文章编号: 1671-8860(2006)03-0189-05
文献标志码: A

利用卫星重力数据确定地球外部重力场的一种方法及模拟实验检验

申文斌[1,2]　王正涛[1]　晁定波[1,2]

(1　武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)
(2　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

摘　要: 假定给定了海量的卫星重力观测数据, 基于球谐展开法并应用最小二乘原理可以确定地球重力场模型 EGM, 由此确定的重力场模型在地球表面附近的空间区域未必有效。设想有一个包含了地球的大球 K_S, 假定 EGM 在大球的外部成立, 则可根据虚拟压缩恢复法求出一种新的重力场模型 NEGM, 它是对原有重力场模型的进一步精化, 适合于整个地球外部空间, 从理论上可以解决重力场的"向下延拓"问题。初步的模拟实验检验支持虚拟压缩恢复法以及由此而引申出的"向下延拓"法。

关键词: 卫星界面数据; 虚拟压缩恢复; 向下延拓法; 模拟实验检验
中图法分类号: P223.0

卫星技术的发展(如已发射的 CHAMP 和 GRACE 卫星系统以及即将发射的 GOCE 卫星系统)提供了一种可能性, 可以获取卫星界面 ∂S 上的重力数据(CHAMP 和 GRACE 卫星系统载有加速度计, GOCE 卫星系统将载有重力梯度仪)。卫星界面 ∂S 是指卫星绕地球的多次飞行所覆盖的假想的简单封闭曲面, 它与位于地心处的球面之间存在"简单连续双射"(即由径向射线所决定的两个面之间的一一对应)。如何根据卫星重力数据有效地建立较精确的地球重力场模型是地球科学界普遍关注的热点研究课题, 其中要解决的关键问题之一是怎样将基于卫星重力数据求得的场(引力位场或引力场)向下延拓到地球表面。基于虚拟压缩恢复法[1] 给出的向下延拓法[2] 可以解决上述问题。

1　传统方法

1.1　向下延拓

根据卫星重力数据(无论是引力位、引力, 还是引力梯度) 确定或精化地球外部重力场, 需要进行向下延拓。然而, 众所周知, 传统的向下延拓法具有或多或少的不确定性[3,4], 即不能根据卫星重力数据完全恢复地球外部重力场, 其中的一个主要原因是在下延过程中误差的显著放大作用。从本质上讲, 这种"不确定性"是由方法本身的局限性所决定的。

1.2　球谐展开法

根据卫星重力数据(无论是利用引力观测值还是引力梯度观测值)确定地球外部重力场模型, 通常采用如下的球谐展开法[3-5]:

$$V(P) = GM\left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\cdot\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta)\right] \quad (1)$$

然后利用海量的观测数据(建立观测方程)通过截断并采用最小二乘原理确定球谐系数(即将 n 从 1 到无穷的求和变成从 1 到某个有限数 N 的求和, 这时只有有限个未知的球谐系数), 并以此作为整个地球外部的重力场模型(因为对位场作梯度运算然后再加上离心力场即得重力场)。在方程(1)中, G 是引力常数, M 是地球质量。通常可将 GM 作为未知参数一并解出, 称为地心引力常数。r 是坐标系原点至场点的距离, θ 和 λ 分别是场点的极矩和经度, $P_{nm}(\cos\mu)$ 是 Legendre 缔合多项式, a 是地球的平均赤道半径(6 378

收稿日期: 2005-12-31。
项目来源: 国家自然科学基金资助项目(40574004; 40174004); 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金(测绘基础研究)资助项目(03-04-13)。

km)，a_{nm}和b_{nm}是有待确定的常系数。

采用球谐展开法会遇到困难，即无法保证球谐展开在地球表面附近的空间是收敛的[6-8]；同时，卫星界面并不构成整个地球外部场的边界条件，因而这种方法的严密性受到质疑。在实际应用中，总是将球谐展开截断。球谐展开的阶次越高，表明模型越精确。但在地球表面附近，由于不能保证球谐展开(1)的收敛性，这势必限制了球谐展开模型在地面附近区域的可靠性，尽管由于采取了截断技术而避免了发散性问题。

实际上，球谐展开适用于能包含整个地球Ω的最小的球K_B即Brillouin球[9]的外部[6,8]，在Brillouin球面∂K_B与地面$\partial\Omega$之间的区域($\overline{\Omega}-\overline{K_B}$)之中就未必成立[6-8]($\overline{\Omega}$和$\overline{K_B}$分别表示地球以及Brillouin球的外部区域)，因为在这一区域球谐展开甚至没有定义(关于这一问题的详细讨论将专门撰文)。利用椭球谐展开法也可以确定地球外部重力场[3](比如正常重力场即可用椭球谐展开精确表示)，适合于包含整个地球的最小的椭球E_m的外部，但在地面$\partial\Omega$与上述椭球面∂E_m之间的区域($\overline{\Omega}-\overline{E}_m$)之中仍然不能确定($\overline{E}_m$表示$E_m$的外部区域)。

通常的一种直观的观念认为，根据卫星(重力)数据确定了球谐系数(或称位系数)之后就得到了地球外部的位模型(或重力场模型)。但不少学者的研究表明，球谐展开在地面附近有可能发散[6-8]。实际上，按通常的边值问题理解，根据上述方式得到的重力场模型只代表了卫星界面∂S以外的重力场模型，相当于以卫星界面为边界求出了卫星界面外部空间的解。不过，根据新近的研究[2]，这种球谐展开级数解可以"自然延拓"至Brillouin球面∂K_B为止(若采用椭球谐展开，则可"自然延拓"到椭球面∂E_m)。但在Brillouin球面∂K_B与地球表面$\partial\Omega$之间的区域之中，上述"自然延拓"就未必成立，这是由方法本身的限制所决定的。所谓"自然延拓"，是指保持原有的表述形式不变，而且球谐系数也不变。

基于中国大陆某些区域的地面重力观测资料对国际上公认的EGM96模型[10]和EIGEN-2模型[11]进行了检验，研究者发现地面重力观测值与卫星重力场模型(特别是EIGEN-2，因为EGM96的建立还利用了部分区域的地面重力观测数据)之间的差异高达十几mGal直到几十mGal左右，但模型EGM96和EIGEN-2本身的精度(这两个模型的精度大体相同)大约几mGal(在卫星界面附近)，远远高于上述差异。比如，EIGEN-2的内符合精度已达到cm级[11]。这很有可能暗示了用球谐展开法所确定的重力场模型(EIGEN-2或EGM96)的不足之处，但要作出最终的论断还有待进一步研究。

2 确定地球外部重力场的虚拟压缩恢复法

2.1 确定卫星界面外部空间的重力场

如果给定了卫星界面∂S上的引力值$\frac{\partial V}{\partial x_i}|_{\partial S}$，基于虚拟压缩恢复法可以精确确定卫星界面外部的引力场$\frac{\partial V}{\partial x_i}$[1,12]。如果给定了卫星界面上的引力梯度$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}|_{\partial S}$，则可首先利用虚拟压缩恢复法求出卫星界面外部空间的引力梯度场$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$，然后通过一次积分即可求出上述空间范围的引力场。虚拟压缩恢复法的基本原理可参见文献[1]。实际上，对于任意一个正则调和函数u，只要给定了边界值$u|_{\partial S}$，即可求出一个在虚拟球外部正则调和的虚拟场u^*，它在边界面∂S的外部与真实场u重合[12]。

2.2 确定整个地球外部空间的重力场

综上所述，只要给定了卫星界面重力数据，即可求出卫星界面外部的解。进一步的研究表明，基于虚拟压缩恢复法得到的虚拟场V^*不仅在卫星界面外部与真实场一致，而且在卫星界面与地面之间也是如此。这一结论已在文献[2]中得到了证明。

3 利用卫星重力场模型精化重力场

一旦在包含了地球的边界∂S上给定了由地球产生的边界值$V_{\partial S}$，虚拟场$V^*(P)$ $(P\in\overline{K})$就惟一地确定了，它在地球的外部与真实场$V(P)$重合[2]，其中，$\overline{K}$表示虚拟球K的外部区域。

在实际应用中，若有可能，总是将简单曲面∂S选为球面∂K_S，因为这并不影响所欲求解的场。当然，如果给定的是卫星界面∂S上的观测值$V_{\partial S}$，则不能改变卫星界面。

3.1 利用EIGEN-2确定重力场

现在假定卫星重力场模型EIGEN-2在Brillouin球的外部是正确的，但在地面与Brillouin球面之间的区域之中未必正确，其理论基础是球谐展开可以一直"自然延拓"到Brillouin球面[2,6]。

选取一个球面∂K_S，其半径比如取为 R_S = 6 600 km, 球面的内部域记为K_S，外部域记为$\overline{K_S}$。根据 EIGEN-2 可以求得边界∂K_S上的边界值 $V_{\partial K_S}$，并假定其平均中误差为 $\delta V_{\partial K_S}$。取虚拟球或 Bjerhammar 球[13, 14] K(其边界记为∂K)的半径比如为 R= 6 300 km。现在，利用边界值 $V_{\partial K_S}$，在两个球面∂K_S 和∂K 之间进行"虚拟压缩恢复"，从而得到分布于虚拟球面上的"虚拟边界值" $V^*_{\partial K}$，由此可确定整个地球外部的引力位场。

根据文献[15] 的研究, 就引力位而言，向下延拓误差按因子 $1+\dfrac{h}{R_s}$增加, 其中 h 是场点(这里的场点位于地面与大球面之间) 至大球面∂K_S的最短距离。由于 h 的量级大约为 300 km 左右, 放大因子 $1+\dfrac{h}{R_s}$几乎等于 1(R_S= 6 600 km)，由此而引起的误差放大作用可以忽略不计。这也是虚拟压缩恢复法的优越性之一。

3.2　初步模拟实验检验

为了检验理论的正确性, 进行了初步的模拟实验检验。其具体做法是，选取了两个球面∂K_1和∂K_2, 其半径分别为 R_1 = 6 338 km 和 R_2 = 6 800 km。显然, 小球(即虚拟球)处于地球的内部, 而大球包含了地球, 满足理论上的要求。基于国际上公布的 360 阶 EGM96 模型, 采用 10°×10°网格，可给出分布在小球上的 648 个边界值 $V_{(i)}|_{\partial K_1}$(i = 1, 2, …, 648)，其范围从 − 83.676 m^2s^{-2} ~ + 64.869 m^2s^{-2}不等。由此可按 Poisson 积分计算出分布在大球上的 648 个网格值 $V_{(i)}|_{\partial K_2}$(i= 1, 2, …, 648)。值得注意的是，这里采用了模拟计算, 并非要求分布在小球上的值具有真实性，只是借助于 EGM96 模型给出了某种可能的分布, 然后利用 Poisson 积分求出了大球上的分布。这样，整个外部场是已知的。然后假想只知道大球上的分布，利用虚拟压缩恢复法反过来求小球上的虚拟分布，再与原来给定的小球上的虚拟分布进行比对。正是由于这一原因, 笔者没有利用 CHAMP 卫星的数据, 因为由此而求出的场不知是否真实。作为模拟实验检验, 必须事先知道一个已知的场。假定(通过各种模拟实验验证了) 虚拟压缩恢复法是完全正确的，那么，利用 CHAMP 卫星数据(比如分布于卫星界面上的引力位) 即可建立真实的地球外部重力场模型。这是即将进行的后续工作。

现在假定分布在大球上的 $V_{(i)}|_{\partial K_2}$(i= 1, 2, …, 648)是"观测值"，以此来确定整个地球外部的位场(特别是确定由地面到大球之间的位场)。按照虚拟压缩恢复法，经过 13 次压缩和恢复，由边界值 $V_{(i)}|_{\partial K_2}$(i= 1, 2, …, 648) 得到了分布在小球上的虚拟边界值 $V^*_{(i)}|_{\partial K_1}$($i$ = 1, 2, …, 648)，这些边界值与相应的真值 $V_{(i)}|_{\partial K_1}$(i = 1, 2, …, 648) 的差异均小于 0.04, 这相当于 0.4 cm 量级, 满足目前的精度要求。

表 1 列出了实验检验结果, 支持虚拟压缩恢复法以及由此而发展的"虚拟向下延拓法"。

表 1　模拟实验结果

Tab.1　Simulation Experimental Results

格网号	纬度/(°)	经度/(°)	$V_{\partial K_1}$	$V_{\partial K_2}$	$V^*_{\partial K_1}$	$V^*_{\partial K_2}$	$V_{\partial K_1}-V^*_{\partial K_1}$	$V_{\partial K_2}-V^*_{\partial K_2}$
1	−85.0	−75.0	−31.800	−28.652	−31.840	−28.650	10.040	−0.001
2	−75.0	−175.0	−47.101	−41.139	−47.092	−41.139	−0.009	0.000
3	−65.0	−175.0	−42.160	−37.858	−42.161	−37.858	0.001	0.000
4	−55.0	−175.0	−25.688	−24.007	−25.688	−24.007	0.000	0.000
5	−45.0	−175.0	−0.908	−1.282	−0.909	−1.282	0.001	0.000
6	−35.0	−175.0	19.556	21.116	19.556	21.116	0.000	0.000
7	−25.0	−175.0	32.045	36.960	32.045	36.960	0.000	0.000
8	−15.0	−175.0	33.070	40.449	33.070	40.449	0.000	0.000
9	−5.0	−175.0	22.610	30.497	22.609	30.497	0.001	0.000
10	5.0	−175.0	16.271	22.368	16.271	22.368	0.000	0.000
11	15.0	−175.0	10.079	13.767	10.078	13.767	0.001	0.000
12	25.0	−175.0	2.090	3.640	2.090	3.640	0.000	0.000
13	35.0	−175.0	−6.356	−5.181	−6.356	−5.181	0.000	0.000
14	45.0	−175.0	−3.133	−2.584	−3.134	−2.584	0.001	0.000
15	55.0	−175.0	3.824	3.357	3.825	3.357	−0.001	0.000
16	65.0	−175.0	4.553	4.116	4.556	4.117	−0.003	−0.001
17	75.0	−175.0	2.122	2.165	2.122	2.164	0.000	0.001
18	85.0	−175.0	6.805	7.315	6.790	7.312	0.015	0.003
19	−85.0	−165.0	−31.843	−28.702	−31.822	−28.701	−0.021	−0.001
20	−75.0	−165.0	−46.912	−40.824	−46.901	−40.821	−0.011	−0.003
…	…	…	…	…	…	…	…	…

表1只列出了部分计算结果。第一列是格网号, 第二和第三列是对应格网(中心)的纬度和经度。第四列给出了半径为 R_1= 6 338 km 的小球上的边界值 $V_{\partial K_1}$(作为真值, 单位是 m^2s^{-2}), 第五列是由 $V_{\partial K_1}$ 按 Poisson 积分求出的分布于半径为 R_2= 6 800 km 的大球上的"真值" $V_{\partial K_2}$, 它被假定为"观测值"。第六列给出了按照虚拟压缩恢复法, 根据边界值 $V_{\partial K_2}$ 求出的分布于小球上的虚拟边界值 $V^*_{\partial K_1}$。第七列是根据小球上的虚拟边界值 $V^*_{\partial K_1}$(基于 Poisson 积分)求出的分布于大球上的虚拟边界值。最后两列给出了大小球面上的真值与相应的虚拟值之差。最大差异为 0.04 m^2s^{-2}, 相当于 0.4 cm 的高程差(0.4 cm= 0.04 m^2s^{-2}/10 ms^{-2} ≈ 0.04 m^2s^{-2}/γ, 其中 γ 是地球表面的正常重力)。数值模拟计算结果支持虚拟压缩恢复法以及由此而导出的"向下延拓法"。

4 讨论

只要精确给定了整个地球表面的完备数据, 比如重力位, 或者重力, 或者重力梯度, 则可采用虚拟压缩恢复法精确确定地球外部重力场。在实际应用中只能采用离散化或网格化计算法, 因而会带来误差影响。

如果只给定了卫星界面重力数据(比如重力或者重力梯度值), 从理论上来说, 按传统方法求解时(通常采用球谐展开法), 由卫星界面数据决定的位函数 V^S(引力位)是卫星界面外部的正则调和函数, 只适合于卫星界面外部。也就是说, 由此而确定的位函数的定义域是在卫星界面的外部(包括卫星界面)。采用球谐展开法可将上述位函数"自然延拓"到 Brillouin 球面, 但不能保证"自然延拓"到地球表面[6-8]。采用虚拟压缩恢复法可以解决"向下延拓"问题。目前, 利用卫星探测技术可以获得卫星界面上的引力位, 如采用著名的能量积分法[16,17], 因而, 以确定地球外部重力场为主要目的的虚拟压缩恢复法(包括重力场的虚拟向下延拓法)已具有了实际应用的可能性。关于虚拟压缩恢复法本身的重要性以及潜在的应用前景(特别是利用 CHAPM 或 GOCE 卫星系统的实际观测值对地球重力场进行恢复), 还有待进一步的研究论证以及实验检验(包括模拟实验)。

Runge 定理指出[6,18], 存在地球外部空间的调和函数 V, 它在卫星界面外部空间与 V^S 无限接近。实际上, 假定地面(完备)数据和卫星界面(完备)数据均没有误差, 那么, 由地面数据所决定的位函数 V 在卫星界面外部(包括卫星界面)必定与 V^S 一致, 因而符合 Runge 定理。然而, 问题在于, 假如没有地面数据而只有卫星界面数据, 按通常的传统方法就难以求出适合于整个地球外部的位场 V, 所能得到的只是 Brillouin 球面外部的位场(按球谐展开法)。

如果采用虚拟压缩恢复法, 则可仅仅根据卫星界面上的完备重力观测数据确定地球外部的重力场。如若同时给定地球表面的完备重力数据以及卫星界面上的完备重力数据, 则可采用虚拟压缩恢复法分别求解, 之后再作加权平均处理即可确定地球外部场, 而权重取决于卫星界面重力数据的精度与地面重力数据的精度之比, 因为虚拟压缩恢复法几乎不损失精度[15]。

参考文献

[1] 申文斌. 引力位虚拟压缩恢复法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2004, 29(8): 720-724

[2] Shen Wenbin, Ning Jinsheng. A Proposal on the Determination of the Earth's Potential Field[R]. CEOS: Report at the 18th CEOS International Meeting, Beijing, 2004

[3] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy[M]. San Francisco: Freeman and Company, 1967

[4] 李建成, 陈俊勇, 宁津生, 等. 地球重力场逼近理论与中国2000似大地水准面的确定[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003

[5] Rummel R, Colombo O L. Gravity Field Determination from Satellite Gradiometry [J]. Bulletin Géodesique, 1985, 59: 233-246

[6] Moritz H. Advanced Physical Geodesy [M]. Karlsruhe: Wichmann, 1980

[7] Moritz H. On the Convergence of the Spherical Harmonic Expansion of the Geopotential at the Earth Surface[J]. Bollettino di Geodesia e Scienze Affni., 1978, 37: 363-381

[8] Sjöberg L E. On the Convergence Problem for the Spherical Harmonic Expansion of the Geopotential at the Surface of the Earth[J]. Bollettino di Geodesia e Scienze Affni., 1980, 39: 261-272

[9] Arnold K. Das Gravitationspotential im Außenraum der Erde[J]. Vermessungstechnik, 1989, 37(3): 82-86

[10] Lemoine F G, Kenyon S C, Factor J K, et al. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96: NASA Technical Paper NASA/TP-1998-206861[R]. Greenbelt: Goddard

Space Flight Center, 1998

[11] Reigber C, Schwintzer P, Neumayer K L, et al. The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2[J]. Adv. Space Res., 2003, 31(8): 1 883-1 888

[12] 申文斌, 宁津生, 晁定波. 边值问题虚拟压缩恢复原理及其在 Bjerhammar 理论中的应用[J]. 测绘学报, 2005, 34(1): 14-18

[13] Bjerhammar A. A New Theory of Geodetic Gravity [R]. Stockholm: Royal Institute of Technology, Geodesy Division, 1964

[14] Xu Houze, Zhu Zhuowen. The Fictitious Single Layer Density Expression of the Earth's External Gravity Field[J]. China Science B, 1984, 6: 575-580

[15] Shen Wenbin, Tao Benzao. The Accuracy Analysis of the Gravity Model Based on the Fictitious Compress Recuperation[R]. AOGS: Report at the 1st AOGS General Meeting, Singapore, 2004

[16] Gerlach C, Sneeuw N, Visser P, et al. CHAMP Gravity Field Recovery Using the Energy Balance Approach[J]. Advances in Geosciences, 2003(1): 73-80

[17] Visser P, Sneeuw N, Gerlach C. Energy Integral Method for Gravity Field Determination from Satellite Orbit Coordinates[J]. J. of Geod., 2003, 77: 207-216

[18] Krarup T. A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy[R]. Copenhagen: Publ. 44, Dan. Geod. Inst., 1969

第一作者简介: 申文斌, 博士, 教授, 博士生导师; 主要从事物理大地测量、相对论大地测量以及地球内部物理的研究。
E-mail: wbshen@sgg.whu.edu.cn

An Approach for Determining the Earth's External Gravity Field by Using Satellite Gravity Data and the Simulation Experiment

SHEN Wenbin[1,2]　*WANG Zhengtao*[1]　*CHAO Dingbo*[1,2]

(1　School of Geodesy and Geomatics, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　The Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan 430079, China)

Abstract: Giving a large amount of satellite gravity data, based on spherical harmonic expansion and least-squares estimate principle, an earth's gravity field model EGM could be established, which might not be valid in the region near the earth's surface. Choosing a sphere Ks which includes the whole earth, under the assumption that EGM holds correct in the region outside the sphere Ks, and based on the "fictitious compress recovery" approach, it could be established a new gravity model, properly called NEGM, which is valid in the whole region outside Earth, solving the "downward continuation" problem. A preliminary simulation experiment supports the "fictitious compress recovery" approach and the "downward continuation" approach is given in this paper.

Key words: satellite boundary data; fictitious compress recovery; downward continuation; simulation experiment

About the first author: SHEN Wenbin, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. His research activities include physical geodesy, relativistic geodesy and the physics of the earth's interior.
E-mail: wbshen@sgg.whu.edu.cn