

# 球坐标下数值流形方法有限单元覆盖的单元矩阵表达式

刘经南<sup>1</sup> 陈庭<sup>2</sup> 许才军<sup>2</sup> 易长荣<sup>2</sup>

(1 武汉大学校长办公室, 武汉市珞珈山, 430072)

(2 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

**摘要:** 为将数值流形方法从平面扩展到球面, 推导了球面上数值流形方法的有限单元覆盖的应变矩阵及刚度矩阵、初应力矩阵、点荷载矩阵、体荷载矩阵、惯性力矩阵和固定点矩阵的具体公式。

**关键词:** 球坐标系; 数值流形方法; 单元矩阵

**中图法分类号:** P223.0

大地测量学科发展的总趋势是向地球科学的纵深发展, 深入到其他地学学科的交叉领域, 其主要任务是监测和研究地球动力学现象, 而有限单元法(FEM)、非连续变形分析方法(DDA)等数值模拟方法在研究地壳运动及其动力学机制方面起着十分重要的作用。

数值流形方法是利用现代数学——“流形”的有限覆盖技术建立起来的一种最新数值方法。有限覆盖是由物理覆盖和数学覆盖组成的, 它可以处理连续和非连续问题。有限元在流形方法中只是一个单一的物理覆盖, 它覆盖了全部的数学覆盖; 而块体系统非连续变形分析方法 DDA 在流形方法中, 有许多物理覆盖, 它们各自覆盖一部分数学覆盖。在数值流形方法中, 只要用不同的覆盖组合, 就可以解决比有限元和 DDA 更有普遍意义的复杂问题, 采用连续和非连续覆盖函数的办法可以把连续和非连续的力学问题的计算统一起来。

目前, 数值流形方法采用平面方程已被应用于许多工程领域, 如要将数值流形方法大范围应用于地壳运动及其动力学机制, 必须将数值流形方法的平面方程扩展到大规模的球面方程, 为此, 本文将偏心率很小的地球椭球面近似成球面, 并推导了有关的公式。

## 1 球面三角形网格下单元的位移和应变以及系统平衡方程式

### 1.1 单元的位移

对数值流形方法, 覆盖位移函数是对各个物理覆盖独立定义的, 可以是常数或标准的二阶级数, 其未知数是级数的系数。此处设覆盖函数为常数覆盖, 则有:

$$\begin{cases} U_{e(i)}(\varphi, \theta) \\ V_{e(i)}(\varphi, \theta) \end{cases} = \begin{cases} U_{e(i)} \\ V_{e(i)} \end{cases} (\varphi, \theta) \in e(i), i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

其中, 权函数取为  $W_{e(i)}(\varphi, \theta) = \frac{S_i(\varphi, \theta)}{S}, i = 1, 2, 3$ 。

如图 1 所示,  $S$  为球面  $\triangle P_1 P_2 P_3$  的面积,  $S_i$

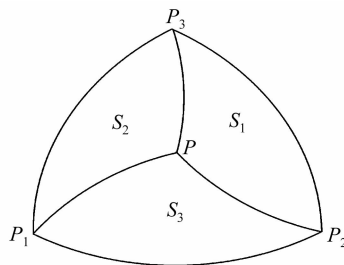


图 1 球面三角形面积

Fig. 1 Areas of Spherical Triangles

( $i=1,2,3$ )为被  $P$  点分割而成的三个小球面三角形的面积。则  $P$  处的位移为:

$$\begin{Bmatrix} U_\varphi \\ V_\theta \end{Bmatrix} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 W_{e(i)}(\varphi, \theta) U_{e(i)} \\ \sum_{i=1}^3 W_{e(i)}(\varphi, \theta) V_{e(i)} \end{cases} \quad (2)$$

也可表示为:

$$\begin{Bmatrix} U_\varphi \\ V_\theta \end{Bmatrix} = [T_e] \{D_e\} \quad (3)$$

式中,  $[T_e] = (T_{e(1)} \quad T_{e(2)} \quad T_{e(3)})$ ;  $[T_{e(i)}] =$

$$\begin{bmatrix} W_{e(i)}(\varphi, \theta) & 0 \\ 0 & W_{e(i)}(\varphi, \theta) \end{bmatrix}; \{D_e\} = \begin{Bmatrix} D_{e(1)} \\ D_{e(2)} \\ D_{e(3)} \end{Bmatrix};$$

$$\{D_{e(i)}\} = \begin{Bmatrix} U_{e(i)} \\ V_{e(i)} \end{Bmatrix}, i=1,2,3.$$

1.2 应变公式

用球坐标来表达弹性力学球体问题<sup>[11]</sup>, 设位移在球坐标( $R, \theta, \varphi$ )中的分量为  $u_R, u_\theta, u_\varphi$  (图2), 其应变分量为:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{RR} & \epsilon_{R\theta} & \epsilon_{R\varphi} \\ \epsilon_{\theta R} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\varphi} \\ \epsilon_{\varphi R} & \epsilon_{\varphi\theta} & \epsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

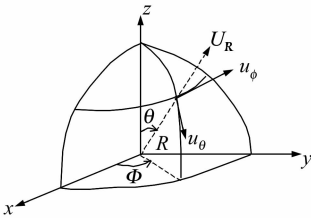


图2 球坐标系的位移分量

Fig.2 Displacement Component in Spherical Coordinate

则其几何方程组为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_\varphi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_{11}}{SR \sin\theta} & \frac{S_1 \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{21}}{SR \sin\theta} & \frac{S_2 \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{31}}{SR \sin\theta} & \frac{S_3 \text{ctg}\theta}{SR} \\ 0 & \frac{f_{12}}{SR} & 0 & \frac{f_{22}}{SR} & 0 & \frac{f_{32}}{SR} \\ \frac{f_{12} - S_1 \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{12}}{SR \sin\theta} & \frac{f_{22} - S_2 \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{22}}{SR \sin\theta} & \frac{f_{32} - S_3 \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{32}}{SR \sin\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{e(1)} \\ V_{e(1)} \\ U_{e(2)} \\ V_{e(2)} \\ U_{e(3)} \\ V_{e(3)} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

令

$$[B_e] = (B_{e(1)} \quad B_{e(2)} \quad B_{e(3)}) \quad (9) \quad \text{式中,}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{R} \text{ctg}\theta + \frac{u_R}{R} \\ \epsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \text{ctg}\theta \right) + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \epsilon_{\varphi R} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right] \\ \epsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

若不考虑球坐标系中  $R$  方向上的应变, 在只顾及球面二维的情况下, 式(4)可简化为:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \text{ctg}\theta \right] \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \epsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2R} \left[ \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \text{ctg}\theta \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

对式(2)中的  $\varphi, \theta$  求偏导, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{S} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} U_{e(1)} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} U_{e(2)} + \frac{\partial S_3}{\partial \varphi} U_{e(3)} \right) \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} &= \frac{1}{S} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \theta} U_{e(1)} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} U_{e(2)} + \frac{\partial S_3}{\partial \theta} U_{e(3)} \right) \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} &= \frac{1}{S} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} V_{e(1)} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} V_{e(2)} + \frac{\partial S_3}{\partial \varphi} V_{e(3)} \right) \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{S} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \theta} V_{e(1)} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} V_{e(2)} + \frac{\partial S_3}{\partial \theta} V_{e(3)} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial S_i}{\partial \varphi} = f_{i1}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial \theta} = f_{i2}$$

则式(6)可写为:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{S} (f_{11} U_{e(1)} + f_{21} U_{e(2)} + f_{31} U_{e(3)}) \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{S} (f_{12} U_{e(1)} + f_{22} U_{e(2)} + f_{32} U_{e(3)}) \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{S} (f_{11} V_{e(1)} + f_{21} V_{e(2)} + f_{31} V_{e(3)}) \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{S} (f_{12} V_{e(1)} + f_{22} V_{e(2)} + f_{32} V_{e(3)}) \end{cases} \quad (7)$$

将式(3)、式(6)代入式(5), 又  $\gamma_{\varphi\theta} = 2\epsilon_{\theta\varphi}$ , 令  $\epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi\varphi}$ ;  $\epsilon_\theta = \epsilon_{\theta\theta}$ , 可得应变矩阵:

$$[B_{e(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{f_{i1}}{SR \sin\theta} & \frac{S_i \text{ctg}\theta}{SR} \\ 0 & \frac{f_{i2}}{SR} \\ \frac{f_{i2} - S_i \text{ctg}\theta}{SR} & \frac{f_{i2}}{SR \sin\theta} \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

则

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_\varphi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} = [B_e] \{D_e\} = (B_{e(1)} \quad B_{e(2)} \quad B_{e(3)}) \begin{Bmatrix} D_{e(1)} \\ D_{e(2)} \\ D_{e(3)} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

### 1.3 系统平衡方程式

如有  $n$  个物理覆盖或  $n$  个节点,对由球面三角形剖分而得来的单元  $j$ ,有三个物理覆盖或节点  $j_1, j_2, j_3$ ,每个物理覆盖或节点  $i$  有两个未知数。

$$\{D_{e(i)}\} = \begin{Bmatrix} U_{e(i)} \\ V_{e(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

将各项应力和力产生的势能相加,得到总势能  $\Pi$ 。则通过

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_{ri}} = 0 \quad (13)$$

$d_{ri}$  为第  $r$  个覆盖第  $i$  个位移未知数,可得到平衡方程式:

$$\begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (14)$$

通过偏导式  $\partial^2 \Pi / \partial d_{ir} \partial d_{js}$  (使  $r, s = 1, 2$ ) 可以求得式(12)中  $k_{ij}$  的 4 个分量。 $[F_i]$  是覆盖  $i$  上分配给两个位移变量的荷载,它可由  $-\partial \Pi / \partial d_{ir}$  ( $r = 1, 2$ ) 求出。

## 2 球面有限单元覆盖的单元矩阵

### 2.1 单元覆盖的刚度矩阵

如果只考虑线性弹性体,且用来剖分研究区域的球面三角形很小,则对于球面上微小单元的情况类似于平面的情况有:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\varphi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中,  $E, \nu$  为球面应力的弹性模量和泊松比。令

$$[E_i] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

则有:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} = [E_i] \begin{Bmatrix} \epsilon_\varphi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} = [E_i][B_e]\{D_e\} = [E_i](B_{e(1)} \quad B_{e(2)} \quad B_{e(3)}) \begin{Bmatrix} D_{e(1)} \\ D_{e(2)} \\ D_{e(3)} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

由单元  $e$  的弹性应力所产生的应变能  $\Pi_e$  为:

$$\Pi_e = \iint_A \frac{1}{2} (\epsilon_\varphi \sigma_\varphi + \epsilon_\theta \sigma_\theta + \gamma_{\varphi\theta} \tau_{\varphi\theta}) R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \quad (18)$$

将式(9)和式(15)代入式(16),有:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{D_e\}^T \left\{ \iint_A [B_e]^T [E_i] [B_e] R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right\} \{D_e\}$$

因此,  $\iint_A [B_e]^T [E_i] [B_e] R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$  是单元的刚度矩阵。

### 2.2 单元初应力矩阵

对于单元  $e$ , 当有初始应力  $\{\sigma_e^0\} = \{\sigma_\varphi^0 \quad \sigma_\theta^0 \quad \tau_{\varphi\theta}^0\}^T$  时,其势能为:

$$\Pi_\sigma = \{D_e\}^T \left\{ \iint_A [B_e]^T R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right\} \{\sigma_e^0\}$$

因此,  $-\left\{ \iint_A [B_e]^T R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right\} \{\sigma_e^0\}$  是荷载矩阵。

### 2.3 单元点荷载矩阵

与原始的有限元只能把荷载加到结点上不同,数值流形方法中加荷载点可在单元内任何点。点荷载力  $\{F_\varphi F_\theta\}^T$  作用在单元  $e$  的  $(\varphi_0, \theta_0)$  上,且:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\varphi_0, \theta_0) \\ v(\varphi_0, \theta_0) \end{Bmatrix}$$

则由点荷载引起的势能

$$\Pi_p = -\{D_e\}^T [T_e(\varphi_0, \theta_0)]^T \begin{Bmatrix} F_\varphi \\ F_\theta \end{Bmatrix}$$

因此,  $[T_e(\varphi_0, \theta_0)]^T \begin{Bmatrix} F_\varphi \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [T_{e(1)}]^T \\ [T_{e(2)}]^T \\ [T_{e(3)}]^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_\varphi \\ F_\theta \end{Bmatrix}$  是点

荷载矩阵。

### 2.4 单元体荷载矩阵

设  $\{f_\varphi \quad f_\theta\}^T$  是作用在单元  $e$  上的常体应力。由点荷载引起的势能为:

$$\Pi_w = -\{D_e\}^T \left[ \iint_A [T_e]^T R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right] \begin{Bmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \end{Bmatrix}$$

因此,

$$\left[ \iint_A \begin{Bmatrix} [T_{e(1)}]^T \\ [T_{e(2)}]^T \\ [T_{e(3)}]^T \end{Bmatrix} R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right] \begin{Bmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \end{Bmatrix}$$

是体荷载阵。

## 2.5 单元的惯性力矩阵

流形方法中是分时间步进行计算的。如当前

时间步  $\begin{Bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{Bmatrix}$  为单元  $e$  的任意点  $(\varphi, \theta)$  与时间有关的位移,并且单位面积的质量为  $M$ 。则单位面积的惯性力为:

$$\begin{bmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \end{bmatrix} = -M \frac{\partial}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{Bmatrix} = -M [T_e] \frac{\partial^2 \{D_e(t)\}}{\partial t^2}$$

则单元  $e$  的惯性力势能为:

$$\Pi_i = -\iint_A (U \quad V) \begin{Bmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \end{Bmatrix} R^2 \sin\theta d\varphi d\theta =$$

$$\iint_A M (U \quad V) [T_e] \frac{\partial^2 \{D_e(t)\}}{\partial t^2} R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \quad (19)$$

设  $\{D_e(0)\} = \{0\}$  是时间步开始时的单元位移,  $\{D_e(\Delta)\} = \{D_e\}$  是时间步结束时的位移,  $\Delta$  是时间步步长,则

$$\{D_e\} = \frac{2}{\Delta^2} \{D_e\} - \frac{2}{\Delta} \{V_e(0)\}$$

式中,  $\{V_e(0)\} = \frac{\partial \{D_e(0)\}}{\partial t}$  是时间步起始时的速度。则势能变为:

$$\Pi_i = M \{D_e\}^T \left[ \iint_A [T_e]^T [T_e] R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right] \left( \frac{2}{\Delta^2} \{D_e\} - \frac{2}{\Delta} \{V_e(0)\} \right)$$

因此,  $\left[ \iint_A [T_e]^T [T_e] R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \right] \cdot \left( \frac{2M}{\Delta^2} \{D_e\} - \frac{2M}{\Delta} \{V_e(0)\} \right)$  是荷载矩阵。

## 2.6 单元的固定点矩阵

单元中有一些点是固定的,可用两根刚性弹簧来限制它。设固定点是在单元  $e$  的  $(\varphi_0, \theta_0)$  处,其位移为:

$$\begin{Bmatrix} U(\varphi_0, \theta_0) \\ V(\varphi_0, \theta_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

若弹簧刚度为  $p$ ,其弹簧力为:

$$\begin{Bmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -PU(\varphi_0, \theta_0) \\ -PV(\varphi_0, \theta_0) \end{Bmatrix}$$

则弹簧应变能为:

$$\Pi_f = \frac{P}{2} (U(\varphi_0, \theta_0) V(\varphi_0, \theta_0)) \begin{Bmatrix} U(\varphi_0, \theta_0) \\ V(\varphi_0, \theta_0) \end{Bmatrix}$$

则有:

$$p [T_e(\varphi_0, \theta_0)]^T [T_e(\varphi_0, \theta_0)] = p \begin{Bmatrix} [T_{e(1)}(\varphi_0, \theta_0)]^T \\ [T_{e(2)}(\varphi_0, \theta_0)]^T \\ [T_{e(3)}(\varphi_0, \theta_0)]^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [T_{e(1)}(\varphi_0, \theta_0)] \\ [T_{e(2)}(\varphi_0, \theta_0)] \\ [T_{e(3)}(\varphi_0, \theta_0)] \end{Bmatrix}$$

是  $[K_e]$  矩阵。

## 3 结 语

本文用球面三角形网格作为数学网格去覆盖研究区域,得到球面上的数值流形单元,并推导了相应的应变公式及单元刚度矩阵、初应力矩阵、点荷载矩阵、荷载矩阵、力矩阵和固定点矩阵,从而为将数值流形方法应用于大范围地壳运动的数值模拟打下了基础。

球面流形单元运动学方程的公式如单元接触矩阵和摩擦力矩阵的推导将另文论述。

## 参 考 文 献

- 汪素云,陈培善. 中国及邻区现代构造应力场的数值模拟. 地球物理学报, 1998, 23(1): 35~45
- 汪素云,许忠淮,俞言祥,等. 中国及邻区周围板块作用力的研究. 地球物理学报, 1996, 39(6): 764~771
- 王仁,梁海华. 用叠加法反演东亚地区现代构造应力场. 见: 马宗晋编. 国际交流地质学术论文集(2)——为27届国际地质大会撰写. 北京:地震出版社, 1985. 29~35
- 许才军. 青藏高原地壳运动模型与构造应力场. [博士论文]. 武汉:武汉测绘科技大学, 1994
- 党亚民. 基于反演理论的大地测量形变分析与解释的理论和方法. [博士论文]. 武汉:武汉测绘科技大学, 1998
- 陈兵,江在森,王双绪,等. 利用非连续变形数值方法研究块体运动及其应力场初探. 地壳形变与地震, 2000, 20(1): 38~42
- 赵齐乐,秦小军,乔学军,等. 伽师地区强震群前后地壳运动变形的数值模拟. 地壳变形与地震, 2000(4): 29~35
- 王泽民. 非连续变形分析与现代地壳运动研究. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(2): 122~125
- 王泽民,刘经南. 球面坐标系非连续变形分析(DDA)的数学模型. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(3): 209~212
- 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析. 北京:清华大学出版社, 1997
- 尹祥础. 固体力学. 北京:地震出版社, 1985

第一作者简介:刘经南,教授,博士生导师,中国工程院院士。现主要从事空间大地测量和地球动力学研究。代表成果:国家高精度GPS数据处理理论与方案;GPS卫星定位处理综合软件;WADGPS数据处理,青藏高原地壳运动与形变的GPS研究等。

E-mail: jnliu@whu.edu.cn

(下转第1043页)

式中,  $H_M = \sqrt{(1-e^2) \cdot (x_U^2 + y_U^2) + z_U^2}$ 。

由式(26)算得  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  :

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_U - x_1}{R_{U_1}} & \frac{y_U - y_1}{R_{U_1}} & \frac{z_U - z_1}{R_{U_1}} \\ \frac{x_U - x_2}{R_{U_2}} & \frac{y_U - y_2}{R_{U_2}} & \frac{z_U - z_2}{R_{U_2}} \\ \frac{x_U \cdot (1 - e^2)}{H_M} & \frac{y_U \cdot (1 - e^2)}{H_M} & \frac{z_U}{H_M} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta H \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

则  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  引起的经、纬度误差为<sup>[4]</sup> :

$$\Delta\lambda = \frac{-\sin\lambda \cdot \Delta x + \cos\lambda \cdot \Delta y}{R_N \cdot \cos\lambda}$$

$$\Delta L = \frac{-\sin L \cdot \cos\lambda \cdot \Delta x - \sin L \cdot \sin\lambda \cdot \Delta y + \cos L \cdot \Delta z}{R_M} \quad (28)$$

式中,  $R_M$  为用户所处椭球子午圈上的曲率半径。则由  $\Delta H_U$  引起的双星定位系统南北向的定位误差为:

$$R_N \cdot \Delta L = R_N \cdot \frac{-\sin L \cdot \cos\lambda \cdot \Delta x - \sin L \cdot \sin\lambda \cdot \Delta y + \cos L \cdot \Delta z}{R_M} \quad (29)$$

由  $\Delta H_U$  引起的双星定位系统东西向的定位误差为:

$$R_N \cdot \cos L \cdot \Delta\lambda = (-\sin\lambda \cdot \Delta x + \cos\lambda \cdot \Delta y) \cdot \cos L \cdot \sec\lambda \quad (30)$$

### 2.2 仿真与分析

仿真条件 § 1.3, 若高度表测量的高程的误差为 10 m, 则东西向、南北向定位误差如图 3 所示。

由仿真试验结果可以看出以下几点: ① 当高度表误差与数字地图高程误差都取为 10 m 时, 它们对双星定位精度的影响相同, 并且它们对双星定位精度的影响规律完全相同, 即符合 § 1.3 的结论; ② 同时经过大量的计算机仿真证明, 当高度表误差与数字地图的高程误差相同时, 对于不同的高程误差值, 它们对双星定位精度的影响总是相同的, 并且符合 § 1.3 的结论; ③ 产生上述结果的原因是当双星定位系统采用数字地图进行定位时, 当定位过程逐步迭代并收敛于用户的真实值时, 其定位结果的本质是由用户所处的高程方程以及两个距离和量方程决定, 因此等同于采用高度表定位时的结果。

### 3 结 语

从以上分析与仿真可知, 无论是由数字地图

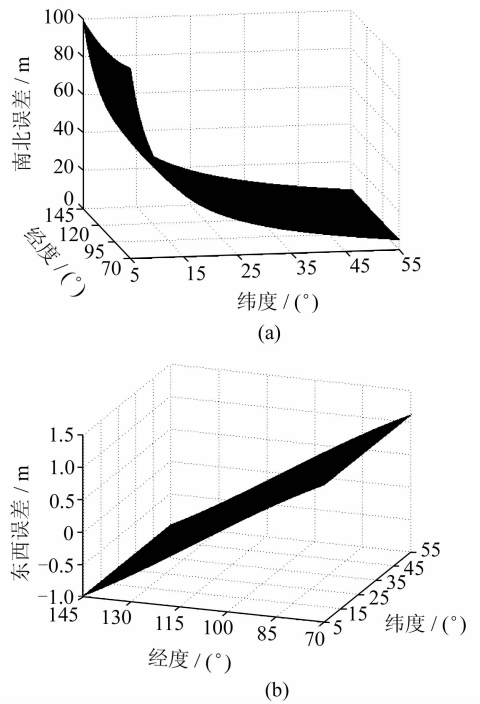


图 3 高度表误差为 10 m 时的双星定位系统定位误差  
Error of Barometer is 10 m

还是用户自身携带的高度表给双星定位系统提供高程, 高程误差对南北向的定位误差影响较大, 而对东西向的定位误差影响较小; 相同的两种高程误差对双星定位精度的影响也相同。

由于数字地图是通过地形高度的离散化采样并量化得到的, 其查询到的高程主要是地形相对于海平面的高度, 即地形的海拔高度<sup>[5]</sup>, 如果空中用户依靠中心站内的数字地图提供高程进行定位, 因为引入较大的高程误差而引起南北定位误差较大, 同时也影响东西向定位误差, 因此建议空中用户由其自身携带的高度表提供高程给双星定位系统进而进行较准确的定位。

高程误差对南北向定位误差影响作用主要是由  $\cot L \cdot \Delta H_U$  决定的, 在实际应用中, 特别是双星定位系统与 SINS 的组合中, 应把高程误差对南北向定位误差影响考虑在内。

### 参 考 文 献

- 1 郭建宁. 双星定位系统的定位计算和数字地图. 中国空间科学技术, 1992(6): 14~22
- 2 孙国良, 丁子明. 双星系统工作方式改进的探讨. 电子学报, 2001, 29(9): 1 217~1 220
- 3 王正凡, 郝 岩. 双星定位模型及其试验结果分析. 导航, 1991(1): 25~32