing.

E mail: yuanxi@pub.xaonline.com