

精密单点定位的可靠性研究

许长辉¹ 高井祥¹ 周 锋¹ 王 坚¹

(1 中国矿业大学环境与测绘学院,徐州市三环南路,221116)

摘 要:从传统最小二乘的可靠性理论出发,推导了卡尔曼滤波观测方程和预计状态向量的可靠性理论,并与传统多余观测分量的可靠性进行比较。结果表明,两种方案的观测方程的内部可靠性不仅与观测值的精度有关,还与卫星几何结构和卫星高度角有关。卡尔曼滤波的预计状态向量的内部可靠性比观测方程的内部可靠性更易受卫星几何结构的影响。虽然两种方案的外部可靠性在收敛之后都在 mm 级,但伪距的收敛速度要快于载波相位。

关键词:精密单点定位;可靠性;多余观测数;残差

中图法分类号:P228.41

精密单点定位通过建立反映客观实际的数学模型进行参数估计以获得接收机位置。在一定的假设条件下,利用参数估计方法可以获得这种数学模型的最优线性无偏估计。参数估计时,需要研究给定置信区间下可发现粗差的下界值和不可发现粗差对参数估计结果的影响^[1],即可靠性。最小二乘的可靠性最早由文献[1]提出并应用到大地测量的平差系统。卡尔曼滤波的可靠性理论首先由文献[2]提出,这种可靠性基于卡尔曼滤波的预计残差。

虽然最小二乘的可靠性理论较成熟^[3-5],卡尔曼滤波的可靠性研究主要针对预计残差,用多余观测数只研究观测方程的可靠性,同时多余观测数本身具有一定的不稳定性^[6-9]。针对残差的研究存在一定的局限性,如二次估计或假设观测值不相关。本文根据最小二乘和卡尔曼滤波的等价性,在最小二乘可靠性理论的基础上,得出了卡尔曼滤波残差的可靠性计算方法,并与多余观测数进行比较。

1 精密单点定位模型及其最小二乘估计

精密单点定位广泛使用的传统双频消电离层

伪距和相位组合观测值的函数模型可表示为:

$$\begin{aligned} \rho_{if} &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} P_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} P_2 = \\ &R + c \cdot (dt_r - dt_s) + d_{\text{trop}} + M_\rho + \epsilon_\rho \quad (1) \\ \Phi_{if} &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_2 = \\ &R + c \cdot (dt_r - dt_s) + d_{\text{trop}} + \lambda_{if} N_{if} + \\ &M_\Phi + \epsilon_\Phi \quad (2) \end{aligned}$$

其中, ρ_{if} 、 Φ_{if} 分别为消电离层组合的伪距和相位观测值; f_1 、 f_2 为频率; P_1 、 P_2 为伪距观测值; Φ_1 、 Φ_2 为相位观测值; R 为接收机与卫星的几何距离; c 为光速; dt_r 为接收机钟差; dt_s 为卫星钟差; d_{trop} 为对流层延迟; M_ρ 、 M_Φ 分别为伪距和相位其他所有改正项的和; ϵ_ρ 、 ϵ_Φ 分别为伪距和相位噪声; λ_{if} 、 N_{if} 分别为消电离层组合的波长和模糊度:

$$\begin{aligned} \lambda_{if} &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_2 \\ N_{if} &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} N_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} N_2 \end{aligned}$$

其中, λ_1 、 λ_2 分别为 L_1 、 L_2 两个波段的波长; N_1 、 N_2 为模糊度。

对式(1)、(2)进行泰勒级数展开,化简后可得矩阵形式:

$$AX = L + V \quad (3)$$

最小二乘解为:

$$\begin{aligned} X &= (A^T P A)^{-1} A^T P L \\ V &= - (Q_{VV} P) L \\ Q_{VV} &= P^{-1} - A (A^T P A)^{-1} A^T \end{aligned}$$

(4)

2 最小二乘的可靠性

为了检验数学模型是否真实地反映客观实际,作如下假设。

零假设 H_0

$$H_0: E(L) = AX$$

(5)

备选假设 H_a

$$H_a: E(L) = AX + \nabla_e$$

(6)

其中, e 表示模型的单粗差。

在上述假设条件下,基于多余观测分量的内部和外部可靠性为^[1,3]:

$$\nabla_e = \sigma_l \frac{\delta(e)}{\sqrt{r_i}}, \nabla_x = \frac{\delta(e)}{\sqrt{r_i}} \frac{\sqrt{1-r_i}}{\sqrt{r_i}}$$

其中, σ_l 为观测值的中误差; $\delta(e)$ 为非中心化参数; $r = Q_{VV} P$ 。

根据最小二乘的粗差估计理论,前述假设条件下的粗差估计值为^[3]:

$$\nabla_e = Q_{ee} e^T P Q_{VV} P L$$

(7)

其中, $Q_{ee} = (e^T P Q_{VV} P e)^{-1}$ 。则内部可靠性为^[3]:

$$\nabla_e = \frac{\sigma_0 \delta(e)}{\sqrt{e_i^T P Q_{VV} P e_i}}$$

(8)

其中, σ_0 表示观测值的精度。外部可靠性为^[1,7,8]:

$$\nabla_x = Q_{xx} A^T P e \nabla_e$$

(9)

3 卡尔曼滤波的可靠性

卡尔曼滤波与序贯最小二乘的等价性使得卡尔曼滤波的可靠性可通过最小二乘的可靠性进行研究。卡尔曼滤波的离散线性动力学和观测方程及其解算过程见文献[10]。根据最小二乘的可靠性理论以及卡尔曼滤波残差的协方差阵,可得卡尔曼滤波观测方程和动力学方程的可靠性计算方法。

3.1 观测方程的可靠性

将式(3)表示为卡尔曼滤波的观测方程形式,则卡尔曼滤波的残差及其相应的协方差阵为^[7]:

$$\begin{aligned} v_k &= H_k x_k - z_k = x_k^- + K_k (z_k - H_k x_k^-) \\ &\quad - R_k Q_{d_k}^{-1} d_k \\ Q_{v_k} &= R_k Q_{d_k}^{-1} R_k^T \end{aligned}$$

将上式代入式(8),可得观测方程的内部可靠性为:

$$\nabla_e = \frac{\sigma_0 \delta(e)}{\sqrt{e_i^T Q_{d_k}^{-1} e_i}}$$

(10)

代入式(9),可得残差的外部可靠性为:

$$\nabla_x = P_k H_k^T R_k^{-1} e_i \nabla_e$$

(11)

3.2 动力学方程的可靠性

为了检验卡尔曼滤波的动力学模型是否反映客观实际,可对预计状态向量进行假设检验。假设动力学模型的备选假设为:

$$E(x_k) = \Phi_k x_{k-1} + S \nabla_e$$

等价于对式(6)作如下的备选假设:

$$H_a: E(L) = HX + HS \nabla_e$$

根据式(7)可得动力学模型存在粗差时,粗差的估计值为:

$$\nabla_e = Q_{ee} S^T H_k^T R_k^{-1} Q_{VV} R_k^{-1} L$$

其中, $Q_{ee} = (S^T H_k^T R_k^{-1} Q_{VV} R_k^{-1} H_k S)^{-1}$ 。

根据式(8),在单粗差情况下卡尔曼滤波的动力学模型的内部可靠性为:

$$\nabla_e = \frac{\sigma_0 \delta(e)}{\sqrt{f_i^T H_k^T Q_{d_k}^{-1} H_k f_i}}$$

(12)

其中, f_i 表示第 i 个元素为 1,其他为 0。

4 实验与分析

为了对比两种方法的可靠性,采用 IGS 北京站 2010 年第 66 天 1 h 的数据进行静态实验分析。可观测卫星的高度角和方位角如图 1 所示,总卫星数为 10 颗。高度角会影响观测值的精度,根据截止高度角的不同,实际解算采用的卫星个数不同。本文采用 15° 的截止高度角,21 号、27 号和 31 号卫星全部或部分时间无法参与计算。为了考虑高度角对观测值精度的影响,采用 Bernese 的高度角正弦值平方的倒数进行加权。另外,假设载波相位和伪距观测值的中误差为 $\sigma_{cp} = 0.002 \text{ m}, \sigma_{pr} = 0.3 \text{ m}$ 。

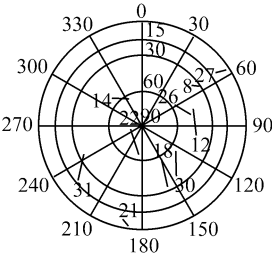


图 1 卫星可视图
Fig. 1 Visibility of Satellites

本文采用基于多余观测数和残差的两种方案研究载波相位和伪距的内部可靠性。载波相位的

最小可测偏差(MDB)值如图 2 所示,不同颜色代表图 1 中的每颗卫星。残差的 MDB 值为 cm 级,小于多余观测数的 MDB 值。多余观测数的 MDB 值大部分在 cm 级,部分为 dm 级。图 3 为两种方案的伪距 MDB 值,多余观测数的伪距 MDB 值介于 3.0~4.1 m 之间;残差的伪距 MDB 值大部分稳定在 2.0~3.5 m 之间,但个别存在剧烈变化。对比图 2 和图 3 可知,由于采用两种不同精度的观测值,多余观测数的载波相位和伪距 MDB 值没有明显的一致趋势,而残差的 MDB 值能够同时正确反映两种观测值的可靠性。同时,卫星数的增加提高了部分卫星的内部可靠性。

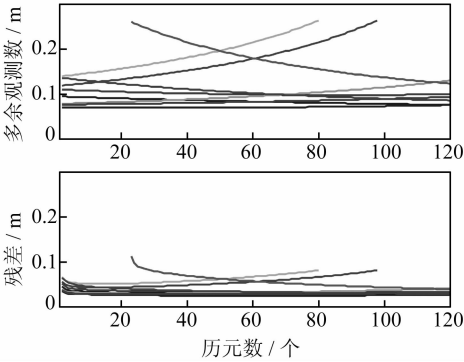


图 2 载波相位 MDB
Fig.2 MDB of Carrier Phase

图 2 和图 3 中 9 号和 27 号卫星的 MDB 值不断增大,新增加的 31 号卫星的 MDB 值不断减少,最后趋于稳定。为了研究这种不稳定情况的影响因素,将残差的载波相位和伪距 MDB 值与卫星高度角进行对比(图 4、5)。两图中的实线为卫星高度角,虚线为 MDB 值。随着 31 号卫星高

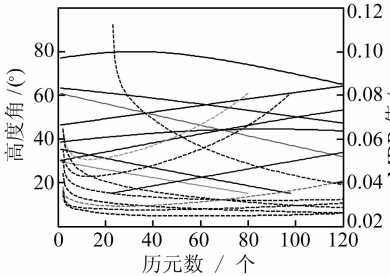


图 4 载波相位残差的 MDB
Fig. 4 Residuals-Based
MDB of Carrier Phase

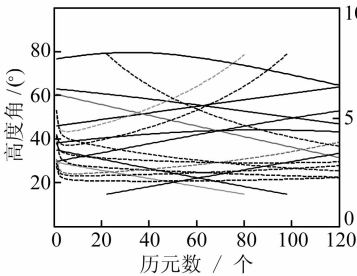


图 5 伪距残差的 MDB
Fig. 5 Residuals-Based
MDB of Pseudorange

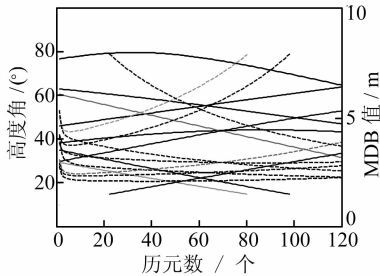


图 6 接收机坐标的 MDB
Fig. 6 MDB of Receiver
Coordinates

另外,根据式(10)可知,内部可靠性与观测值的精度有关。为了验证两者之间的关系,表 1 给出了不同观测值精度下的整个时段可观测卫星的 MDB 值。从表 1 中可以看出给定观测值精度不同,MDB 值也不同。精度越高,MDB 越小。载波

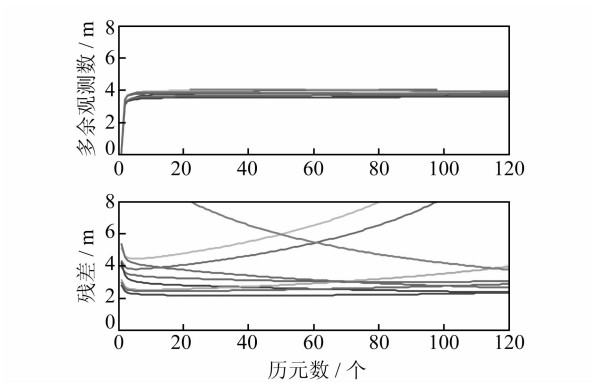


图 3 伪距 MDB
Fig. 3 MDB of Pseudorange

度角的不断增加,其对应的载波相位和伪距的 MDB 值不断减少。9 号和 27 号卫星随着高度角的不断降低,对应的载波相位和伪距 MDB 值不断增加。另外,从图中可以看出,当卫星高度角大于 40°时,MDB 值基本稳定在对应的最小值处,小于 40°时,MDB 值会不断增加,尤其当小于 30°时,MDB 值急剧增加。

卡尔曼滤波不仅包括观测值模型,还包括动力学模型。两种模型都可能存在粗差,在对观测值可靠性进行研究的基础上,需要对预计状态向量的可靠性进行研究。定位的目的是获得接收机坐标,其 MDB 如图 6 所示。第 22 个历元增加 31 号卫星,从而增加多余观测值和增强几何强度,使 x 和 z 方向坐标的内部可靠性得到明显提高。在第 80 和 98 历元时,由于 9 号和 27 号卫星的高度角太低无法用于参数估计,虽然没有引起 x 和 z 方向内部可靠性的明显变化,但却使 y 方向的内部可靠性明显降低。

相位观测值的 MDB 在 cm 到 dm 级,而伪距的 MDB 在 m 级。残差的 MDB 值小于多余观测数的 MDB 值。

可靠性不仅包括可发现粗差的下界值(内部可靠性),还包括不可测粗差对估计值的影响评价

表 1 内部可靠性比较
Tab. 1 Comparison of Internal Reliability

σ_{cp}		0.002		0.005	
σ_{pr}		0.3		0.5	
卫星号	观测值类型	多余观测分量	残差	多余观测分量	残差
12	载波相位	0.040	0.014	0.101	0.034
	伪距	3.404	1.823	3.811	3.039
14	载波相位	0.034	0.012	0.084	0.029
	伪距	3.178	1.522	3.684	2.538
18	载波相位	0.039	0.013	0.099	0.033
	伪距	3.359	1.787	3.784	2.979
22	载波相位	0.029	0.011	0.071	0.026
	伪距	2.966	1.292	3.561	2.154
26	载波相位	0.034	0.012	0.084	0.029
	伪距	3.184	1.518	3.692	2.529
30	载波相位	0.042	0.014	0.104	0.035
	伪距	3.420	1.886	3.817	3.145

(外部可靠性)。两种方案的载波相位和伪距的外部可靠性见图 7、8。当伪距的外部可靠性稳定时,载波相位的外部可靠性仍处于收敛过程。新增加卫星使载波相位的外部可靠性重新收敛,对伪距外部可靠性的影响小于载波相位。收敛之后,相位和伪距的外部可靠性都在 mm 级。两种方案的对比可以看出,残差的外部可靠性小于多余观测数的外部可靠性,这说明残差的不可测粗差对估计值的影响小于多余观测数。

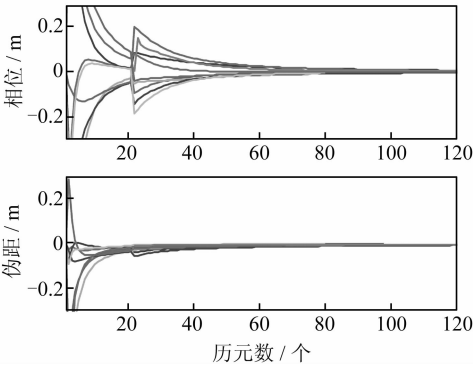


图 7 多余观测分量的外部可靠性
Fig. 7 External Reliability Based on Redundancy

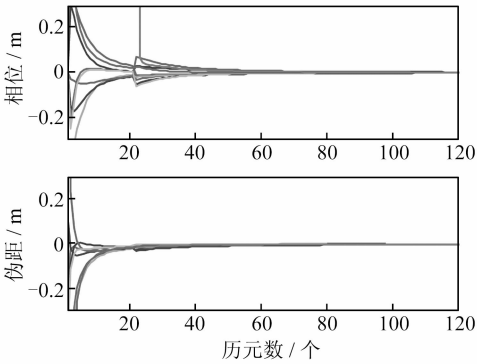


图 8 残差的外部可靠性
Fig. 8 External Reliability Based on Residuals

5 结 语

1) 观测方程的内部可靠性与观测值精度、卫星高度角和卫星几何结构有关。观测值的精度越高,内部可靠性越好;当高度角大于 40°时,内部可靠性处于稳定,小于 30°时,内部可靠性急剧下降;卫星几何结构好、卫星数多,内部可靠性强。

2) 与观测方程的内部可靠性相比,动力学方程的内部可靠性更好地反映了卫星几何结构和卫星数的影响。

3) 伪距的外部可靠性的收敛速度要快于载波相位,且收敛后对估计值的影响都在 mm 级。

致谢:感谢王金岭教授在各方面的指导。感谢国家海洋局第一研究所刘焱雄研究员和中国海洋大学范士杰副教授在软件开发方面的帮助。感谢同济大学胡丛玮副教授和 GFZ 陈俊平博士提供数据用以软件校正。

参 考 文 献

[1] Baarda W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks[J]. Netherlands Geodetic Commission, New Series, 1968,2(5):27-55

[2] Teunissen P J G. Quality Control in Integrated Navigation Systems[C]. IEEE PLANS, Las Vegas, 1990

[3] 李德仁,袁修孝. 误差处理与可靠性理论[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002

[4] 赵春梅,欧吉坤,袁运斌. 基于单点定位模型的 GALILEO 及 GPS-GALILEO 组合系统的定位精度和可靠性的仿真分析[J]. 科学通报,2005,50(8):811-819

[5] Guo Jianfeng, Ou Jikun, Yuan Yunbin. Reliability Analysis for a Robust M-estimator[J]. Journal of Surveying Engineering, 2011,137(1):9-13

[6] 柳响林,刘经南,杜道生. 卡尔曼滤波可靠性分析及在动态 GPS 定位中的应用[J]. 武汉测绘科技大学学报,1997,22(3):234-236,244

[7] Wang J, Stewart M P, Tsakiri M. On Quality Control in Hydrographic GPS Surveying[C]. The 3th Australasian Hydrographic Symposium, Fremantle, Australia, 1997

[8] Steve H, Wang Jinling. GNSS Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM) with a dynamic model[J]. Journal of Navigation, 2007,60(2):247-263

[9] Wang Jianguo. Reliability Analysis in Kalman Filtering[J]. Journal of Global Positioning Systems,

2009,8(1):101-111

[10] 许长辉,高井祥,王坚. GNSS/INS 组合系统的抗差卡尔曼滤波[J]. 中国矿业大学学报, 2010,39(5): 146-151

第一作者简介:许长辉,博士生,从事新一代 GNSS 精密单点定位模型及质量控制研究。
E-mail:changhui. xu@cumt. edu. cn

Reliability Analysis of Precise Point Positioning

XU Changhui¹ GAO Jingxiang¹ ZHOU Feng¹ WANG Jian¹

(1 School of Environmental Science and Spatial Informatics, China University of Mining and Technology, South Sanhuan Road, Xuzhou 221116, China)

Abstract: Anomaly of mathematical model in Kalman filter can be caused by various outliers in precise point positioning. To find out the minimal detectable biases(MDB) resulting from this anomaly and the effects of undetectable outliers on estimator, the reliability of Kalman filter is necessary. This reliability of both measurements and predicted state are derived according to the reliability theory of the least squares and compared with the reliability of traditional redundancy. The results show that the internal reliability of two methods is related not only with the precision of the observation, but also with satellite geometry as well as elevation. Meanwhile, the internal reliability of predicted state is more sensitive with geometry than the internal reliability of measurements. Although the external reliability of two methods is at mm level, the convergence of pseudorange is faster than carrier phase.

Key words: precise point positioning; reliability; redundancy; residuals

About the first author: XU Changhui, Ph. D candidate, majors in modeling and its quality control of next GNSS PPP.
E-mail: changhui. xu@cumt. edu. cn

武汉大学积极参与地理国情监测应用系统研制

近日,国家科技支撑计划“地理国情监测应用系统”项目启动准备会在武汉大学资源与环境科学学院召开。这是该项目启动前的最后一次准备会,从全局的角度对项目进一步进行了规划和探讨。

“地理国情监测应用系统”项目包含了基础地理国情监测技术体系、多尺度地理国情要素监测技术、地理国情监测技术平台及地理国情监测应用服务 4 个子课题,由国家测绘地理信息局、中国测绘科学研究院、国家测绘地理信息局卫星测绘应用中心、中国科学院地理科学与资源研究所、武汉大学、南京大学等研究机构和高校联合承担。其中,武汉大学资源与环境科学学院承担了第二课题“多尺度地理国情要素监测技术”的相关工作,主要负责人文地理国情要素监测内容体系和指标体系、监测关键技术研究、监测软件工具集研发、人文地理国情要素监测规范编制和要素监测技术验证研究等任务。