

# GIS 中统一于 $Q_i$ 算子的多边形基本问题新算法

丁健<sup>1,2,3</sup> 江南<sup>1</sup> 芮挺<sup>3</sup>

(1 中国科学院南京地理与湖泊研究所, 南京市北京东路 73 号, 210008)  
(2 中国科学院研究生院, 北京市玉泉路甲 19 号, 100039)  
(3 解放军理工大学工程兵工程学院, 南京市海福巷 1 号, 210007)

**摘要:**用  $Q_i$  算子来描述多边形中边和连线两类矢量的方向角, 归纳出由  $Q_i$  算子所表示的矢量方向角在识别走向时的判断规则, 从而成功建立了多边形 4 个基本问题的新算法。实现了 4 个算法在几何意义上的统一, 并相对传统最优算法提高了执行效率, 同时还保证了高可靠性和稳定性。  
**关键词:**多边形; 方向识别; 凹凸性识别; 点包含判断;  $Q_i$  算子  
**中图法分类号:**P208

在 GIS 中, 多边形方向识别、多边形凹凸性识别、多边形顶点凹凸性识别、多边形与点之间包含关系识别等是多边形的基本问题。解决这些问题的程序执行过程在 GIS 运行期间使用频率很高且计算量很大, 例如用鼠标点击实现对多边形图形要素的选择、多边形与点的拓扑叠加查询, 就要重复地调用点包含判断算法。因此, 多边形这些基本问题算法的效率直接影响到计算速度, 甚至软件质量。长期以来, 国内外许多学者进行了大量卓有成效的研究<sup>[1-7]</sup>, 相应算法一直处在不断改进过程中, 更高效率的多边形基本问题算法是人们不懈追求的目标。齐华提出的  $Q_i$  算子已经被用于高效地建立结点上弧-弧拓扑关系和确定射线空间相邻关系<sup>[8,9]</sup>。文献[10]试图建立一个类似  $Q_i$  算子几何意义的点包含算法, 但没有成功。

本文引进  $Q_i$  算子来描述多边形中边和连线的方向, 讨论  $Q_i$  算子描述边和连线方向时的一些性质, 在此基础上总结出  $Q_i$  算子在相邻矢量走向上的判断规则, 并将它们应用到多边形基本问题的解决中, 最终建立统一于  $Q_i$  算子几何概念的多边形基本问题新算法。分析和实验表明, 新算法在可靠性、稳定性和执行效率上优于目前算法<sup>[11]</sup>。

## 1 $Q_i$ 算子及其性质

### 1.1 $Q_i$ 算子

$Q_i$  算子的核心是  $Q_i$  长度, 即以矢量的起点正北方向射线与单位圆的外切正方形边的交点为起算点, 沿正方形边, 顺时针走到矢量射线与单位圆的外切正方形边的交点所经历的长度。在计算矢量的方向角时,  $Q_i$  算子将角度简化成  $Q_i$  长度的计算,  $Q_i$  长度可用函数  $Q_i(x_i, y_i)$  表示<sup>[8]</sup>。 $Q_i(x_i, y_i)$  是分段函数, 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 值域为  $(0, 8]$ 。目前,  $Q_i$  算子仅被用于判断弧与弧之间的相邻关系<sup>[8,9]</sup>, 其优秀性质没有得到充分认识和应用。

### 1.2 角度的 $Q_i$ 算子值计算公式

对具体给定的任意方位角度  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ]$ , 其  $Q_i$  算子值  $Q_i(\alpha)$  可以通过文献[11]计算。下面是一些典型角度的  $Q_i$  算子值:  $Q_i(30^\circ) = 0.577\ 35$ ,  $Q_i(45^\circ) = 1$ ,  $Q_i(60^\circ) = 1.422\ 65$ ,  $Q_i(90^\circ) = 2$ ,  $Q_i(180^\circ) = 4$ ,  $Q_i(270^\circ) = 6$ ,  $Q_i(360^\circ) = 8$ 。

### 1.3 $Q_i$ 算子用于描述边和连线

对一个多边形  $P$ , 如图 1, 其边  $P_iP_{i+1}$  可以看作作为矢量, 利用给定多边形的顶点顺序定义每条边的矢量方向。点包含判断中, 待检测点  $Q$  到多边形各顶点的连线  $QP_i$  也可以看作为矢量, 它们

的方向角都可以用  $Q_i$  算子来描述。为了统一起见,在表达形式上本文作如下约定:用  $Q_i(\Delta x_i, \Delta y_i)$  表示  $Q_i$  算子,其中,  $\Delta x_i = P_{i+1}x - P_ix$ ,  $\Delta y_i = P_{i+1}y - P_iy$  或者  $\Delta x_i = P_ix - Qx$ ,  $\Delta y_i = P_iy - Qy$ 。为明确到具体边,有时也以  $Q_i(P_iP_{i+1})$ 、 $Q_i(i)$  的形式表示多边形第  $i$  条边  $P_iP_{i+1}$  的  $Q_i$  长度值,或以  $Q_i(QP_i)$ 、 $Q_i(i)$  的形式表示检测点与多边形第  $i$  个顶点  $P_i$  连线的  $Q_i$  长度值。求边、连线  $Q_i$  长度值的流程如图 2。

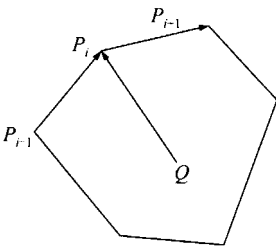


图 1 多边形边、连线的  $Q_i$  算子表示  
Fig. 1  $Q_i$  Operator Used to Represent Polygon's Edge and Connected Line

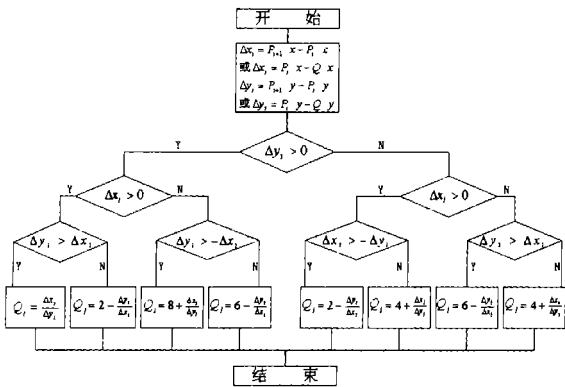


图 2 求边、连线  $Q_i$  长度值的流程

Fig. 2 Flowchart of Getting  $Q_i$  Value

1.4 基于  $Q_i$  算子的相邻矢量走向判断规则

多边形的相邻边之间不停地改变着走向,其走向决定了多边形及其顶点的很多性质,如方向性、凹凸性等。在点包含问题中,待检测点与多边形顶点连线后,相邻连线之间不停地改变着侧向。判断下一条边(连线)在上一条边(连线)的哪一侧是解决多边形基本问题的关键。用相邻边(连线)的  $Q_i$  算子差值可以快速地进行走(侧)向关系判断。

1) 对相邻边,如图 3(a) 所示,沿顺时针方向进行考察,多边形的第  $i$  条边  $P_{i-1}P_i$  和第  $i+1$  条边  $P_iP_{i+1}$  有夹角  $\Phi$ ,以  $P_{i-1}$  点为原点作正方形,平移  $P_iP_{i+1}$  到  $P_{i-1}P'_{i+1}$ 。易知  $\Phi = \phi$ ,  $\Phi$  角度可以用  $Q_i$  算子意义上的折线  $ST$  (图中黑线) 长度来衡

量。用  $\Delta Q_i$  代表相邻连线的  $Q_i$  算子值差值,则由  $Q_i(x_i, y_i)$  函数值域可知,  $\Delta Q_i \in (-8, 8)$ 。当  $Q_i(P_{i-1}P_i)$  在 0~4 之间时,若不等式  $Q_i(P_iP_{i+1}) > Q_i(P_{i-1}P_i)$  和  $Q_i(P_iP_{i+1}) - Q_i(P_{i-1}P_i) < 4$  同时成立,则边  $P_iP_{i+1}$  在  $P_{i-1}P_i$  右侧;当  $Q_i(P_{i-1}P_i)$  在 4~8 之间时,若不等式  $Q_i(P_iP_{i+1}) - Q_i(P_{i-1}P_i) < -4$  成立,则边  $P_iP_{i+1}$  在  $P_{i-1}P_i$  右侧。即  $\Delta Q_i$  取值在  $(-8, -4)$  或  $(0, 4)$  时,两条相邻边中的下一条在上一条的右侧;  $\Delta Q_i$  取其他值时,下一条在上一条的左侧。

2) 对相邻连线,如图 3(b) 所示,连线间的  $\Phi$  角度可以用  $Q_i$  算子意义上的折线  $ST$  (图中黑线) 长度来衡量。经类似分析后,可得到相同结论,当  $Q_i(QP_{i+1}) - Q_i(QP_i)$  取值在  $(-8, -4)$  或  $(0, 4)$  时,  $QP_{i+1}$  在  $QP_i$  的右侧;当  $Q_i(QP_{i+1}) - Q_i(QP_i)$  取其他值时,  $QP_{i+1}$  在  $QP_i$  的左侧。即  $\Delta Q_i$  取值在  $(-8, -4)$  或  $(0, 4)$  时,两条相邻连线中的下一条在上一条的右侧;  $\Delta Q_i$  取其他值时,下一条在上一条的左侧。

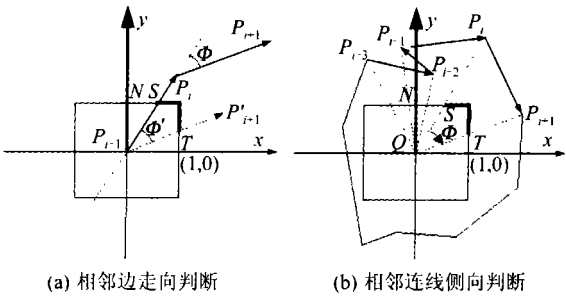


图 3 相邻矢量走向判断

Fig. 3 Direction Judge Between the Neighbouring and Edges

用相邻边(连线)的  $Q_i$  算子值差值进行走(侧)向关系判断,判断规则可总结为:当  $\Delta Q_i \in (-8, -4)$  或  $(0, 4)$  时,相邻边(连线)为右侧关系;当  $\Delta Q_i \in (-4, 0)$  或  $(4, 8)$  时,相邻边(连线)为左侧关系。该规则是  $Q_i$  算子性质的一个提炼,是解决本文所提多边形基本问题的关键。

2 多边形基本问题新算法

本文沿用文献[2]和文献[4]中有关多边形、多边形凸、凹顶点以及凸、凹多边形的定义。

2.1 多边形方向算法

循环顶点数  $n$  次找到最上点( $Y$  坐标最大的点)或其他极点,最上点等极点多边形中必为凸点。求最上点相邻边的  $\Delta Q_i$  值,由该  $\Delta Q_i$  值判断

相邻边的走向关系。如为右侧关系说明多边形方向为顺时针, 如为左侧关系说明多边形方向为逆时针。方向算法描述如下。

- 1) 求得最上点  $P_{y_{\max\_index}}$  (或其他极点), 记录其序号为  $y_{\max\_index}$ ;
- 2) 求得  $Q_i (P_{y_{\max\_index-1}} P_{y_{\max\_index}})$  和  $Q_i (P_{y_{\max\_index}} P_{y_{\max\_index+1}})$ ;
- 3) 求得最上点相邻边之间的  $\Delta Q_i, \Delta Q_i = Q_i (P_{y_{\max\_index}} P_{y_{\max\_index+1}}) - Q_i (P_{y_{\max\_index-1}} P_{y_{\max\_index}})$ ;
- 4) 按 § 2. 2, 由  $\Delta Q_i$  判断最上点  $P_{y_{\max\_index}}$  相邻边之间的走向关系, 如为右侧关系说明多边形方向为顺时针, 如为左侧关系说明多边形方向为逆时针。

2. 2 多边形顶点凹凸性算法

先假设多边形方向为顺时针, 循环顶点数  $n$  次, 求取每条边的  $Q_i$  算子值, 记为  $Q_i (P_i P_{i+1})$ 。再循环顶点数  $n$  次, 对每个顶点求出  $\Delta Q_i$ , 记为  $\Delta Q_i(i)$ , 并由该  $\Delta Q_i$  根据规则判断相邻边的走向关系。如为右侧关系, 则记录顶点为凸点; 如为左侧关系, 则记录顶点为凹点。最后, 检验最上顶点是否为凸点, 如为凸点, 则多边形方向为顺时针的假设成立, 前面记录的各项点凹凸性正确; 如为凹点, 则与极点必为凸点的定理相矛盾, 说明最初的假设错误, 多边形方向不是顺时针而是逆时针, 此时须将前面记录的凸点改为凹点、凹点改为凸点。顶点凹凸性的算法如下。

- 1) 求得各边  $Q_i$  算子值  $Q_i$ ;
- 2) 求得各顶点  $\Delta Q_i(i), \Delta Q_i(i) = Q_i(P_i P_{i+1}) - Q_i(P_{i-1} P_i)$ ;
- 3) 由  $\Delta Q_i(i)$  判断各顶点相邻边之间的走向关系, 如为右侧关系则记录顶点为凸点, 如为左侧关系则记录顶点为凹点;
- 4) 检验最上顶点是否为凸点, 若是, 则步骤 3) 中记录的各项点凹凸性正确; 否则将步骤 3) 记录的各项点凹凸性取反。

2. 3 多边形凹凸性算法

对多边形的顶点, 从 1 号点开始依次求  $\Delta Q_i$ , 同时并行地判断各  $\Delta Q_i$  是否同号(大于或小于 0)。在求解过程中, 如果  $\Delta Q_i$  到最后都不变号, 即  $\Delta Q_i(i)$  同大于 0 或同小于 0, 则为凸多边形; 如发生变号, 则为凹多边形。中间判断时只要出现变号, 就可得到多边形为凹的结论, 可提前结束。多边形凹凸性的算法如下。

- 1) 从 1 号点开始依次求各个顶点的  $\Delta Q_i(i), \Delta Q_i(i) = Q_i(P_i P_{i+1}) - Q_i(P_{i-1} P_i)$ ;
- 2) 求顶点  $\Delta Q_i$  的同时, 需要并行地判断各

$\Delta Q_i(i)$  是否同号, 如发生变号, 则为凹多边形, 提前结束; 如到最后都不变号, 则为凸多边形。

2. 4 点包含算法

类似于夹角和算法, 笔者提出了  $Q_i$  算子和法: 对多边形及检测点  $Q$ , 考察  $Q$  与各顶点连线间的  $Q_i$  算子值差, 对该有向差值求和, 当和接近(考虑计算误差) 0 时  $Q$  在多边形外部, 当和接近(考虑计算误差)  $\pm 8$  时  $Q$  在多边形内部。此结论的证明可以参考文献[11]。图 4 演示了检测点在多边形内部和外部两种情形下的  $\sum \Delta Q_i(i)$ 。

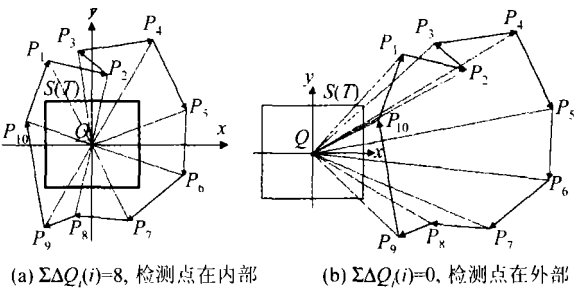


图 4  $Q_i$  算子和法的几何意义  
Fig. 4 Geometry Idea of the Algorithm

在累加  $\Delta Q_i(i)$  时, 由于看似毗邻的连线间在  $Q_i$  值上存在跳跃, 因此, 要对  $\Delta Q_i(i)$  进行补偿或剔除。如图 4(b), 当求从  $QP_{i-3}$  到  $QP_{i-2}$  的长度差值时,  $\Delta E\_a\_l < -4$ , 可以确定  $QP_{i-2}$  在  $QP_{i-3}$  的右侧。按顺时针正向的约定, 此处长度差值应该取正值, 但  $\Delta E\_a\_l$  是负的, 为此, 采取“补码”的方法, 人为加 8。当求从  $QP_{i-2}$  到  $QP_{i-1}$  的长度差值时,  $\Delta E\_a\_l > 4$ , 可以确定  $QP_{i-1}$  在  $QP_{i-2}$  的左侧。按顺时针正向的约定, 此处长度差值应该取负值, 但  $\Delta E\_a\_l$  是正的, 为此, 人为减 8。

点包含的判断算法如下。

- 1) 求得各连线  $Q_i$  算子值  $Q_i(QP_i)$ ;
- 2) 求得各对相邻连线间  $Q_i$  算子差值  $\Delta Q_i(i), \Delta Q_i(i) = Q_i(QP_{i+1}) - Q_i(QP_i)$ ;
- 3) 按 § 2. 2 中的规则, 由  $\Delta Q_i(i)$  判断各对相邻连线之间的侧向关系, 根据情况进行补偿或剔除;
- 4) 求得  $Q_i$  算子差值和  $\sum \Delta Q_i(i)$ ;
- 5) 需要根据  $|\sum \Delta Q_i(i)|$  进行判断, 如果  $|\sum \Delta Q_i(i)|$  接近于 8, 则待检测点在多边形内部; 如  $|\sum \Delta Q_i(i)|$  接近于 0, 则待检测点在多边形外部。

在步骤 1) 部分加入  $\Delta x(i)$  和  $\Delta y(i)$  是否同时等于 0 的判断, 可提前检测待检测点与顶点重合

的情形;在算法步骤2)部分加入 $|\Delta Q_i(i)|$ 是否等于4的判断,可提前检测待检测点落在边上的情形。从 $\sum \Delta Q_i(i)$ 值正负可以判断出多边形的方向,如 $\sum \Delta Q_i(i)$ 接近8,多边形方向为顺时针;如 $\sum \Delta Q_i(i)$ 接近-8,多边形方向为逆时针。

3 算法分析

算法的优劣比较还要进一步对比主体程序计算量。本文沿用文献[6]和[7]中的方法,忽略诸如赋值、跳转、逻辑与、逻辑或等耗时少的琐碎操作;用大写字母A代表1个加(+)或减(-)操作单元费时,字母M代表1个乘(\*)或除(/)操作单元费时,字母B代表1个比较(>, =, <)操作单元费时;对数据准备、求最上点等各算法均要经历的过程也一并忽略。

以点包含算法为例,步骤1)部分需要的基础运算计算量为 $3A + 1M + 3B$ ,步骤2)~步骤4)部分需要 $3A + 4B$ ,步骤5)为常数次,不计入。因此,点包含算法共需 $6A + 1M + 7B$ 。

本文算法和目前最优算法在最不利情况下需要的基础运算次数对比如表1。可见,在多边形方向、顶点凹凸性、多边形凹凸性、点包含问题上,本文算法均只涉及1次乘除类运算,而被比较算法均要两次。在求方向、凹凸性时,本文算法虽然比叉乘法多5次比较,但少了1次耗时较多的乘除类运算。点包含判断时,本文算法少1次乘除类运算和1次比较。

表1 算法运算次数比较

Tab. 1 Comparison of Computation Times

问题类型	目前最优算法	本文算法
多边形方向	$5A + 2M + 1B$ 叉乘法 <sup>[2]</sup>	$4A + 1M + 6B$
顶点凹凸性	$5A + 2M + 1B$ 叉乘法 <sup>[5]</sup>	$4A + 1M + 6B$
多边形凹凸性	$5A + 2M + 1B$ 叉乘法 <sup>[5]</sup>	$4A + 1M + 6B$
点包含	$6A + 2M + 8B$ 射线法 <sup>[7]</sup>	$6A + 1M + 7B$

在空间复杂度对比上,都是 $O(n)$ ,无大差别。新算法无退化和奇异情形,具有很好的稳定性。

参 考 文 献

[1] Feito F R, Torres J C, Urena A. Orientation, Simplicity, and Inclusion Test for Planar Polygons[J]. Computer & Graphics, 1995, 19(4): 595-600

[2] 王志强,肖立瑾,洪嘉振. 多边形的简单性、方向及内外点的判别算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(2): 183-187

[3] 李维诗,李江雄,柯映林. 平面多边形方向及内外点判断的新方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(6): 405-407

[4] 陈炳发,钱志峰,廖文和. 简单多边形凸凹性自识别算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(3): 214-217

[5] 刘润涛. 任意多边形顶点凸、凹性判别的简捷算法[J]. 软件学报, 2002, 13(7): 1309-1312

[6] Huang Chongwei, Shi Tianyuan. On the Complexity of Point-in-polygon Algorithms[J]. Computer & Geosciences, 1997, 23(1): 109-118

[7] Wu Huayi, Gong Jianya, Li Deren, et al. An Algebraic Algorithm for Point Inclusion Query [J]. Computer & Graphics, 2000, 24(4): 517-522

[8] 齐华,刘文熙. 建立结点上弧-弧拓扑关系的 $Q_i$ 算法[J]. 测绘学报, 1996, 25(3): 233-235

[9] 齐华,李德仁,朱庆. 确定射线空间相邻关系的两个非角度算法的时间复杂度分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2003, 28(5): 611-614

[10] 沈陈华. 平面上点与多边形包含关系的 $Q_i$ 算法[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 1999, 2(4): 24-26

[11] 丁健. 基于GIS的野战给水保障辅助决策关键算法研究[D]. 北京:中国科学院研究生院, 2005

第一作者简介:丁健,博士,讲师,主要研究方向为地理信息系统及其在野战给水中的应用,已发表论文20多篇。  
E-mail: ydjian@yahoo.com.cn; yudingjian@sina.com.cn

New Algorithms for Basic Issues of GIS Polygons Achieved by  $Q_i$  Operator

DING Jian<sup>1,2,3</sup> JIANG Nan<sup>1</sup> RUI Ting<sup>3</sup>

(1 Nanjing Institute of Geography and Limnology, The Chinese Academy of Sciences, 73 East Beijing Road, Nanjing 210008, China)

(2 School of Graduate, The Chinese Academy of Sciences, A 19 Yuquan Road, Beijing 100039, China)

(3 Engineering Institute of Engineering Corps, PLA University of Science and Technology, 1 Haifuxiang, Nanjing 210007, China)

**Abstract:** In this paper,  $Q_i$  operator is used to measure the azimuth of edges and connected lines which are vectors and related to the four basic issues. Principles judging to which side

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

the following edge(connected line) turned relative to the current are founded. By deriving the direction relationship between the neighbouring edges(connected lines) based on these principles, the polygon's orientation, polygonal convexity-concavity can be identified, so does to point-in-polygon query. New algorithms are presented, the analysis shows that improved performance is achieved, and there is the unification of the geometry idea in solving those four issues.

**Key words:** polygon; orientation identification; convexity-concavity identification; point-in-polygon query;  $Q_i$  operator

About the first author: DING Jian, Ph. D, lecture, majors in GIS and its application in field water supply.  
E mail: ydjian@yahoo.com.cn; yudingjian@sina.com.cn

(上接第 243 页)

## Quality Evaluation of Statistical Data Classification Considering Spatial Autocorrelation

GUO Qingsheng<sup>1,2</sup> LI Liusuo<sup>2</sup> JIA Yuming<sup>2</sup> SUN Yan<sup>1,2</sup>

(1 Key Laboratory of Geographic Information System, Ministry of Education, Wuhan University,  
129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Resource and Environment Science, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** Statistical map is the kind of important forms of thematic map, and data classification is the kernel. In this paper, the quantificational indexes of classification evaluation are discussed, when changing the number of classes, the spatial data autocorrelation degree is changed, this law is researched. Based on this law, the number of classes can be determined, and this new method is given in this paper. The result of data classification should be further evaluated by means of spatial distribution characteristic of data, and an example is given to test it.

**Key words:** statistical map; data classification; spatial autocorrelation; quality evaluation

About the first author: GUO Qingsheng, Ph. D, professor, Ph. D supervisor, engaged in the research on cartographic generalization, intelligent handling and visualization of geographical information.  
E mail: guoqingsheng@yahoo.com