

地图数字化中基于点位坐标的统一平差模型

童小华^{1,2} 杜道生²

(1) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海市四平路1239号, 200092)

(2) 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉市珞喻路129号, 430079)

摘要: 探讨了地图数字化过程中采用平差方法来建立坐标计算的统一模型。将测得的角度、边长等数据化为方向、距离观测值列立误差方程, 通过调用统一的平差迭代计算程序来计算未知点坐标及精度。详细给出了基于平差的11种常用坐标计算方法, 并通过实例进行了说明。

关键词: 坐标计算; 最小二乘; 平差模型

中图法分类号: P207

在地图数字化和数字测图过程中, 地物点的坐标测量和计算是基础。在这些坐标计算中, 通常需要根据一些已知点(坐标值), 结合角度(方向)、距离等观测值以及地物之间存在的几何关系等来计算其他未知点的坐标^[1]。计算这些待定点的方法很多, 常用的主要有极坐标法、距离交会、方向交会、直线相交等^[2]。在上述这些坐标计算中, 传统方法是针对某一种情况, 根据图形的解析几何关系推导计算模型和编制算法。这些算法通常比较复杂, 缺乏通用性, 且估计待定点的精度时, 需要根据函数模型和误差传播定律来计算, 过程比较复杂。

1 坐标计算的平差原理

1.1 测边网的边长误差方程

设测边网中有一条观测边 S_{jk} , 则有如下误差方程:

$$v_{jk} = a_{jk}\hat{x}_j - b_{jk}\hat{y}_j - a_{jk}\hat{x}_k + b_{jk}\hat{y}_k - l_{jk} \quad (1)$$

式中, dX^0 和 dY^0 为坐标近似值之差; \hat{x} 、 \hat{y} 为坐标平差改正值; $a_{jk} = dX_{jk}^0/s_{jk}^0$; $b_{jk} = dY_{jk}^0/s_{jk}^0$; $l_{jk} = S_{jk} - S_{jk}^0$; $S_{jk}^0 = \sqrt{(dX_{jk}^0)^2 + (dY_{jk}^0)^2}$ 。

1.2 按方向坐标平差的误差方程

设 j 为测站点, k 为照准点, L_{jk} 为 $j-k$ 方向的观测值, Z_j 为 j 站的定向角, 则可得 $j-k$ 方向的误差方程:

$$v_{jk} = -\hat{z}_j + a_{jk}\hat{x}_j + b_{jk}\hat{y}_j - a_{jk}\hat{x}_k - b_{jk}\hat{y}_k - l_{jk} \quad (2)$$

式中, $a_{jk} = \rho \sin \alpha_{jk}^0 / S_{jk}^0$; $b_{jk} = \rho \cos \alpha_{jk}^0 / S_{jk}^0$; $\alpha_{jk}^0 = \arctan dY_{jk}^0 / dX_{jk}^0$; $l = -\alpha_{jk}^0 + L_{jk} + Z_j^0$; Z_j^0 是 Z_j 的近似值; Z_j 为 Z_j 的平差值; \hat{z}_j 是 Z_j 的平差改正值; α_{jk} 为 $j-k$ 方向的方位角平差值。

1.3 边角网间接平差

在数字化计算坐标时, 存在同时具有边长、方向(角度)观测值的情况, 因此是边角混合的误差方程。其中边长观测值误差方程如式(1), 方向(角度)观测值的误差方程如式(2)。

1.4 坐标计算的平差原理

如图1所示的极坐标法坐标计算中, 已知数据包括两个已知点 K_1 、 K_2 , 点 K_1 至点 P 的距离为 d , 观测的角度(K_1K_2 与 K_1P 的夹角)为 β , 以此计算未知点 P 的坐标。在平差方法中, 设已知点 $K_1(x_1, y_1)$ 、 $K_2(x_2, y_2)$ 和未知点 $P(\hat{x}_p, \hat{y}_p)$, 在 K_1 点设测站, 观测值包括观测方向 K_1-K_2 的值为 0 , K_1-P 的值为 β , K_1P 的边长为 d , 则有观测值 $n=3$, 未知参数 $t=3$ 。由式(1)和式(2), 可得如下3个坐标参数误差方程:

$$\left. \begin{aligned} v_{L_{12}} &= -\hat{z}_1 - l_{L_{12}} \\ v_{s_{1p}} &= -as_{1p}\hat{x}_p + bs_{1p}\hat{y}_p - ls_{1p} \\ v_{L_{1p}} &= -\hat{z}_1 - a_{L_{1p}}\hat{x}_p - b_{L_{1p}}\hat{y}_p - l_{L_{1p}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, 误差方程中的系数 $as_{1p}, bs_{1p}, al_{1p}, bl_{1p}$ 和参数项 $l_{s_{1p}}, l_{L_{12}}, l_{L_{1p}}$ 计算参照式(1)和式(2)。

在地图数字化过程中, 往往存在多余观测值来计算待定点的坐标, 则由式(1)~式(3)等可得坐标计算的平差模型一般形式:

$$V = A\hat{x} - L, \text{ 权为 } P \quad (4)$$

由此可计算参数的平差值为:

$$\hat{x} = (A^T PA)^{-1} (A^T PL) \quad (5)$$

当有足够的多余观测时, 单位权中误差的估值为:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}} \quad (6)$$

以及未知点坐标参数的协因数阵为:

$$Q_{xx} = (A^T PA)^{-1} \quad (7)$$

1.5 基于阻尼法的坐标平差迭代计算

在基于平差方法的坐标计算中, 线性化误差的影响不容忽略, 必须进行迭代平差^[3]。同时未知点坐标的初值可以任意选取, 例如在地图数字化过程中, 如图1中的点P坐标计算时, 可以在数字化图上任意点取在P点附近的某个点作为其平差计算的初值。本文对误差方程式(4)采用Levenberg-Marquardt 阻尼最小二乘法进行迭代计算^[4], 以克服由于初值取值以及线性化过程中的模型误差而可能导致无法平差的影响。迭代计算的公式为:

$$\begin{aligned} d^{(k)} &= (A(\hat{x}^{(k)})^T PA(\hat{x}^{(k)}) + u_k I)^{-1} A(\hat{x}^{(k)})^T PL(\hat{x}^{(k)}) \\ \hat{x}^{(k+1)} &= \hat{x}^{(k)} + d^{(k)} \end{aligned} \quad (8)$$

式中, u_k 为称阻尼因子, 是一个非负实数, I 为单位矩阵。可知当 $u_k = 0$ 时, 该法趋于Gauss-Newton法; 当 $u_k = \infty$ 时, 则趋于最速下降法。通常 u_k 取值较小时迭代次数较少, u_k 取值较大时迭代次数也较多。在坐标平差迭代计算时, 首先取 $u_k = 10^{-3}$ 来求 $d^{(d)}$, 若 $V^T(\hat{x}^{(k+1)})PV(\hat{x}^{(k+1)}) < V^T(\hat{x}^{(k)})PV(\hat{x}^{(k)})$, 则取 $u_k = u_k/10$ 进行下一步迭代; 否则取 $u_k = 10 u_k$ 。实际计算表明, 该方法可以放宽对初值的限制, 在坐标平差计算中具有实用性。

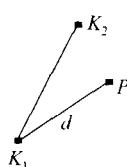


图1 极坐标法

Fig. 1 Polar Coordinate Method

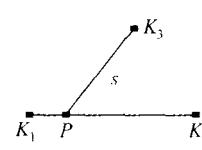


图2 距离直线交点法

Fig. 2 Distance and Line Intersection Method

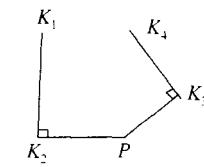


图3 垂线交点法

Fig. 3 Perpendicular Line Intersection Method

2 基于点位坐标的统一平差模型

为了说明方便, 定义如下符号来代表各种已知和观测数据: n_0 为已知点个数; n_z 为测站点个数; n_p 为总点数; n_1 为观测角方向个数; n_2 为观测边个数; n_a 为方向结点存放数组; n_b 为测边结点存放数组; L_1 为方向角数组; L_2 为观测边长数组。

1) 极坐标法

如图1所示, 本算法中已知点 $K_1(1)$ 、 $K_2(2)$, 未知点 $P(3)$, 在 K_1 设测站, 观测方向 K_1-K_2 、 K_1-P 以及边长 d 。按照上述符号定义, 可将这些数据写成如下形式: $n_0 = 2$; $n_p = 3$; $n_z = 1$; $n_1 = 2$; $n_2 = 1$; $n_a(1, 1) = 1$, $n_a(1, 2) = 2$, $L_1(1) = 0$, 1-2 方向角为 0; $n_a(2, 1) = 1$, $n_a(2, 2) = 3$, $L_1(2) = \beta$, 1-3 方向角为 β ; $n_b(1, 1) = 1$, $n_b(1, 2) = 3$, $L_2(1) = d$, 1-3 边长为 d 。

由此计算未知点 P 的坐标(X_3, Y_3)和测站1的定向角 Z_1 。由上述已知数据, 根据边长、方向观测值建立坐标参数误差方程, 经迭代计算可求得待定点 P 的坐标。

2) 距离直线交点法

如图2所示, 已知数据为已知直线端点 K_1 、 K_2 , 第三个已知点 K_3 , 以及未知点 P 与 K_3 的距离 S 。本算法中已知点 $K_1(1)$ 、 $K_2(2)$ 、 $K_3(3)$, 未知点 $P(4)$, 在 P 点设测站, 观测方向 $P-K_2$ 、 $P-K_1$ 以及 $P-K_3$ 边长 S 。将这些数据写成矩阵形式如下: $n_0 = 3$; $n_p = 4$; $n_z = 1$; $n_1 = 2$; $n_2 = 1$; $n_a(1, 1) = 4$, $n_a(1, 2) = 1$, $L_1(1) = 0$, 4-1 方向角 0; $n_a(2, 1) = 4$, $n_a(2, 2) = 2$, $L_1(2) = 180$, 4-2 方向角 180°; $n_b(1, 1) = 4$, $n_b(1, 2) = 3$, $L_2(1) = S$, 4-3 边长 S 。

根据以上数据, 可列立包括方向和边长的误差方程, 以进行坐标平差计算。

3) 垂线交点法

如图3所示, 已知数据为一条已知直线(端点为 K_1 、 K_2)和另一条已知直线(端点为 K_3 、 K_4),

过点 K_2 作与直线 K_1K_2 相垂直的直线, 以及过 K_3 点作与直线 K_3K_4 垂直的直线, 点 P 为这两直线的交点。本算法中设已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)、K_4(4)$, 未知点 $P(5)$, 在 $K_2、K_3$ 设测站, 观测方向包括 $K_2-K_1、K_2-P、K_3-P、K_3-K_4$ 。将这些数据可类似地写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} n^0 &= 4; n_p = 5; n_z = 2; n_1 = 4; n_2 = 0; \\ n_a(1, 1) &= 2, n_a(1, 2) = 1, L_1(1) = 0, 2-1 \text{ 方向角 } 0 \\ n_a(2, 1) &= 2, n_a(2, 2) = 5, L_1(2) = 90, 2-5 \text{ 方向角 } 90^0; \\ n_a(3, 1) &= 3, n_a(3, 2) = 4, L_1(3) = 0, 3-4 \text{ 方向角 } 0; \\ n_a(4, 1) &= 3, n_a(4, 2) = 5, L_1(4) = 90, 3-5 \text{ 方向角 } 90^0 \end{aligned}$$

4) 插值法

如图 4 所示, 已知数据为一条已知直线(端点 $K_1、K_2$), 以及未知点 P 与已知直线的第一个端点 K_1 的距离 d 。本算法中, 已知点 $K_1(1)、K_2(2)$, 未知点 $P(3)$, 在 P 设测站, 观测方向包括 $P-K_2、P-K_1$ 以及 $P-K_1$ 边长 d , 将这些数据写成矩阵形式如下: $n^0 = 2, n_p = 3, n_z = 1, n_1 = 2, n_2 = 1; n_a(1, 1) = 3, n_a(1, 2) = 1, L_1(1) = 0, 3-1 \text{ 方向角 } 0; n_a(2, 1) = 3, n_a(2, 2) = 2, L_1(2) = 180, 3-1 \text{ 方}$

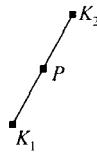


图 4 插值法

Fig. 4 Interpolation Method

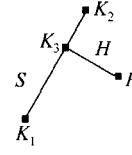


图 5 直角坐标法

Fig. 5 Rectangular Coordinate Method

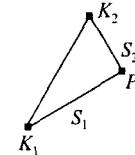


图 6 距离交会法

Fig. 6 Distance Intersection Method

7) 变形距离交会

如图 7 所示, 已知数据为未知点 P 与一已知直线 K_1K_2 的垂距 h , 以及与第三个已知点 K_3 的距离值 S 。在本算法中, 已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)$, 未知点 $K_4(4)、P(5)$, 在 K_4 设测站, 观测方向包括 $K_4-K_2、K_4-K_1、K_4-P$, 边长观测值包括 $P-K_4$ 的垂距 h 、 $P-K_3$ 的边长 S 。

8) 方向交会

如图 8 所示, 已知数据为未知点 P 与点 K_1 的连线与已知直线 K_1K_3 所成角度 e_1 , 以及 PK_2 与已知直线 K_2K_4 所成角度 e_2 。在本算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)、K_4(4)$, 未知点 $P(5)$, 在 $K_1、K_2$ 设测站, 观测方向角 K_1-K_3 、 K_1-P 、 K_2-P 和 K_2-K_4 , 则将这些数据写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} n^0 &= 4; n_p = 5; n_z = 2; n_1 = 4; n_2 = 0; \\ n_a(1, 1) &= 1, n_a(1, 2) = 3, L_1(1) = 0, 1-3 \text{ 方向角 } 0; \\ n_a(2, 1) &= 1, n_a(2, 2) = 5, L_1(2) = e_1, 1-5 \text{ 方向角 } e_1; \\ n_a(3, 1) &= 2, n_a(3, 2) = 4, L_1(3) = 0, 2-4 \text{ 方向角 } 0; \end{aligned}$$

向角 180^0 ; $n_b(1, 1) = 1, n_b(1, 2) = 3, L_2(1) = d$, 1-3 边长 d 。

5) 直角坐标

如图 5 所示, 已知数据为一条已知直线(端点为 $K_1、K_2$), 未知点 P 与已知直线的垂直距离 H , 未知点 P 在已知直线上的垂足点与已知直线的第一个端点 K_1 的距离 S 。本平差算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)$, 未知点 $K_3(3)、P(4)$, 在 K_3 设测站, 观测方向包括 $K_3-K_2、K_3-K_1、K_3-P$, 边长包括 $P-K_3$ 的垂距 H 及 K_1-K_3 的边长 S 。

6) 距离交会

如图 6 所示, 已知数据为未知点 P 与两已知点 $K_1、K_2$ 的距离 S_1 和 S_2 (为消除二义性, 可设 $K_1、K_2、P$ 为顺时针排列)。在坐标平差计算算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)$, 未知点 $P(3)$, 在 P 点设测站, 观测边长 K_1-P 、 K_2-P , 则将这些数据写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} n^0 &= 2; n_p = 3; n_z = 0; n_1 = 0; n_2 = 2; \\ n_b(1, 1) &= 3, n_b(1, 2) = 1, L_2(1) = S_1, 3-1 \text{ 边长 } S_1; \\ n_b(2, 1) &= 3, n_b(2, 2) = 2, L_2(2) = S_2, 3-2 \text{ 边长 } S_2. \end{aligned}$$

$$n_a(4, 1) = 2, n_a(4, 2) = 5, L_1(4) = e_2, 2-5 \text{ 方向角 } e_2.$$

9) 直线相交

如图 9 所示, 已知数据为两已知直线 K_1K_3 、 K_2K_4 , 未知点为两直线的交点 P 。在本算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)、K_4(4)$, 未知点 $P(5)$, 在 P 点设测站, 观测方向包括 $P-K_2$ 、 $P-K_4$ 、 $P-K_1$ 、 $P-K_3$ 。

10) 求垂足

如图 10 所示, 已知数据为已知点 K_3 和已知直线 K_1K_2 , 未知点为 K_3 和已知直线 K_1K_2 的垂足点 P 。在本算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)$, 未知点 $P(4)$, 在 P 点设测站, 观测方向为 $P-K_2$ 、 $P-K_1$ 、 $P-K_3$ 。

11) 直线垂线距离交点

如图 11 所示, 已知数据为未知点 P 与已知直线 K_1K_2 的垂直距离值 S_1 , 和未知点与已知直线 K_3K_4 的垂直距离值 S_2 。本算法中, 设已知点 $K_1(1)、K_2(2)、K_3(3)、K_4(4)$, 未知点 $P(5)、K_5(5)、K_6(6)$, 在 $K_5、K_6$ 设测站, 观测方向包括 K_5-K_6 。

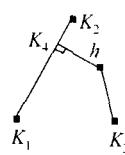


图7 变形距离交会法

Fig. 7 Alternative Distance Intersection Method

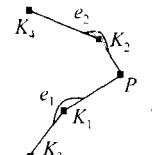


图8 方向交会法

Fig. 8 Direction Intersection Method

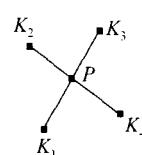


图9 直线交会法

Fig. 9 Line Segment Intersection Method

$K_1, K_5-K_2, K_5-P, K_6-K_3, K_6-K_4, K_6-P$, 则可将这些数据写成矩阵形式如下:

$$n_0 = 4; n_p = 7; n_z = 2; n_1 = 6; n_2 = 2;$$

$$n_a(1, 1) = 5, n_a(1, 2) = 1, L_1(1) = 0, 5-1 \text{ 方向角 } 0;$$

$$n_a(2, 1) = 5, n_a(2, 2) = 7, L_1(2) = 90, 5-7 \text{ 方向角 } 90^\circ;$$

$$n_a(3, 1) = 5, n_a(3, 2) = 2, L_1(3) = 180, 5-2 \text{ 方向角 } 180^\circ;$$

$$n_a(4, 1) = 6, n_a(4, 2) = 3, L_1(4) = 0, 6-3 \text{ 方向角 } 0;$$

$$n_a(1, 1) = 6, n_a(1, 2) = 7, L_1(1) = 90, 6-7 \text{ 方向角 } 90^\circ;$$

$$n_a(2, 1) = 6, n_a(2, 2) = 4, L_1(2) = 180, 6-4 \text{ 方向角 } 180^\circ;$$

$$n_b(1, 1) = 7, n_b(1, 2) = 5, L_2(1) = S_1, 7-5 \text{ 边长 } S_1;$$

$$n_b(2, 1) = 7, n_b(2, 2) = 6, L_2(2) = S_2, 7-6 \text{ 边长 } S_2.$$

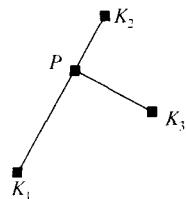


图10 垂足法

Fig. 10 Perpendicular Point Method

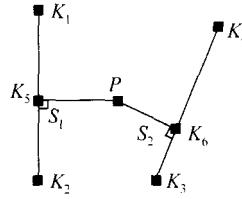


图11 直线垂线距离交点法

Fig. 11 Perpendicular Line Intersection Method

12) 混合模型

在地图数字化过程中, 往往是上述基本模型的组合, 可按照上述平差算法, 将观测值分为方向和边长两类, 分别以§2.1定义的矩阵和数组存放已知点数和点号、测站数、观测值个数以及观测值数组, 组成如式(5)的误差方程, 然后调用一个统一、通用的平差计算模块, 将这些数据作为参数

输入, 最后经数次迭代计算得到未知点的坐标值, 并在有多余观测时可以进行坐标平差的精度估计。

3 算 例

限于篇幅, 以极坐标法计算坐标为例, 比较一般常规方法和基于平差算法的差异。如图2所示, 两个已知点 $K_1(100 \text{ m}, 100 \text{ m})$ 、 $K_2(200 \text{ m}, 200 \text{ m})$, 点 K_1 至未知点 P 的距离 $S = 100 \text{ m}$, K_1K_2 与 K_1P 的夹角为 $\beta = 45^\circ$ 。采用常规方法计算步骤如下:

1) 计算 K_1K_2 的坐标方位角 $\alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 45^\circ$;

2) 计算参数 $a = S \cos \alpha_{12} = 70.7, b = S \sin \alpha_{12} = 70.7$;

3) 计算未知点 P 的坐标:

$$\begin{aligned} x_p &= x_1 + a \cos \beta - b \sin \beta = 199.97 \text{ m} \\ y_p &= y_1 + a \sin \beta + b \cos \beta = 100.00 \text{ m} \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

可得 P 点坐标为(199.97, 100)。

采用本文的平差计算方法, 根据图2中的几何关系, 在数字化过程中点取 P 的大概位置, 得到 P 点坐标初始值为(189, 86), 由此根据误差方程(4)和§2.1的符号定义, 得到如表1所示的误差方程系数和常数项。

根据阻尼最小二乘法进行平差计算, 经过5次迭代计算得 P 点坐标(200, 100), 可见其结果比常规方法准确, 而常规方法由于存在计算误差, 其精度不如平差方法高。实际应用表明, 对于更复杂的计算, 平差方法具有更大的优势。

表1 坐标计算的误差方程系数和常数项

Tab. 1 Error Equation Coefficients and Constants in Coordinate Computation

	\hat{z}_1	\hat{x}_p	\hat{y}_p	权		常数项
方向误差	-1	0	0	方向观测值的权	1 0	方向误差方程 0
方程系数	-1	355.76	2261.6		0 1	356 180''
边长误差	0	0.98785	-0.1554	边长观测值的权	1	边长误差方程 9.9056 m
方程系数						

4 结语

1) 采用平差方法来计算点坐标, 将测得的角度、边长数据化为方向、距离观测值来列立误差方程, 通过解法方程得出未知点坐标及精度, 通过调用通用的平差程序, 提高了计算的精度, 且算法简单、通用。

2) 采取最小二乘阻尼法进行平差迭代计算, 实现了根据地物之间存在的几何关系图形化地指定未知点的初值, 经过迭代后可以得到精确的结果。根据本文讨论的基于平差计算坐标的原理, 该算法已经作为一个独立的模块应用于数字测图和地图数字化软件中, 具有较好的实用效果。

参考文献

- [1] Goodchild M F. Measurement-based GIS [C] // Shi Wenzhong, Fisher P F, Goodchild M F. Spatial Data Quality. London: Taylor & Francis Press, 2000: 1-4
- [2] 陈龙飞. 地籍管理 [M]. 上海: 百家出版社, 1990
- [3] 刘大杰, 史文中, 童小华, 等. GIS 空间数据精度分析与质量控制 [M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999
- [4] 范东明. 非线性最小二乘参数平差迭代算法 [J]. 测绘学院学报, 2001, 18(3): 173-175

第一作者简介: 童小华, 教授, 博士, 博士后, 博士生导师。主要研究方向为 GIS 数据误差处理与质量控制。已发表论文 80 余篇, 其中 SCI、EI 收录 30 余篇。

E-mail: tongxhtj@yeah.net

A Universal Coordinate Computation Model Based on Least Squares Adjustment Method

TONG Xiaohua^{1,2} DUDaosheng²

(1) Department of Surveying and Geoinformatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China)

(2) State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: This paper presents a universal model for calculating point coordinates based on least squares adjustment method. The measured angles and distances are first converted into the direction and distance observations, then the error equations are constructed and the unknown coordinate parameters and accuracy are derived from a universal iterative adjustment computation. The proposed model has the characteristics of high accuracy and generic algorithm. Using Levenberg-Marquardt least squares iterative adjustment, initial values of unknown points are given graphically according to the geometric relationship among the measured objects, and the results are obtained robustly. The often-used total eleven coordinate calculation methods are derived on the basis of the proposed model in detail, and the implementation of the model is illustrated through a case study.

Key words: coordinate computation; least squares; adjustment model

About the first author: TONG Xiaohua, professor, Ph.D, post fellow doctor, Ph.D supervisor. His major research field is spatial data error processing and quality control. He has published over 80 papers, in which 30 papers are indexed by SCI and EI. His representative contributions include spatial data accuracy analysis and quality control in GIS, a least squares-based method for adjusting the boundaries of area objects, etc.

E-mail: tongxhtj@yeah.net